U d'/of OTTAWA
39003006972169

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
University of Toronto

http://archive.org/details/traitlmentairede01gano

Hermann
Fraserville
3 Janvier 1890

TRAITE ÉLÉMENTAIRE

DE PHYSIQUE

AVIS

Toutes les matières de physique comprises dans les programmes de la classe de Mathématiques élémentaires (préparation aux Baccalauréats ès sciences, à l'École de Saint-Cyr et à l'École Forestière), sont imprimés en gros caractères.

Tous les compléments sont imprimés en petit texte.

AUTRE OUVRAGE DE A. GANOT :

COURS DE PHYSIQUE

PUREMENT EXPÉRIMENTALE ET SANS MATHÉMATIQUES

A l'usage des gens du monde, des candidats au Baccalauréat ès lettres, des écoles normales primaires, des institutrices, des lycées et pensions de jeunes filles, etc.

Ouvrage de luxe, orné de **441** magnifiques gravures et d'une planche coloriée

HUITIÈME ÉDITION

12640. — Imprimerie A. Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE PHYSIQUE

PAR A. GANOT

VINGTIÈME ÉDITION

ENTIÈREMENT REFONDUE ET RÉDIGÉE A NOUVEAU

Conformément aux plus récents programmes universitaires

PAR GEORGES MANEUVRIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES
SOUS-DIRECTEUR DU LABORATOIRE DES RECHERCHES (PHYSIQUE)
A LA SORBONNE

CETTE ÉDITION COMPREND :

LE COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(*préparation au Baccalauréat ès sciences complet et au Baccalauréat de l'Enseignement spécial, à l'École de Saint-Cyr et à l'École Forestière*

Elle contient en outre :

1° Des notions de Météorologie, ainsi que des compléments au cours de Mathématiques élémentaires : applications pratiques, expériences de cours, etc. relatives à la préparation au *Concours général*, à *l'École centrale*

2° Les questions supplémentaires du Cours de *Mathématiques spéciales* (Pendule de Borda, Attraction universelle, Capillarité, etc.). (Préparation à l'*École polytechnique* et à l'*École normale supérieure*.)

3° Un résumé purement expérimental de *Haute Optique* et de *Saccharimétrie* à l'usage des étudiants en médecine et en pharmacie.

OUVRAGE CONTENANT 1116 GRAVURES INTERCALÉES DANS LE TEXTE
ET DEUX PLANCHES EN COULEUR

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie

79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1887

Droits de propriété et de traduction réservés

UNIVERSITAS SCIENTIAE OTTAWENSIS

QC
21
G18
1887
n. 1

UNIVERSITAS
SCIENTIAE
OTTAVIENSIS

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE PHYSIQUE

LIVRE I

MATIÈRE, MOUVEMENT ET FORCES

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. **Matière, corps, propriétés des corps.** — Il est impossible à l'homme d'exister sans être continuellement affecté par une infinité d'actions extérieures qu'exercent sur lui les objets et les êtres qui l'environnent. Tout ce qui produit ainsi, ou peut produire, sur ses organes un certain ensemble de sensations déterminées, les physiciens l'appellent *matière*.

Toute portion limitée de matière se nomme un *corps matériel*, ou simplement un *corps*.

Les *propriétés* des corps consistent dans leur faculté d'exciter en nous les sensations variées qui nous révèlent leur existence.

2. **Substances simples, substances composées.** — Un corps est caractérisé par l'ensemble de ses propriétés. Lorsque deux corps présentent les mêmes propriétés, on dit qu'ils sont formés *de la même substance*. En général, deux corps, pris au hasard, étant placés dans les mêmes circonstances, ne manifestent pas leur existence de la même manière; c'est qu'ils n'ont pas les mêmes propriétés : on dit alors que *leurs substances sont différentes*.

Certaines substances, en apparence très simples, telles que l'air, l'eau, le bois, sont en réalité composées de l'assemblage de deux

ou plusieurs autres substances distinctes. Il est possible de s'en assurer, soit en les décomposant en leurs éléments par des procédés scientifiques particuliers, dits procédés d'*analyse*, soit en les reconstituant de toutes pièces à l'aide d'autres procédés, dits procédés de *synthèse*. On les appelle *substances composées* ou *corps composés*. En appliquant les mêmes procédés d'analyse à d'autres corps, tels que le fer, le soufre, le diamant, on n'est jamais parvenu à retirer de chacun d'eux qu'une seule et même substance. On les appelle *substances simples* ou *corps simples*.

Le nombre des substances composées est nécessairement illimité : on peut en découvrir ou en créer tous les jours. Le nombre des substances simples est naturellement plus restreint, mais il est indéfini, car il n'est déterminé que par l'état de la science à chaque époque. On compte actuellement *soixante-six* substances simples.

3. **Phénomènes.** — Les corps manifestent leurs diverses propriétés dès qu'ils sont placés dans des circonstances favorables. Une pierre qu'on isole de tout support tombe vers le sol. L'eau, qui dans l'atmosphère existe normalement à l'état de vapeur, retombe sur la terre en neige ou en pluie, suivant la saison. Les métaux se dilatent ou se contractent, suivant qu'ils sont exposés à la chaleur ou au froid. La pierre d'aimant, qui est sans action sur une aiguille de cuivre, attire ou repousse l'aiguille aimantée, suivant l'extrémité qu'on lui présente. L'ambre ou le verre, préalablement frottés avec de la laine, attirent les barbes de plume et autres corps légers. Tous ces faits, bien constatés, sont appelés *phénomènes naturels*, ou simplement *phénomènes*.

Toute manifestation sensible des propriétés des corps est donc un *phénomène*. Ce mot n'a pas dans la science la même signification que dans le langage ordinaire, où il désigne un fait rare et surprenant.

4. **Phénomènes physiques, phénomènes chimiques.** — Tous les phénomènes que nous avons cités offrent ce caractère commun, d'être essentiellement *accidentels* et *passagers*. Ils ne subsistent pas au delà des circonstances qui les ont provoqués; ils ne laissent pas de trace sur les corps qui en ont été le siège. On les appelle *phénomènes physiques*.

Il en est d'autres, au contraire, dont la production amène des altérations profondes dans la constitution des corps. Si l'on chauffe fortement un bâton de craie, ce n'est plus une dilatation passagère qu'on observera, comme dans le cas d'une tige métallique. Le corps qui restera, après le refroidissement, n'aura plus du corps primitif que l'aspect extérieur. Il aura perdu les pro-

priétés de la craie et pris celles d'un nouveau corps, la *chaux vive*. Ce corps était combiné, dans la craie, avec un autre corps, l'acide carbonique, élément volatil, que l'échauffement a eu pour effet de chasser. Tels sont tous les phénomènes que provoque l'application des procédés d'analyse et de synthèse dont nous avons parlé plus haut. On les appelle *phénomènes chimiques*.

5. **Objet de la physique.** — Si l'on s'en rapportait à l'étymologie du nom, la *physique* (de φύσις, nature) embrasserait l'étude de tous les phénomènes *naturels*. Mais cette science a restreint son objet, afin de le mieux étreindre et de l'approfondir davantage. Laissant aux diverses branches de l'*histoire naturelle* les phénomènes relatifs aux êtres organisés, animaux et végétaux, à l'*astronomie* les phénomènes célestes, à la *minéralogie* la classification et les propriétés des *corps bruts* ou *minéraux*, à la *géologie* l'histoire de la croûte terrestre et des phases successives de sa lente formation, à la *chimie* enfin les phénomènes chimiques, elle s'est exclusivement réservé les phénomènes physiques.

On peut dire que l'objet de la physique est de constater par des *observations* précises, d'étudier par des *expériences* exactes, de représenter par des *lois générales*, l'ensemble des phénomènes physiques, c'est-à-dire des modifications accidentelles et passagères qui, se produisant dans les corps sans en altérer la constitution intime, apparaissent comme les manifestations de causes générales et permanentes.

Ajoutons que la ligne de démarcation est beaucoup plus tranchée entre la physique et les sciences naturelles qu'entre la physique et la chimie. Ces deux sciences se touchent par bien des points, non seulement dans leur objet, mais dans leur méthode et dans leurs résultats généraux. On peut dire qu'elles se rapprochent et se pénètrent de plus en plus, au fur et à mesure de leurs progrès, et qu'elles tendent à devenir comme les deux branches d'une science unique, la *mécanique générale*. C'est pourquoi on les comprend souvent sous le nom commun de *sciences physiques*, par opposition aux *sciences naturelles*, qui désignent toutes les autres sciences de la nature.

6. **Méthode physique** ou **méthode expérimentale.** — Une science se définit aussi bien par sa méthode que par son objet. C'est pourquoi nous n'avons pu ci-dessus caractériser l'objet de la physique sans indiquer les traits principaux de sa méthode, à savoir l'*observation*, l'*expérimentation* et la *généralisation*. Ce sont comme les degrés successifs par où la physique s'élève jusqu'à la complète connaissance de son objet. Tels sont aussi les caractères de la méthode expérimentale, qui se confond avec la méthode phy-

sique. C'est l'application rigoureuse de cette méthode qui a placé la physique au premier rang des sciences de la nature.

Observer, c'est examiner avec soin un phénomène dans les circonstances ordinaires de sa production et déterminer avec précision ces circonstances, quelque complexes qu'elles soient.

Expérimenter, c'est observer le même phénomène dans des conditions spéciales de simplicité, préparées à l'avance, de manière à isoler successivement chacune des circonstances qui l'accompagnent ordinairement en bloc, et à en découvrir la liaison avec le phénomène.

Généraliser, c'est rattacher toutes les formes d'un même phénomène ou tous les phénomènes analogues à une cause abstraite unique, d'où l'on peut ensuite les déduire par le raisonnement ou par le calcul, comme des conséquences nécessaires d'un même principe.

7. **Lois physiques, théories physiques.** — L'application de la méthode physique conduit à la détermination des *lois physiques* et à la conception des *théories physiques*. Un seul exemple suffira pour nous montrer la marche de la science.

L'observation la plus vulgaire nous révèle l'existence du phénomène de la chute des corps. Une pierre, ou tout autre corps pesant, se précipite vers le sol dès qu'on ne la soutient plus : donc tous les corps pesants tombent. Rien de plus facile à constater avec précision. Mais comment les corps tombent-ils? Leur mouvement est-il également rapide à toutes les époques de leur chute? Si la rapidité de chute n'est pas constante, comment varie-t-elle avec les hauteurs parcourues? Tout autre corps pesant abandonné à lui-même dans les mêmes conditions que la pierre prendrait-il le même mouvement? L'air atmosphérique traversé par le corps tombant ne s'oppose-t-il pas à sa chute? ne le retarde-t-il pas, et dans quelle proportion? Toutes ces particularités, essentielles à connaître pour savoir précisément *comment les corps tombent*, ne peuvent être découvertes que par l'expérience : par exemple, on portera successivement le corps pesant à des hauteurs de plus en plus grandes, et l'on mesurera les durées de ses chutes successives; ou bien on le fera tomber dans un tube vide d'air, de manière à supprimer la résistance de l'atmosphère.

On arrivera ainsi à une détermination exacte du *mode* du phénomène, qui permettra d'en prédire tous les détails pour un cas quelconque : cette détermination est ce qu'on appelle sa *loi physique*. Ainsi la détermination de toutes les circonstances que nous venons d'énumérer pour les corps qui tombent constitue les *lois de la chute des corps*, découvertes par Galilée.

Tantôt la loi physique consiste dans l'énoncé d'un fait général, comme cette première loi de la chute des corps : *Dans le vide, tous les corps tombent avec la même rapidité;* tantôt elle consiste dans une relation numérique entre un phénomène et l'une des circonstances qui peuvent influer sur lui, comme dans cette loi de Galilée : *Les espaces parcourus par un corps qui tombe librement dans le vide sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.*

Une *théorie physique* est constituée par l'ensemble des lois qui se rapportent à une même classe de phénomènes. C'est ainsi que la théorie de l'*attraction universelle* comprend non seulement les lois de la chute des corps à la surface de la terre, mais celles de la chute des planètes par rapport aux astres qui les font graviter autour d'eux, c'est-à-dire les lois de leurs mouvements.

Toutefois cette dénomination s'applique aussi quelquefois, dans un sens plus restreint, à l'explication de certains phénomènes particuliers. Par exemple, on dit : la *théorie de la rosée*, la *théorie de l'arc-en-ciel*, etc.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA MATIÈRE

8. **États physiques des corps.** — La matière frappe nos sens tout d'abord par la diversité de ses aspects. Elle se manifeste à nous sous trois formes ou trois états bien distincts, qu'on appelle *états physiques* des corps. Ce sont l'*état solide*, l'*état liquide* et l'*état gazeux*.

A l'état solide, les corps ont une forme et un volume bien déterminés. Tels sont le bois, les pierres, les métaux. On les appelle *corps solides*, ou simplement *solides*. A l'état liquide, les corps ont encore un volume déterminé, mais ils n'ont pas de forme propre : ils prennent celle des vases qui les renferment. L'eau est le type de ces corps. On les appelle *corps liquides*, ou simplement *liquides*. A l'état gazeux, les corps n'ont plus ni forme ni volume propres ; ils tendent constamment à occuper tout l'espace qui leur est ouvert. Tel est l'air atmosphérique. On les appelle *gaz*.

Dans les solides, les parties sont adhérentes les unes aux autres, et l'on ne peut les séparer qu'en développant un effort plus

ou moins considérable. Ces corps offrent une résistance plus ou moins grande non seulement à la rupture, c'est-à-dire à la séparation complète de leurs parties, mais aussi aux simples déplacements de celles-ci, amenant des déformations permanentes ou transitoires.

Les gaz se comportent d'une manière tout opposée. Comme si leurs parties se repoussaient mutuellement, on ne peut les contenir dans un espace limité qu'en y appliquant de l'extérieur un effort plus ou moins grand. Et si l'air atmosphérique qui nous entoure n'offre pas cette tendance, c'est qu'il est lui-même continuellement comprimé par la masse énorme de l'atmosphère dont il supporte le poids. Mais qu'on mette une vessie dégonflée et fermée dans un espace vide d'air (sous le récipient d'une machine pneumatique, on la verra se gonfler rapidement par suite de l'expansion de la faible quantité de gaz qui y restait. Cette propriété caractéristique de l'état gazeux est appelée *expansibilité*.

Enfin l'état liquide est un état intermédiaire entre les deux autres. Les particules liquides ne paraissent ni s'attirer comme les particules solides, ni se repousser comme les particules gazeuses ; elles peuvent glisser aisément les unes sur les autres, de manière à pouvoir se mélanger sans effort et à changer de forme à volonté sans changer de volume.

Remarques. — 1° Cette mobilité des particules, commune aux liquides et aux gaz, leur a fait donner le nom commun de *fluides* (de *fluere*, couler).

2° Cette différence d'états physiques est un effet de la température des corps. Une même substance, telle que l'eau, peut exister successivement à ces trois états. La plupart des corps y ont été déjà amenés, avec des difficultés plus ou moins grandes. On peut affirmer que tous les corps seront un jour préparés et maintenus à volonté à l'état de solides, de liquides ou de gaz.

3° Remarquons enfin que les trois états physiques ainsi définis sont des types, reliés entre eux par une série continue d'états intermédiaires. Ainsi les liquides visqueux, comme les *pâtes* et les *gelées*, passent graduellement de l'état liquide à l'état solide. Nous verrons plus tard que les gaz, à un certain degré de compression, ne diffèrent pas sensiblement des liquides.

9. **Classification des propriétés de la matière.** — La plupart des propriétés qui nous révèlent, par l'intermédiaire des phénomènes, l'existence de la matière, sont *accidentelles* ou *particulières*. Celles qui définissent les états physiques, la ténacité, la fluidité, l'expansibilité, en sont un exemple; de même celles qui caractérisent telle ou telle substance, comme la transparence, la colora-

tion, la vertu magnétique, etc. Certains corps possèdent ces propriétés à l'exclusion des autres corps, et ils ne les manifestent eux-mêmes que dans certaines circonstances et sous certaines conditions. Ce sont là des *propriétés particulières*, et elles ne peuvent nullement servir à caractériser l'essence même de la matière.

D'autres propriétés sont appelées propriétés *générales*, parce qu'elles sont communes à tous les corps. Mais elles ne sont pas *essentielles* à la matière, car on pourrait concevoir une matière qui n'en fût pas douée. Ce sont la *compressibilité* et la *divisibilité*, auxquelles on joint souvent, mais à tort (nous dirons pourquoi), la *porosité*.

On admet généralement deux *propriétés essentielles* de la matière, qui sont comme les conditions de la matérialité : ce sont l'*étendue* et l'*impénétrabilité*. Toutefois elles ne pourraient pas servir à une définition philosophique correcte de la matière, car on peut les rattacher à une autre propriété essentielle et seule primordiale, l'*inertie*.

10. **Inertie.** — On ne peut concevoir l'existence de la matière indépendamment de l'espace qui la contient. En même temps que nous percevons un corps, nous percevons aussi les corps environnants, ainsi que les rapports de distance qui existent entre eux. Suivant que ces rapports sont variables ou constants, le corps nous paraît être en *mouvement* ou en *repos*. Ces deux termes sont tellement clairs par eux-mêmes, que nous en obscurcirions le sens en essayant de les définir.

Or, tandis que les êtres animés se meuvent ou s'arrêtent par l'effet d'une volonté intérieure, on constate que *tous les corps matériels* sont *inertes*, c'est-à-dire sont dépourvus de spontanéité, soit pour se mouvoir, soit pour s'arrêter. L'*inertie* est donc la *résistance* qu'opposent tous les corps soit *au mouvement*, soit *au changement de mouvement*.

Cette résistance est plus ou moins grande, suivant la *quantité de matière* que le corps contient sous un volume déterminé. L'inertie est donc une propriété susceptible de mesure. Nous la mesurerons plus tard et nous en définirons la mesure sous le nom de *masse*.

11. **Étendue. Impénétrabilité.** — On appelle *étendue* la propriété qu'ont tous les corps d'occuper une portion de l'espace, *limitée* et *figurée*, c'est-à-dire douée d'un volume et d'une forme déterminés.

L'*impénétrabilité* des corps consiste en ce que deux portions distinctes de matière ne peuvent jamais s'identifier l'une avec

l'autre, de manière à *coexister* dans un même lieu de l'espace.

Nous pouvons acquérir d'un seul coup la notion de ces deux propriétés. Supposons que j'allonge le bras dans l'obscurité et qu'il y rencontre un obstacle qui l'empêche d'avancer. Ma main se promène sur cet obstacle, et je constate qu'il est limité, c'est-à-dire qu'il finit à certains endroits et commence à d'autres, et qu'autour de lui l'espace est libre. J'en conclus que cet obstacle existe, en dehors de moi, dans une certaine portion de l'espace d'où son existence m'exclut, et d'après cela je l'appelle *un corps*. Le premier de ces phénomènes me donne la notion de l'impénétrabilité, le second celle de l'étendue. On voit donc que celle-ci peut être considérée comme une conséquence de celle-là. On voit aussi que l'impénétrabilité peut être regardée comme une des formes de la *résistance* ou de l'*inertie* de la matière. C'est pourquoi nous présentons l'*inertie* comme la seule propriété vraiment essentielle de la matière.

12. **Compressibilité.** — C'est une propriété générale de la matière qu'on définissait autrefois, conformément à l'étymologie du nom, *la propriété qu'ont tous les corps de pouvoir se réduire à un moindre volume par l'effet de la pression.* Mais il est plus juste et plus général de dire que c'est *la propriété qu'ont tous les corps de changer de volume soit par l'effet d'un effort mécanique, soit par l'action de la chaleur.*

On doit regarder le volume extérieur des corps comme une fonction de la pression et de la température, c'est-à-dire comme une grandeur qui varie en même temps que ces deux circonstances, et qui reprend la même valeur quand celles-ci redeviennent les mêmes, à la condition toutefois que ni l'effort exercé, ni l'élévation de température, n'aient dépassé une certaine limite.

La compressibilité est très variable d'un corps à un autre, et surtout d'un état physique à un autre. Elle est très grande pour tous les gaz, beaucoup moindre, et à des degrés divers, pour les solides, et presque nulle pour les liquides, qu'on a longtemps considérés comme des *fluides incompressibles*. Mais nous verrons plus loin qu'on a pu constater par l'expérience et mesurer avec précision la compressibilité des liquides.

Remarques. — 1° *Dilatabilité.* — Lorsque la compressibilité résulte de la variation de température, et non de la variation de pression, on lui donne plutôt le nom de *dilatabilité*.

2° *Élasticité.* — A la compressibilité on doit rattacher l'*élasticité*, propriété que possèdent la plupart des corps comprimés, de reprendre leur forme et leur volume primitifs dès que la cause de compression a cessé d'agir.

13. **Divisibilité.** — On appelle ainsi la propriété que possèdent tous les corps de pouvoir être divisés en particules *indéfiniment petites*, sans perdre pour cela aucune des propriétés caractéristiques de leur substance.

On peut opérer cette division sur les solides par un grand nombre de procédés que nous fournissent les arts mécaniques et les sciences physiques. Ainsi, l'on souffle des objets en verre de 1 *micron*[1] d'épaisseur ; on étire des fils de platine de $0^{\mu},8$ de diamètre; on bat des feuilles d'or de $0^{\mu},1$ d'épaisseur; on recouvre des fils d'argent d'une couche d'or qui ne dépasse pas $0^{\mu},004$.

Les liquides volatils et certaines substances colorantes ou odorantes nous offrent des exemples non moins étonnants de divisibilité. On a calculé que le diamètre moyen des *globules d'eau* qui constituent les nuages prêts à se résoudre en pluie varie de 23 μ à 56 μ : de sorte que le nombre de ces globules que contient une goutte d'eau de 1 millimètre de diamètre varie entre 5000 et 50000. Un cent-millième de centimètre cube de *rosaniline* suffit pour colorer sensiblement 1 litre d'alcool. 5 centigrammes de *musc* suffisent pour répandre une odeur sensible pendant plusieurs années dans un appartement où l'air est fréquemment renouvelé.

Tous ces exemples de division sont peu de chose à côté de ceux que la nature nous fournit par milliers dans le monde microscopique des cellules organisées et des infusoires. La goutte de sang humain qui peut être suspendue à la pointe d'une aiguille contient plus d'un *million* de globules rouges sphériques. Si l'on regarde au microscope une gouttelette d'eau corrompue, ou de bouillon fermenté, ou de vinaigre altéré, on voit une multitude d'animalcules s'y mouvoir en tous sens, avec une extrême vivacité. Les uns ont des espèces de nageoires qu'ils agitent sans cesse, d'autres ont la tête armée de touffes de cils vibratiles, d'autres encore ressemblent à de longues anguilles qui serpentent en avant ou en arrière. On en voit dont le corps est si transparent, que l'on y découvre des vaisseaux qui battent comme notre cœur et dans lesquels coulent des liquides colorés. Quelle doit être la prodigieuse finesse et l'inconcevable ténuité des éléments anatomiques dont sont construits tous les organes de forme déterminée qui servent au mouvement, à la respiration et aux autres fonctions vitales de ces petits êtres!

14. **Atomes.** — Tous ces exemples prouvent que la divisibilité de la matière est *indéfinie*, puisqu'elle peut être réalisée jusqu'à

1. On désigne habituellement par *micron* le millionième du mètre, ou le millième de millimètre; on le représente par la lettre μ.

un degré où les particules échappent à la perception de nos sens; mais est-elle pour cela *infinie*, c'est-à-dire peut-elle être poussée au delà de toute limite?

Si l'on veut parler d'une divisibilité *abstraite* et *géométrique*, il n'y a aucun doute qu'elle ne soit illimitée. En effet, quelque petite qu'on suppose une parcelle de matière, on pourra toujours la *supposer* divisée en deux moitiés, puis chacune de ces moitiés divisée en deux autres, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Mais s'il s'agit d'une divisibilité *réelle* et *physique*, nous ne pouvons rien prononcer d'absolu, puisque aucun des procédés dont nous disposons actuellement ne nous permet de pousser l'expérience au delà d'un certain degré de division, assigné par le degré d'acuité de nos sens et le degré de précision de nos instruments de mesure.

Au défaut des physiciens, les métaphysiciens s'emparèrent, dès la plus haute antiquité, de cette intéressante question. Deux écoles de philosophie, également célèbres par l'autorité de leurs adhérents, en ont donné des solutions exactement opposées, qu'elles appuyaient d'ailleurs sur des arguments philosophiques d'une égale insuffisance. L'une d'elles, fondée par Anaxagore de Clazomène (450 ans avant J.-C.), soutenait que la matière est *homogène*, *continue* et *divisible à l'infini* : c'est l'école de Platon, d'Aristote, des néoplatoniciens d'Alexandrie et de tout le moyen âge, à laquelle se sont ralliés Descartes, Kant et Schelling. L'autre école, fondée par Leucippe (500 ans avant J.-C.), continuée dans l'antiquité par Épicure et par Lucrèce, et dans les temps modernes par Gassendi, admettait, au contraire, que la matière est formée d'une *multitude de particules*, *extrêmement petites*, *indivisibles* et *insécables*, qu'on appelait *atomes*, à cause même de cette indivisibilité

C'est cette théorie, dite *théorie atomistique*, qui a prévalu de nos jours, grâce aux arguments puissants — d'ordre expérimental — que la chimie moderne y a apportés. On admet donc, dans la science actuelle, que *la divisibilité de la matière n'est pas infinie*. En supposant qu'on employât des procédés de division beaucoup plus parfaits que ceux dont on dispose aujourd'hui, on serait arrêté à une limite infranchissable, l'*atome*, qu'on peut concevoir comme un volume de figure déterminée, impénétrable, incompressible, indilatable, indéformable.

15. **Molécules.** — D'après cette définition de l'*atome*, on ne saurait lui attribuer aucun des éléments de la sensation que nous procure la présence des corps. Ceux-ci ne sont pas constitués par les atomes eux-mêmes, mais par certaines *agglomérations d'atomes*, qu'on appelle *molécules*.

Les molécules seules sont quelque chose de semblable aux corps, elles en partagent les propriétés, et elles n'en diffèrent que par les dimensions. Par les rapports de position qu'elles ont entre elles, les molécules déterminent ce que nous appelons le *volume* et la *forme* des corps, tandis que les rapports de position qu'ont entre eux les atomes dont elles sont formées différencient ces mêmes corps au point de vue de la *substance*, au point de vue des *propriétés chimiques*.

D'ailleurs la molécule pas plus que l'atome n'est perceptible à nos sens ou à nos instruments de mesure.

Un grand nombre de faits ont amené plusieurs physiciens à des évaluations suffisamment concordantes du diamètre moyen des molécules. On admet qu'il est compris entre 1 *millième* et 1 *dix-millième* de *micron*. Et comme nos plus puissants microscopes nous font apercevoir au plus le quart de micron, il faudrait que le diamètre des molécules fût de 250 fois à 2500 fois plus grand pour devenir visible au microscope.

16. **Pores moléculaires.** — On doit admettre que les corps les plus durs, les plus tenaces, les plus compacts ne sont pas formés de matière absolument continue; car, si cette continuité existait, il serait impossible d'expliquer un grand nombre de faits qui semblent en contradiction avec l'impénétrabilité de la matière. Comment le même corps pourrait-il se contracter ou se dilater par la variation de pression ou de température? Comment les sels pourraient-ils se dissoudre dans l'eau, le mercure s'insinuer dans la masse de certains métaux? Comment ces dissolutions, ces mélanges, pourraient-ils s'opérer sans augmentation apparente du volume total, et même parfois avec une contraction apparente (54 volumes d'alcool et 50 volumes d'eau ne donnent que 100 volumes de mélange)? Il faut donc admettre que les molécules ne sont pas *juxtaposées* dans les corps, mais qu'elles sont séparées entre elles par des intervalles appréciables, susceptibles d'augmenter ou de diminuer sous l'influence de causes extérieures.

Ce sont ces intervalles qu'on a appelés *pores moléculaires*. Ils sont du même ordre de petitesse que les molécules elles-mêmes, et l'on a pu, par les mêmes considérations, se faire une idée approximative de leurs dimensions. Dans les corps solides et liquides, ils sont de l'ordre des *millièmes de micron*, de telle sorte qu'un cube de 1 millimètre de côté (une tête d'épingle) contiendrait un nombre de molécules égal au cube de 1 million, c'est-à-dire un nombre représenté par l'unité suivie de 18 zéros. Dans les gaz, où le nombre des molécules est beaucoup moindre (de 5000 à 16000 fois environ), la grandeur moyenne des *pores moléculaires* est, à la

pression et à la température ordinaires, de 3 à 4 millièmes de micron, et l'on trouve encore, dans ces conditions, 20 trillions de molécules par centimètre cube de matière gazeuse !

17. **Porosité. — Pores sensibles. — Perméabilité.** — Les pores moléculaires, de même que les molécules, échappent donc absolument à l'appréciation de nos sens. On ne peut donc pas considérer l'existence de ces pores, qu'on appelle quelquefois *porosité*, comme une propriété générale de la matière, au même titre que la compressibilité ou la divisibilité. La *porosité* est plutôt une sorte d'hypothèse sur la constitution de la matière, corrélative et complémentaire de l'hypothèse des molécules.

Il ne faut pas confondre les pores moléculaires avec les lacunes naturelles ou accidentelles que présentent certains corps, vulgairement appelés *poreux*, tels que les éponges, la pierre ponce, etc. Ces interstices physiques, souvent visibles à l'œil nu ou au microscope, toujours susceptibles d'être révélés par l'expérience, doivent être appelés *pores sensibles*, par opposition aux *pores insensibles* qui séparent les molécules. L'existence de ces pores sensibles, dans les corps qui en sont doués, doit être appelée *perméabilité*, car elle se manifeste toujours chez eux par la propriété de se laisser plus ou moins aisément traverser aux liquides ou aux gaz.

L'expérience de la *pluie de mercure dans le vide*, que nous verrons parmi les applications de la machine pneumatique, nous prouvera la *perméabilité* d'une peau de chamois, d'une rondelle de cuir, d'un disque de bois débité perpendiculairement aux fibres. La perméabilité des métaux a été démontrée depuis longtemps par Bacon : ayant comprimé une sphère creuse de plomb remplie d'eau et hermétiquement fermée, il fit suinter l'eau à travers les parois. Les académiciens de Florence répétèrent cette expérience, plus de cinquante ans après, sur une sphère d'argent.

La perméabilité peut s'accroître ou même ne se manifester que par l'élévation de température. Ainsi l'acier devient perméable, à chaud, pour l'hydrogène, qui ne le pénètre pas à la température ordinaire. De même les poêles en fonte se laissent traverser par les gaz délétères de la combustion, lorsque leurs parois sont portées au rouge.

Toutefois certains corps, en particulier le verre, ne manifestent dans aucune circonstance cette perméabilité, soit pour les liquides, soit pour les gaz. On ne peut donc pas la considérer comme une *propriété générale* de la matière.

18. **Éther.** — Les anciens philosophes atomistes complétaient leur système sur la constitution de la matière en supposant que

les atomes sont *en état de mouvement continuel* et qu'ils sont isolés les uns des autres par des intervalles *absolument vides*. Les physiciens actuels, qui ont adopté la première hypothèse, en la développant, ont dû rejeter celle-ci.

Les intervalles ou pores moléculaires *ne sont pas vides :* ils sont remplis par un milieu subtil, *infiniment plus ténu* que les gaz les plus légers, *absolument inerte* et *parfaitement élastique*, qu'on appelle l'*éther*. Ce corps nouveau, qui constitue comme un quatrième état physique de la matière, pénètre intimement, imbibe en quelque sorte tous les autres corps, solides, liquides ou gazeux. Il ne se trouve pas seulement dans le voisinage de la terre, comme l'atmosphère qui y est retenue par la pesanteur ; il remplit les espaces interplanétaires aussi bien que les pores intermoléculaires, et il sert d'intermédiaire universel entre toutes les parties de l'univers. Il n'est possible ni de le toucher, ni de le voir, ni de le percevoir directement par le moyen des sens ; mais il est impossible, dans l'état actuel de la science, de n'en point admettre l'existence.

19. **Mouvements moléculaires de la matière.** — L'inertie et l'élasticité suffisent pour caractériser complètement l'éther, dont l'unique fonction est de recueillir le mouvement des corps et de le propager dans l'univers sans aucune déperdition. Car tous les corps de la nature, même ceux qui paraissent complètement en repos, sont perpétuellement assujettis à des mouvements intérieurs très violents, qui ont pour siège les molécules.

C'est dans les gaz que cet état d'agitation incessante est le mieux caractérisé. Leurs molécules sont animées de mouvements tels, qu'elles se repoussent et que chaque molécule s'envole, indépendante des autres, jusqu'à ce qu'elle rencontre un obstacle contre lequel elle se réfléchit, pour voler de nouveau dans une autre direction. Si une masse gazeuse se trouvait isolée dans l'espace, sans être soumise à aucune résistance extérieure, les molécules se sépareraient et s'étendraient à l'infini : telle est la cause de l'*expansibilité*, propriété caractéristique de l'état gazeux. Lorsque la masse est enfermée dans un vase, ces molécules heurtent continuellement les parois en leurs divers points, de sorte que ces parois doivent offrir une certaine résistance pour ne pas céder à ces chocs répétés. C'est le bombardement opéré par cette multitude de petits projectiles contre la paroi enveloppante qui constitue la *tension* ou *force élastique* des gaz, conséquence nécessaire et mesure de leur expansibilité.

Amplitude des mouvements moléculaires. — On a pu évaluer l'ordre de grandeur de ces mouvements par les mêmes procédés, et avec la même

approximation, que celui des molécules. Ainsi, dans l'*air atmosphérique*, chaque molécule, dont le diamètre moyen est $0^{\mu},0005$, est animée d'une vitesse de translation de 250 mètres par seconde; elle est choquée par les autres et déviée de sa direction 5 milliards de fois par seconde; enfin son trajet moyen entre deux chocs consécutifs, ou, comme on dit, sa *moyenne de libre parcours*, est d'environ $0^{\mu},1$. Dans le *gaz hydrogène*, la vitesse moyenne des molécules est environ quatre fois plus grande, et le nombre des collisions est double.

Dans les *solides*, les molécules sont toujours animées de très grandes vitesses; mais elles sont tellement solidaires les unes des autres, qu'elles ne peuvent quitter entièrement leurs positions respectives : elles ne peuvent qu'exécuter des mouvements de va-et-vient ou de circonvolution, des mouvements vibratoires renfermés dans des limites déterminées. L'amplitude de ces oscillations est bien au-dessous de la limite de perceptibilité.

Dans les *liquides*, la vitesse des molécules et leur moyenne de libre parcours sont moindres que dans les gaz, mais encore beaucoup plus grandes que dans les solides. Les molécules isolées n'occupent plus, comme dans ceux-ci, des positions déterminées auxquelles elles reviennent toujours pendant leurs mouvements. Celles qui occupent une position superficielle peuvent aisément se séparer des autres. Celles qui sont engagées dans la masse sont astreintes à une sorte d'enchevêtrement qui, sans nuire à la mobilité relative, les maintient dans un espace déterminé.

20. **Constitution de la matière.** — Ces notions d'atomes, de molécules, de pores, de mouvements moléculaires et d'éther nous permettent maintenant de définir la matière, ou les portions de matière qu'on appelle des *corps*, tels que les conçoivent actuellement les physiciens. Sans nous arrêter à la question d'unité ou de multiplicité de *substance*, qui est du ressort de la chimie, nous dirons que *les corps sont des agrégats de molécules, séparés entre eux par des intervalles remplis d'éther, et en état perpétuel de mouvement.*

Cette chose, dont l'image renversée se peint sur notre rétine, et que nous appelons un *corps*, n'est donc pas l'unité et la réalité que nous croyons percevoir : ce n'est que le volume apparent formé par les molécules et leurs intervalles moyens, l'enveloppe idéale au dedans de laquelle elles s'agitent.

La *continuité* que paraît avoir la surface des corps et dont l'idée nous est donnée par les sens de la vue et du toucher, est donc une *pure illusion*. Elle est due à ce que les angles visuels sous-tendus par les innombrables éléments des corps sont trop petits pour affecter individuellement notre œil. Nous amplifions, il est vrai, ces angles avec le secours du microscope, mais seulement jusqu'à une certaine limite, au delà de laquelle la confusion persiste [1]. La même illusion se produit lorsque nous regardons au loin une troupe d'hommes ou d'animaux, par exemple un régiment en train de manœuvrer, ou bien un vol d'oiseaux migrateurs, ou simplement une nuée de moucherons. Les intervalles entre les éléments de ces groupes disparaissent complètement par suite de leur grande distance, ainsi que les variations incessantes apportées dans ces inter-

1. Jouffret, *Introduction à la théorie de l'énergie.*

valles par les mouvements individuels : en sorte que nous n'apercevons qu'une tache sombre, d'une seule pièce, et en apparence continue, pareille aux corps que nous avons sous la main et devant les yeux.

21. **Anciens fluides impondérables. — Anciens agents physiques. — Physique nouvelle.** — Les premiers essais d'explication des phénomènes naturels se trouvent dans les mythologies et les livres sacrés des anciens peuples. Ce sont les prêtres et les fondateurs de religions qui furent les premiers physiciens des sociétés naissantes, comme ils en furent les premiers législateurs. Ils ne firent pas d'ailleurs de grands efforts ni d'attention pour observer les faits, ni de raisonnement pour les expliquer : c'est de leur imagination qu'ils tirèrent presque toute leur science. A chaque effet naturel constaté ils attribuaient une cause surnaturelle : ils inventaient une divinité spécialement chargée de le produire. C'est ainsi que furent créés par les hommes les innombrables dieux du paganisme, dieux du feu, de la lumière et des ténèbres, du soleil et de la lune, de la mer, des fleuves et des rivières, des vents et des saisons, de la pluie et du beau temps.

Ce besoin inné du surnaturel, cet instinct du merveilleux se perpétuèrent à travers l'antiquité païenne jusqu'au moyen âge. Il prit alors une forme nouvelle, et il provoqua les pratiques occultes des alchimistes, leurs formules cabalistiques et leurs bizarres conceptions sur la constitution des corps. On peut en suivre l'influence jusque dans les temps modernes, malgré les progrès des sciences expérimentales, et en signaler la dernière manifestation dans cette méthode, ou plutôt cette habitude d'explications *à priori*, qui a prévalu jusqu'aux premières années de ce siècle, et qui a produit le *phlogistique* des anciens chimistes et les *fluides impondérables* ou *agents physiques* des anciens physiciens

On attribuait les différents phénomènes qu'on observe, non plus à des personnes, mais à des entités particulières, qu'on supposait dénuées de poids et qu'on appelait *fluides impondérables*. Chaque catégorie d'effets avait pour cause un fluide impondérable et quelquefois deux. On créa ainsi le *fluide lumineux*, le *calorique* ou *fluide calorifique*, les *électricités résineuse* et *vitrée* ou *fluides électriques positif* et *négatif*, les deux *magnétismes* ou *fluides magnétiques*, boréal et austral. Mais de même que les progrès de la raison humaine avaient fait disparaître les êtres qui réglaient à volonté l'apparition des phénomènes naturels, de même le développement des sciences expérimentales a montré l'inutilité de tous ces fluides pour expliquer les lois si variées de la nature et la possibilité de ramener celles-ci à quelques principes fondamentaux.

Les seules hypothèses que l'expérience nous a conduits à faire sur la constitution de la matière contiennent en germe la théorie complète de ses propriétés. Si les mouvements moléculaires, dont nous avons admis l'existence, nous échappent individuellement par suite de leur extrême petitesse, ils affectent nos sens d'une autre manière, par suite de leur grand nombre et de leur accumulation. Transmis par l'éther, milieu où nagent toutes les molécules, comme des flotteurs dans la mer, ils nous font éprouver, suivant leur amplitude ou leur vitesse, la sensation de *chaleur* ou la sensation de *lumière*. Ce sont eux également qui produisent vraisemblablement — mais sous une forme qui n'a pas encore été découverte — les phénomènes si curieux et si variés de l'*Électricité* et du *Magnétisme*. C'est à eux enfin qu'il faut rapporter les attractions qui paraissent s'exercer entre tous les corps, soit aux distances infiniment petites des molécules, sous le nom de *Forces moléculaires*, soit aux distances infiniment grandes des astres, sous le nom de *Pesanteur* et de *Gravitation universelle*.

22. **Divisions de la physique.** — L'objet final de la Physique étant « la matière en mouvement », l'enseignement de la Physique doit débuter par la science abstraite du mouvement, c'est-à-dire par la *Mécanique*. Nous commencerons donc par exposer les notions fondamentales de cette science, en renvoyant pour les détails aux ouvrages spéciaux. Conformément à l'esprit du programme d'admission à l'École Polytechnique, nous appliquerons tout d'abord les principes de la Mécanique à l'étude du mouvement des corps pesants (*Pesanteur*) et à celle de l'équilibre des liquides (*Hydrostatique*) et des gaz (*Pneumatique*), soumis à l'action de la *pesanteur*. L'*Acoustique*, ou science du son, nous fournira ensuite un premier exemple très net de mouvements vibratoires de la matière qui engendrent des phénomènes physiques et des phénomènes physiologiques. L'étude de ces vibrations sonores, qu'on peut aisément rendre accessibles aux sens, nous conduira logiquement à l'étude des vibrations lumineuses (*Lumière*) et des vibrations calorifiques (*Chaleur*), qu'on ne peut ni voir, ni toucher d'aucune manière et dont l'existence ne nous est démontrée que par le raisonnement. Nous exposerons ensuite les faits fondamentaux du *Magnétisme* et de l'*Électricité*, sciences nouvelles, ou plutôt renouvelées depuis peu, qu'on ne peut encore rattacher naturellement aux autres parties de la Physique que par la loi de la *Conservation de l'énergie*, principe fondamental de la Mécanique moderne. De plus, après l'étude de la Pesanteur, qui nous aura familiarisés avec les phénomènes physiques, nous intercalerons l'exposé du *Système de mesures*, dites *absolues*, récemment établi

par un Congrès international de physiciens, ainsi que la description des principaux instruments de mesure, dits *Instruments de précision*, employés en physique ; nous introduirons la *Capillarité*, ou science des phénomènes capillaires, après l'Hydrostatique, dont ils paraissent contredire les lois, et nous terminerons ce Traité par la *Météorologie*, science des phénomènes atmosphériques, qui nécessite l'application des lois et des appareils de toutes les autres parties de la Physique.

CHAPITRE III

MÉCANIQUE

NOTIONS DE CINÉMATIQUE.

23. **Divisions de la mécanique.** — La *Mécanique* a pour objet l'étude du mouvement et des causes du mouvement. On appelle *forces* toutes les causes de mouvement, quelles qu'en soient la nature et l'origine.

Le mouvement et les forces sont des phénomènes physiques. C'est donc dans la nature, et non dans l'imagination, qu'il faut chercher les lois fondamentales de la mécanique ; c'est par l'observation, aidée de l'induction, et non par le raisonnement seul, qu'on a pu les découvrir. Mais, ces principes une fois posés, toute la science s'en déduit par l'application rigoureuse de la méthode géométrique. C'est donc à juste titre qu'on considère la mécanique comme une branche des sciences mathématiques : on lui donne le nom de *Mécanique rationnelle*, pour la distinguer de la *Mécanique céleste* et de la *Mécanique appliquée* ou *Mécanique industrielle*, qui sont des applications de la science pure soit au mouvement des astres, soit au fonctionnement des machines. C'est de cette dernière application qu'on a tiré le nom de la science tout entière (de μηχανή, machine).

La Mécanique rationnelle se subdivise ordinairement en deux parties. Dans l'une, la *Cinématique* (de κίνημα, mouvement), on étudie tout d'abord le mouvement *en soi*, à un point de vue purement abstrait et géométrique, sans se préoccuper des forces qui le produisent. La Cinématique est donc une sorte de géométrie du mouvement, qui joint à l'*idée d'espace*, seule base de la géométrie, l'*idée de temps*, corrélative de la notion de mouvement.

L'autre partie de la Mécanique rationnelle comprend l'étude des forces, qu'on considère successivement à l'état d'équilibre (*Statique*, de στατική, équilibre), puis à l'état d'action (*Dynamique*, de δύναμις, puissance).

24. **Définitions préliminaires.** — *Vitesse.* — La notion de mouvement, qui implique celles d'espace et de temps, s'acquiert par la vue d'un objet quelconque qui se déplace, par exemple un corps pesant qui tombe, un projectile qui traverse l'atmosphère, un train de chemin de fer qui passe. On acquiert du même coup la notion de *vitesse*, qui comprend celle d'une vitesse *plus ou moins grande*, d'une *vitesse constante* et d'une *vitesse variable*. On observe ces divers cas de vitesse dans les allures successives que prend un train, au départ d'une station, ou bien à l'arrivée, ou bien, à une certaine distance, dans l'intervalle de deux stations.

Mobile. — On appelle *mobile* tout corps qui est en mouvement.

Point matériel. — Une seule propriété des corps intervient dans l'étude de leur mouvement: c'est l'inertie. Il est commode de supprimer par la pensée toutes les autres, même l'étendue. On ne considère donc que des mobiles sans étendue, c'est-à-dire réduits aux dimensions d'un point géométrique, n'ayant d'autre propriété que d'être *inertes*, c'est-à-dire de résister au mouvement, à des degrés divers, caractérisés par leurs masses : c'est ce qu'on appelle des *points matériels*. Les résultats trouvés pour un point matériel unique pourront être étendus à un mobile de dimensions finies, car on peut considérer un corps quelconque comme un système de points matériels.

Trajectoire. — Le lieu des points géométriques que le mobile occupe successivement dans l'espace s'appelle sa *trajectoire*.

Le mobile étant un point géométrique, sa trajectoire est une ligne géométrique. Suivant que cette ligne est droite ou courbe, on dit que le mouvement est *rectiligne* ou *curviligne*.

25. **Mouvement uniforme.** — 1° *Définition.* — On appelle *mouvement uniforme* celui dans lequel un mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, quelque petits que soient ces temps. Le mot *espace* prend ici le sens restreint de *chemin parcouru sur la trajectoire*, ou de *portion de trajectoire*.

Suivant que la trajectoire est rectiligne ou curviligne, le mouvement uniforme est lui-même un mouvement rectiligne ou curviligne.

Ce mouvement est le plus simple qu'on puisse imaginer, mais il est le plus difficile à réaliser dans la pratique et le plus rare dans la nature.

2° *Vitesse.* — On mesure la *vitesse* par l'espace parcouru pendant l'unité de temps. Si l'on prend, comme d'habitude, le mètre pour unité de longueur et la seconde pour unité de temps, on exprimera la vitesse en *mètres par seconde.* On dira, par exemple, que la Terre tourne sur elle-même (mouvement diurne) avec une vitesse *de* 463 *mètres par seconde* pour un point de l'équateur; ou bien l'on dira que *la vitesse du mouvement curviligne uniforme* d'un point de l'équateur terrestre *est de* 463 *mètres par seconde.*

3° *Lois du mouvement.* — Il résulte de cette définition que, dans le mouvement uniforme, la vitesse est constante. Par suite, l'espace parcouru par le mobile au bout de 2, 3, 4.... secondes sera égal à 2, 3, 4.... fois la vitesse : d'où ces lois du mouvement uniforme : 1° Loi des vitesses : *La vitesse est constante.* 2° Loi des espaces : *Les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

4° *Équations du mouvement.* — On appelle *origine des espaces* un point pris sur la trajectoire, à partir duquel on compte les espaces parcourus par le mobile. On appelle *origine du temps* l'instant à partir duquel on compte la durée du mouvement.

Si l'on désigne par v la vitesse d'un mouvement uniforme, et si le mobile parcourt un nombre de mètres par seconde égal à a, la première loi du mouvement s'exprime par la relation simple [1] $v = a$. Elle est indépendante du temps.

Si l'origine des espaces coïncide avec l'origine du temps, c'est-à-dire si l'on compte la durée du mouvement à partir de l'instant où le mobile passe au point O, origine des espaces (fig. 1, trajectoire OX), la loi des espaces s'exprimera par la relation [2] $e = at$, e désignant l'espace parcouru au bout de t secondes. Mais si, à l'origine du temps, le mobile avait déjà parcouru l'espace $OO_1 = e_0$ (fig. 1, trajectoire OY), la loi des espaces s'exprimera par la relation [2'] $e = e_0 + at$. L'une et l'autre des relations [2] et [2'] sont dépendantes du temps; ce sont, comme on dit en algèbre, des *fonctions du temps.*

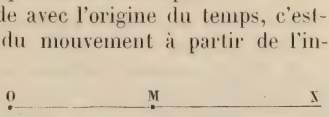


Fig. 1.

Les relations [1] et [2] s'appellent les *équations du mouvement.* La première est l'*équation des vitesses*, l'une ou l'autre des suivantes est l'*équation des espaces.* Un mouvement uniforme, et en général un mouvement quelconque, est complètement déterminé

quand on connaît la trajectoire du mobile et les équations du mouvement.

Remarque. — On tire des équations [2] et [2'], soit $v = \frac{e}{t}$, soit $v = \frac{e - e_0}{t}$.

On peut donc dire que, dans le mouvement uniforme, *la vitesse est le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir*, ou bien *le rapport de l'accroissement de l'espace à l'accroissement du temps*. Par suite, on peut déduire l'équation de la vitesse de l'équation de l'espace. Une seule de ces équations suffit donc pour déterminer le mouvement, quand on connaît la trajectoire.

26. **Mouvement varié.** — 1° *Définition.* — Le *mouvement varié* est celui dans lequel un mobile parcourt en des temps égaux des espaces inégaux. Le mouvement varié peut être *rectiligne* ou *curviligne*.

Un pareil mouvement peut être varié d'une infinité de manières. Il est défini dans chaque cas par la trajectoire du mobile et par l'équation des espaces. Cette équation n'est plus, comme précédemment, du premier degré : elle est plus ou moins compliquée. Par exemple l'équation $e = at^2 + bt + c$ définit le mouvement varié d'un point matériel se mouvant sur la trajectoire rectiligne OX (fig. 2).

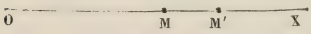


Fig. 2.

2° *Vitesse moyenne pendant un intervalle de temps donné.* — I. *Mouvement rectiligne.* — Soient OX la trajectoire du mobile, M sa position au temps t et M' sa position au temps $t + \Delta t$. (Nous désignerons, suivant l'usage algébrique, par Δe l'accroissement MM' de l'espace, et par Δt l'accroissement du temps.) On pourrait évidemment amener le mobile de la première position à la deuxième, dans le même temps Δt, en lui imprimant un mouvement rectiligne *uniforme*. La vitesse de ce mouvement virtuel serait donnée par l'équation

$$V_m = \frac{\Delta e}{\Delta t},$$

et elle s'exprimerait en mètres par seconde. Ce rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ est ce qu'on appelle la *vitesse moyenne* du mouvement varié *pendant l'intervalle de temps* Δt *qui succède à l'instant* t.

Remarquons que cette vitesse V_m dépend à la fois de l'intervalle

de temps Δt et de l'époque t à partir de laquelle on le compte.

II. *Mouvement curviligne.* — Soit un mobile parcourant la courbe MM′ avec une vitesse variable (fig. 3). Si M est sa position au temps t et M′ sa position au temps $t + \Delta t$, on pourrait amener le mobile de la première position à la deuxième en lui imprimant un mouvement rectiligne et uniforme suivant la corde MM′. La vitesse de ce mouvement virtuel serait $\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$. Ce quotient est ce qu'on appelle la *vitesse moyenne du mobile pendant l'intervalle de temps* Δt *qui succède à l'instant* t. On voit que cette vitesse moyenne ne dépend pas du chemin réellement parcouru par le mobile, mais seulement de la distance des points de départ et d'arrivée.

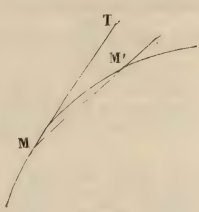


Fig. 3.

3° *Vitesse à un instant* t *quelconque.* — I. *Mouvement rectiligne.* — Si l'on suppose que l'intervalle de temps Δt diminue indéfiniment et tende vers zéro, l'accroissement d'espace MM′ (fig. 2) tend simultanément vers zéro; mais le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, c'est-à-dire la vitesse moyenne, tend généralement vers une limite déterminée . c'est la valeur de cette limite qu'on appelle *vitesse* du mouvement varié *à l'instant* t. On a donc

$$V_t = \lim. \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right).$$

Cette vitesse s'exprime encore en *mètres par seconde*, comme dans le mouvement uniforme; mais il est sous-entendu qu'elle ne désigne pas le trajet fait réellement par le mobile en 1 seconde, mais *celui qu'il ferait* s'il continuait à marcher, à partir de l'instant t, *avec une vitesse demeurant constante* et égale à V_t.

II. *Mouvement curviligne.* — De même, si l'on suppose que l'intervalle de temps Δt diminue indéfiniment et tende vers zéro, le point M′ se rapproche indéfiniment du point M (fig. 3) et la corde MM′ tend simultanément vers zéro : mais, en général, le rapport $\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$ tendra vers une limite qu'on appelle *vitesse à l'instant* t. La direction de la vitesse moyenne était celle de la corde MM′; la limite de cette direction est aussi la direction de la vitesse à l'instant t : or on sait que la direction de la corde MM′ a pour limite la tangente en M à la courbe.

On a donc $V_t = \lim. \left(\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t}\right)$, et cette vitesse est dirigée suivant la tangente en M à la trajectoire curviligne.

Remarque. — On peut d'ailleurs donner à cette vitesse V_t la même expression que dans le mouvement rectiligne, à savoir $V_t = \lim. \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$. En effet, on peut écrire l'égalité

$$\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} = \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} \times \frac{\text{corde } MM'}{\text{arc } MM'}.$$

C'est une identité : elle subsiste, quelque petits que soient les termes qui la constituent; elle existe donc encore à la limite, lorsque Δt tend vers zéro. On a donc

$$\lim. \left(\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t}\right) \times \lim. \left(\frac{\text{corde } MM'}{\text{arc } MM'}\right).$$

Le premier membre est égal à V_t; le deuxième facteur du second membre est égal à l'unité (d'après un théorème de trigonométrie bien connu). On a donc également

$$V = \lim. \left(\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t}\right), \text{ c'est-à-dire} = \lim. \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right),$$

et cette vitesse est dirigée suivant la tangente en M.

4° *Calcul de* V_t. — Ce calcul se fait de la même manière, dans le cas d'un mouvement varié rectiligne et dans celui d'un mouvement varié curviligne, puisqu'on a dans les deux cas

$$V_t = \lim. \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right).$$

Supposons que l'équation des espaces soit de la forme donnée ci-dessus (26, 1°) :

$$e = at^2 + bt + c.$$

Le second membre est une fonction du second degré en t, où a, b et c sont des coefficients constants. A l'instant t, l'espace parcouru est donné par l'égalité $e = at^2 + bt + c$. A l'instant t' ($t' = t + \Delta t$), l'espace e' ($e' = e + \Delta e$) est donné par $e' = at'^2 + bt' + c$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$e' - e \quad \text{ou} \quad \Delta e = a(t'^2 - t^2) + b(t' - t).$$

En divisant les deux membres par $t' - t$ ou Δt, on a

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = a(t' + t) + b = a(2t + \Delta t) + b.$$

Si l'on fait tendre Δt vers zéro, le premier membre tend vers V_t, et l'on a, à la limite,

$$V_t = 2at + b.$$

On voit que la fonction $2at + b$ est précisément ce qu'on appelle en algèbre la *dérivée première* de la fonction $at^2 + bt + c$. Cela est général : c'est une conséquence de la définition même de V_t. En effet, si l'espace e est représenté par une fonction du temps quelconque $f(t)$, on sait que $\lim. \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ (lorsque Δt tend vers zéro) est, par définition, la dérivée première de $f(t)$, qu'on représente ordinairement par $f'(t)$. Si donc l'équation du mouvement est $e = f(t)$, celle de la vitesse sera $V_t = f'(t)$. Pour avoir la valeur numérique de la vitesse à un instant quelconque t, il suffira de donner au temps cette valeur particulière dans la fonction $f'(t)$.

27. **Mouvement rectiligne uniformément varié.** — 1° *Définition.* — Le plus simple des mouvements variés, et en même temps le plus intéressant dans la pratique, est le *mouvement rectiligne uniformément varié.* On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié, lorsque la vitesse *croît* ou *décroît* de quantités égales dans des temps égaux, quelque petits qu'ils soient.

Dans le premier cas, le mouvement est *uniformément accéléré :* tel est celui d'un corps qui tombe, abstraction faite de la résistance de l'air. Dans le second, il est *uniformément retardé :* tel est le mouvement d'une pierre lancée verticalement de bas en haut.

La quantité, positive ou négative, dont la vitesse varie dans l'unité de temps, s'appelle *accélération.*

2° *Vitesse.* — On doit la définir de la même manière que dans un mouvement varié quelconque : c'est la limite de $\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ quand Δt tend vers zéro.

Si l'on connaissait la fonction du temps qui représente l'espace parcouru au bout du temps t, on calculerait par la méthode générale $\lim. \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$, c'est-à-dire V_t pour un instant quelconque. Mais on peut déduire V_t de la définition même du mouvement. En effet, si l'on représente par γ l'accélération, et qu'on suppose le mobile sans vitesse initiale, c'est-à-dire partant du repos, sa vitesse au bout de 1 seconde est γ, au bout de 2 secondes 2γ, et ainsi de suite; donc la vitesse V_t, au bout de t secondes, sera

$$[1] \qquad V_t = \gamma t.$$

Cette relation numérique entre la vitesse et le temps n'est pas autre chose que l'*équation des vitesses.* Dans le cas où le mobile ne part pas du repos et possède une vitesse initiale constante V_0

au moment où son mouvement devient uniformément accéléré, la vitesse au bout du temps t est donnée par l'équation

$$[1'] \qquad V = V_0 + \gamma t.$$

3° *Équation des espaces.* — C'est la relation numérique qui existe entre l'espace e et le temps t. Elle peut se déduire, par le calcul, de l'équation des vitesses, au moyen d'une opération algébrique qu'on appelle *intégration*, et qui consiste à remonter d'une fonction dérivée, telle que la vitesse, à la fonction d'où elle dérive, qu'on appelle *fonction primitive*. En appliquant les règles de l'intégration aux équations [1] et [1'], on trouve

$$[2] \qquad e = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

dans le cas où il n'y a pas de vitesse initiale, et

$$[2'] \qquad e = V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

dans le cas général où il y a une vitesse initiale.

4° *Lois du mouvement uniformément accéléré.* — On énonce les équations du mouvement sous le nom de *lois du mouvement uniformément accéléré.*

I. Loi des vitesses. — *Les vitesses croissent proportionnellement aux temps.* C'est-à-dire qu'après un temps double, triple, quadruple, la vitesse est 2, 3, 4 fois plus grande.

II. Loi des espaces. — *Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.* C'est-à-dire que, si l'on représente par 1 le chemin parcouru en 1 seconde, les chemins parcourus en 2, 3, 4, 5.... secondes seront représentés par 4, 9, 16, 25....

5° *Mouvement uniformément retardé.* — Les équations sont les mêmes que pour le mouvement accéléré, sauf le signe de γ. On a, dans le cas général, où il entre une vitesse initiale,

$$[1] \qquad V = V_0 - \gamma t,$$

$$[2] \qquad e = V_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

6° *Réciproque de la loi des espaces.* — L'équation [2] ci-dessus fait voir que, dans tout mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps; réciproquement, *tout mouvement dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps, est uniformément accéléré.*

En effet, si le temps t prend un accroissement très petit Δt, l'espace parcouru e prend un accroissement très petit Δe, et la formule [2] devient

$$e + \Delta e = \frac{1}{2}\gamma(t + \Delta t)^2,$$

ou, en développant les calculs,

$$[3] \qquad e + \Delta e = \frac{1}{2}\gamma(t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2).$$

Si de l'égalité [3] on retranche membre à membre l'égalité [2], on obtient

$$[4] \qquad \Delta e = \gamma t\,\Delta t + \frac{1}{2}\gamma\Delta t^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta e}{\Delta t} = \gamma t + \frac{1}{2}\gamma\Delta t.$$

L'équation [4] exprime que les quantités $\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ et $\left(\gamma t + \frac{1}{2}\Delta\gamma t\right)$ sont égales quelque petit que soit Δt. Lorsque Δt tend vers zéro, chacune de ces quantités tend vers une limite, et l'égalité subsistera toujours jusqu'à la limite. Elle deviendra : $\lim.\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right) = \lim.\left(\gamma t + \frac{1}{2}\Delta\gamma t\right)$. Or la limite du second membre c'est évidemment γt; quant à la limite de $\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$, nous avons vu qu'elle représente la vitesse V_t du mouvement varié à l'instant t. L'égalité [4] devient donc $V_t = \gamma t$, formule qui exprime la première loi du mouvement uniformément accéléré.

28. **Accélération dans un mouvement varié quelconque mais rectiligne.** — Elle n'est pas constante comme dans le mouvement rectiligne uniformément varié. On doit définir successivement *l'accélération moyenne pendant un intervalle de temps* Δt, puis *l'accélération à un instant* t.

1° *Accélération moyenne.* — Soit Δv l'accroissement, positif ou négatif, que prend la vitesse, à l'époque t, pendant un intervalle de temps Δt. La variation moyenne de vitesse est évidemment le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. C'est ce qu'on appelle *accélération moyenne* du mouvement varié. Cette quantité dépend à la fois de l'intervalle de temps Δt et de l'époque t à partir de laquelle on le considère.

2° *Accélération à l'instant* t. — Si l'on fait décroître l'intervalle de temps Δt, la variation de vitesse Δv décroîtra également, et le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ prendra des valeurs différentes, mais toujours bien définies. Lorsqu'on fera tendre Δt vers zéro, la variation de vitesse Δv tendra également vers zéro, mais le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ tendra, en général, vers une limite déterminée; cette limite est ce qu'on appelle l'*accélération à l'instant* t.

3° *Expression analytique de l'accélération.* — L'espace e, dans tout mouvement varié, est représenté par une fonction du temps, qu'on peut désigner par $f(t)$. Nous avons vu que la vitesse à l'instant t est aussi une fonction du temps, qui est précisément la dérivée de l'espace par rapport au temps; on la désigne par $f'(t)$. D'après ce qui précède, on voit que l'accélération est à la vitesse ce que celle-ci est à l'espace, c'est-à-dire que la limite de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est la *dérivée de la vitesse par rapport au temps*.

Cette dérivée d'une fonction qui est elle-même une dérivée s'appelle la *dérivée seconde* de la fonction primitive, et on la désigne par le symbole $f''(t)$. On peut donc encore dire que *l'accélération à l'instant* t, *dans un mouvement varié quelconque mais rectiligne, est la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps, tandis que la vitesse à l'instant* t *en est la dérivée première.* On a donc, pour définir tous les éléments d'un mouvement varié quelconque *mais rectiligne*, les trois équations suivantes :

$$[1] \quad e = f(t); \qquad [2] \quad v = f'(t); \qquad [3] \quad \gamma = f''(t).$$

Il suffit de connaître la première pour calculer les deux autres; quant au calcul inverse, qui consiste à remonter de l'une des fonctions dérivées à la fonction primitive, il est possible dans un grand nombre de cas, mais non dans tous.

Nous verrons plus loin que cette expression simple de l'accélération ne s'applique pas au cas d'un *mouvement varié curviligne.*

29. **Mouvement absolu, mouvement relatif. — Mouvement apparent.** — Jusqu'à présent nous avons supposé que le mobile se déplaçait par rapport à un point *fixe*, l'origine des espaces, sur une trajectoire, droite ou courbe, dont tous les points étaient *également fixes*. Nous nous étions placés dans le cas du *mouvement absolu*, cas idéal, introuvable dans la nature, irréalisable dans la pratique. Cette hypothèse n'infirme d'ailleurs nullement les résultats que nous avons trouvés; car, tant qu'on ne considère que les déplacements d'un point matériel par rapport à des repères donnés, il importe peu que ces repères soient réellement fixes dans l'espace : il suffit qu'ils le soient par rapport au mobile considéré.

Le cas ordinaire est celui où les points de repère ainsi que tous les points de la trajectoire du mobile sont emportés eux-mêmes d'un mouvement commun quelconque, qu'on appelle *mouvement d'entraînement*. Le mouvement que le mobile possède alors dans son propre système est un *mouvement relatif*. Tel est, par exemple, le mouvement des billes d'un billard qui serait installé dans un bateau en marche. Tel est le mouvement du bateau lui-même par rapport aux rives d'un fleuve; car celles-ci participent avec lui au double mouvement de la terre qui tourne sur elle-même tout en se déplaçant sur son orbite autour du soleil. Tels sont enfin tous les mouvements que nous observons soit autour de nous, à la surface de la terre, soit au-dessus de nous, dans les espaces célestes.

En résumé, lorsqu'un mobile M se meut dans un système A, fixe ou supposé fixe, ce mobile a un *mouvement absolu;* mais quand le système A se déplace lui-même par rapport à un autre système B, supposé fixe, le mobile M a un mouvement *relatif* dans le système A et *absolu* dans le système B.

On confond souvent les expressions *mouvement relatif* et *mouvement apparent*, qui ne sont pourtant pas identiques. Le mouvement *apparent* du mobile M peut être, suivant la situation de l'observateur qui considère le mouvement, soit son mouvement relatif dans le système A, soit son mouvement absolu dans le système B. Si l'observateur fait partie du système A, le mouvement qu'il perçoit, qui est *apparent pour lui*, c'est le mouvement relatif de M dans A; si l'observateur fait partie du système B, le seul mouvement qui soit *apparent pour lui*, c'est le mouvement absolu de M dans B.

30. **Composition des mouvements.** — La considération du mouvement relatif et du mouvement absolu conduit au problème général suivant :

Un mobile M *est animé d'un mouvement relatif dans le système* A ; *ce système* A *est animé lui-même d'un mouvement d'entraînement dans le système* B : *connaissant ces deux mouvements, trouver le mouvement absolu du mobile* M *dans le système* B.

C'est ce qu'on appelle le *problème de la composition des mouvements*, parce qu'on peut considérer le mouvement de M dans B comme un mouvement *composé* ou *résultant* des deux autres mouvements, lesquels en sont eux-mêmes les *mouvements composants*.

Ce problème a pour complément un problème inverse, celui de la *décomposition* des mouvements. On peut l'énoncer aussi, d'une manière abrégée :

Étant donné le mouvement résultant et l'un des mouvements composants, trouver l'autre mouvement composant.

On peut résoudre ces deux problèmes dans le cas général où le mouvement d'entraînement du système A est un mouvement quelconque. Nous nous contenterons d'en donner la solution dans le cas le plus ordinaire, où ce mouvement d'entraînement est un mouvement de *translation*.

On dit qu'un système A est animé d'un mouvement de *translation*, lorsque tous ses points décrivent, dans le même temps, des droites égales et parallèles. Un mouvement de translation peut être uniforme ou varié.

31. **Principe du mouvement relatif.** — Toutes les règles relatives à la composition des mouvements se déduisent du principe suivant et de son corollaire :

Lorsqu'un mobile, faisant partie d'un système matériel, se meut par rapport aux points de ce système, son déplacement est le même, que le système soit en repos ou qu'il soit lui-même animé d'un mouvement de translation.

Lorsque le système est en repos, le mobile a un mouvement absolu; lorsque le système est lui-même en mouvement, le mobile a un mouvement relatif.

Le principe du mouvement relatif, énoncé pour la première fois par Galilée, est un de ces principes fondamentaux de la Mécanique qu'on a découverts par l'observation dans quelques cas particuliers, et qu'on a généralisés par l'induction. Ce principe ne se démontre pas *à priori*, mais il est vérifié expérimentalement dans les conséquences qu'on en tire.

Corollaire. — *Pour tout point matériel animé de deux ou de plusieurs mouvements simultanés, la position au temps* t *est la même que si ces mouvements étaient successifs.*

32. **Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes.** — Soit un point matériel parcourant la droite OX (fig. 4) avec une vitesse constante, tandis que celle-ci est animée d'un mouvement de translation uniforme suivant la direction OY. On dit alors que *le point matériel est animé de deux mouvements rectilignes et uniformes.* Le mouvement composé ou résultant de ces deux mouvements est déterminé par la règle suivante, dite *règle du parallélogramme des vitesses :*

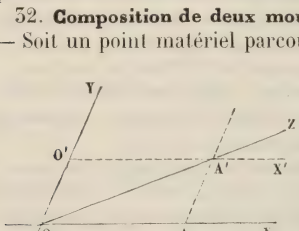


Fig. 4.

Règle du parallélogramme des vitesses. — *Lorsqu'un point matériel est animé de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformes, il prend un mouvement résultant rectiligne et uniforme, dont la vitesse est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants.*

Si les longueurs OA et OO′ représentent en grandeur et en direction les deux vitesses composantes, la ligne OZ représente en direction la trajectoire du mouvement composé, et la longueur OA′ représente en grandeur la vitesse constante de ce mouvement.

33. **Composition de plusieurs mouvements rectilignes et uniformes.** — Lorsqu'on sait composer deux mouvements, on peut en composer un nombre quelconque. Il suffit de généraliser, de la manière suivante, la règle du parallélogramme :

Remarquons qu'on peut obtenir la vitesse résultante OA′ (fig. 4)

en portant à la suite l'une de l'autre, à partir du point O, deux lignes OA et AA′, représentant les vitesses des deux mouvements en grandeur et en direction, et en joignant l'extrémité A′ de la dernière ligne à l'origine O de la première. La ligne OA′ ainsi obtenue s'appelle la *somme géométrique* des deux lignes OA et AA′. On peut donc énoncer la règle précédente en disant que : *La vitesse du mouvement composé est la somme géométrique des vitesses des mouvements composants.*

Sous cette forme, la règle de composition est générale et s'applique à un nombre quelconque de mouvements composants. On peut l'énoncer comme il suit :

Lorsqu'un point matériel est animé de plusieurs mouvements simultanés, rectilignes et uniformes, il prend un mouvement résultant rectiligne et uniforme, dont la vitesse est la somme géométrique des vitesses des mouvements composants.

Considérons, par exemple, quatre mouvements uniformes, dirigés suivant les lignes OA, OB, OC, OD (fig. 5), non situées dans un même plan, et de vitesses a, b, c, d, représentées respectivement en grandeur et en direction par les droites Oa, Ob, Oc, Od. Menons par le point a une droite ab', égale et parallèle à Ob, et joignons Ob' ; la droite Ob' est la somme géométrique des lignes Oa et Ob : elle représente en grandeur et en direction la vitesse du mouvement uniforme résultant des deux mouvements uniformes OA et OB. Menons de même la droite $b'c'$, égale et parallèle à Oc, et joignons Oc' ; cette ligne représentera la vitesse du mouvement composé qui résulte de Oc et de Ob', c'est-à-dire de OC, de OB et de OA. Enfin, menons la droite $c'd'$, égale et parallèle à Od, et joignons Od' ; cette ligne est la somme géométrique de Od et de Oc', c'est-à-dire de Od, Oc, Ob et Oa : elle représente donc en grandeur et en direction la vitesse du mouvement uniforme qui résulte des quatre mouvements composants. Ce mouvement est dirigé suivant OR.

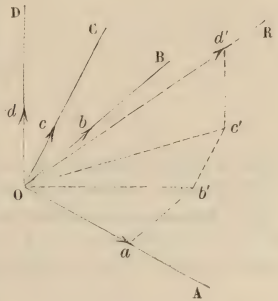


Fig. 5.

Remarque. — La construction serait évidemment la même pour un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes.

34. Règles du polygone des vitesses et du parallélépipède des vitesses. — Remarquons que la figure O$ab'c'd'$ (fig. 5) constitue

un polygone gauche dont la vitesse résultante Od' forme le dernier côté. De là un nouvel énoncé de la règle de composition de plusieurs mouvements rectilignes et uniformes : *Le mouvement résultant est rectiligne et uniforme, et sa vitesse est représentée en grandeur et en direction par le côté qui ferme le polygone* $Oa\,b'\,c'\,d'$ *dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux vitesses* Oa, Ob, Oc *des mouvements composants.*

Sous cette forme, la règle prend le nom de *règle du polygone des vitesses.*

Dans le cas particulier de trois mouvements dont les trajectoires ne sont pas situées dans un même plan OA, OB, OC (fig. 6), la vitesse du mouvement résultant est la diagonale du parallélépipède construit sur les trois vitesses Oa, Ob, Oc des mouvements composants. La règle de composition prend alors le nom de *règle du parallélépipède des vitesses.* On voit en $Oa\,b'\,c'\,O$ le polygone construit d'après la règle ordinaire. Il suffit d'achever la construction du parallélépipède indiqué pour démontrer la règle du parallélépipède.

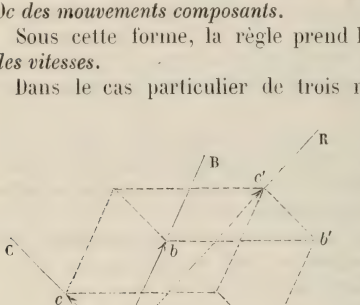


Fig. 6.

35. **Décomposition d'un mouvement rectiligne et uniforme.** — 1° Cas le plus simple. — Le problème de la décomposition d'un mouvement unique, rectiligne et uniforme en deux mouvements se présente, par exemple, dans la question suivante :

Un mobile M *se déplace par rapport à un système* A *qui se meut lui-même dans un système* B. *On connaît le mouvement absolu de* M *dans* B *ainsi que celui de* A *dans* B : *on demande de déterminer le mouvement relatif de* M *dans le système* A. Ce serait le cas de deux bateaux M et A se déplaçant l'un et l'autre, d'un mouvement rectiligne et uniforme, avec des vitesses connues, par rapport aux rives d'un lac B. On connaît donc les deux mouvements absolus de M et de A par rapport à B : il s'agirait de déterminer le mouvement relatif de M par rapport à A ; ce mouvement relatif serait

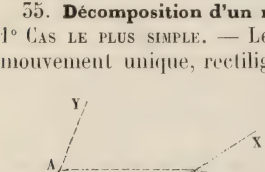


Fig. 7.

le *mouvement apparent* du bateau M pour les passagers du bateau A.

Soit MX (fig. 7) la direction du mouvement connu de M dans le système B et soit MR sa vitesse; par le point M menons une parallèle MY à la direction du mouvement connu du système A dans le système B et soit MA sa vitesse. Si l'on achève le parallélogramme ayant MR pour diagonale et MA pour côté, le deuxième côté MB de ce parallélogramme représentera évidemment la direction MV et la vitesse du mouvement inconnu de M dans le système B.

Remarque. — Au lieu d'appliquer ici la règle du parallélogramme en sens inverse, on pourrait appliquer la règle de la somme géométrique. On voit, en effet, que si, à la suite de la vitesse MR, *on porte une ligne* RB *égale, parallèle et de sens contraire à la vitesse composante connue*, l'autre vitesse sera donnée par la ligne MB, c'est-à-dire par la *somme géométrique* des deux lignes qui représentent la vitesse résultante et l'*inverse* de la vitesse composante connue.

2° Cas général. — *Étant donné un mouvement uniforme suivant la droite* AM, *on peut le décomposer en un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes.* Les vitesses composantes seront données dans chaque cas en appliquant en sens inverse l'une des règles précédentes. La règle du parallélépipède est celle qu'on applique le plus souvent, en choisissant trois directions rectangulaires. Soit v la vitesse du mouvement suivant AM, soient α, β, γ les angles de la direction du mouvement avec trois axes de coordonnées rectangulaires (fig. 8). Les vitesses composantes sont les trois côtés du parallélépipède construit sur AV, parallèlement aux axes. On a

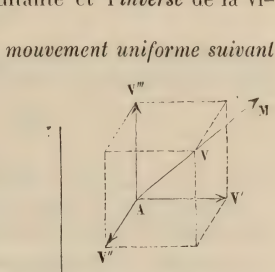


Fig. 8.

$$v' = v \cos \alpha, \qquad v'' = v \cos \beta \qquad \text{et} \qquad v''' = v \cos \gamma.$$

56. **Composition des mouvements rectilignes uniformément variés, sans vitesses initiales.** — 1° Cas de deux mouvements. — *Lorsqu'un point matériel est animé de deux mouvements simultanés rectilignes, uniformément variés, sans vitesses initiales, son mouvement résultant est rectiligne et uniformément varié; l'accélération de ce mouvement est la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations des mouvements composants.*

2° Composition des vitesses. — *La vitesse acquise au bout d'un temps quelconque par le point matériel est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses acquises au bout du même temps dans les mouvements composants.*

En effet, soient OX, OY les directions des deux mouvements composants; construisons un parallélogramme sur les longueurs γ et γ' qui représentent les accélérations : la diagonale de ce parallélogramme représente la direction du mouvement résultant et son accélération Γ (fig. 9). Au bout de 2 secondes les vitesses acquises dans les mouvements composants sont 2γ et $2\gamma'$; si nous construisons un nouveau parallélogramme sur ces deux longueurs, il a son sommet O′ sur la direction de la diagonale du précédent, et l'on a

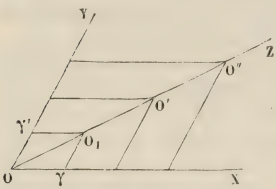


Fig. 9.

$$O'O = 2OO_1 = 2\Gamma;$$

donc cette diagonale représente la vitesse acquise au bout de 2 secondes dans le mouvement résultant; de même au bout de 3 secondes et au bout du temps t.

3° Cas d'un nombre quelconque de mouvements. — *Le mouvement résultant est toujours rectiligne et uniformément varié. Son accélération s'obtient en appliquant aux accélérations des mouvements composants la règle du parallélépipède des forces ou celle du polygone.*

La vitesse acquise au bout du temps t *dans le mouvement résultant s'obtiendra en appliquant les mêmes règles aux vitesses acquises au bout du temps* t *dans les mouvements composants.*

37. **Composition de deux mouvements rectilignes, l'un uniforme et l'autre uniformément accéléré, sans vitesse initiale.** — *Le mouvement résultant est un mouvement varié et curviligne. La trajectoire est une parabole qui est tangente à la direction du mouvement composant uniforme et a pour diamètre la direction du mouvement accéléré.*

Soient O la position initiale du point matériel, OY la direction du mouvement uniforme de vitesse V_0, faisant un angle θ avec OX, direction du mouvement uniformément accéléré, dont l'accélération est γ. D'après les règles précédentes, la position du mobile au temps t s'obtiendra en construisant sur les directions des deux mouvements un parallélogramme, ayant pour côtés les espaces parcourus pendant le temps t dans chacun des mouvements :

$OA = \frac{1}{2}\gamma t^2$ et $OB = V_0 t$ (fig. 10). Le mobile est à l'extrémité de la diagonale OM.

En donnant au temps t différentes valeurs successives et construisant les parallélogrammes correspondants, on obtiendra autant de positions distinctes du point matériel. On pourra donc construire sa trajectoire par points.

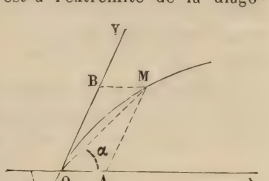


Fig. 10.

Il suffit d'en avoir un seul pour démontrer qu'elle est *curviligne*. En effet, si la trajectoire était rectiligne, l'angle α que fait la diagonale avec l'axe OX serait constant et indépendant du temps; or il est facile de prouver le contraire. En effet, dans le triangle OMA on a

$$\frac{\sin \alpha}{\sin OMA} = \frac{MA \text{ ou } V_0 t}{OA \text{ ou } \frac{1}{2}\gamma t^2};$$

or $OMA = (\theta - \alpha)$, donc

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} = \frac{2 V_0}{\gamma t}.$$

De cette équation on déduit

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2 V_0 \sin \theta}{2 V_0 \cos \theta + \gamma t}.$$

On voit que l'angle α diminue quand le temps croît; par conséquent, la trajectoire s'infléchit vers l'axe OX.

Équation de la trajectoire. — Au lieu de construire la trajectoire par points, il est plus commode d'en déterminer l'équation. La méthode la plus simple consiste à rapporter les points de la courbe aux directions des deux mouvements, c'est-à-dire à choisir OX et OY comme axes de coordonnées. L'x et l'y d'un point quelconque M de la courbe sont alors précisément les côtés OA et AM du parallélogramme précédent. On a donc les deux équations

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad \text{et} \qquad y = V_0 t,$$

et, en éliminant t entre ces deux équations, on obtient la relation

$$y^2 = \frac{2 V_0^2}{\gamma} x.$$

Cette relation est, par définition, l'équation de la courbe rapportée aux systèmes d'axes OX, OY. Elle représente une *parabole*, qui est tangente à la droite OY, c'est-à-dire à la direction du mouvement uniforme et qui a pour diamètre la droite OX, c'est-à-dire la direction du mouvement uniformément accéléré.

Remarque. — Le mouvement des projectiles dans le vide est un cas particulier de ce problème général.

38. **Composition de deux mouvements rectilignes, uniformément variés, avec vitesses initiales.** — On démontre que *le mouvement résultant est varié et curviligne : la trajectoire est une parabole.*

La trajectoire ne peut être rectiligne que dans le cas particulier où les vitesses initiales v_0 et v_0' et les accélérations γ et γ' satisfont à l'équation de condition

$$\gamma v_0' - v_0 \gamma' = 0.$$

C'est précisément ce qui avait lieu dans le cas précédent, où l'on avait $v_0' = 0$ avec $\gamma' = 0$.

Réciproques. — *La décomposition d'un mouvement rectiligne uniformément varié quelconque est possible dans tous les cas. Elle se fait en appliquant les réciproques des règles relatives à la composition.*

39. **Accélération dans un mouvement varié curviligne.** — Nous avons vu que la vitesse moyenne et la vitesse à l'instant t, dans un mouvement varié curviligne, se définissent et se calculent comme dans un mouvement varié rectiligne. Il n'en est pas de même de l'accélération. On ne peut définir l'accélération dans ce cas, et en calculer l'expression, qu'en appliquant les notions de vitesse résultante et de vitesses composantes.

1° *Définitions.* — Soient M (fig. 11) la position du mobile sur sa tra-

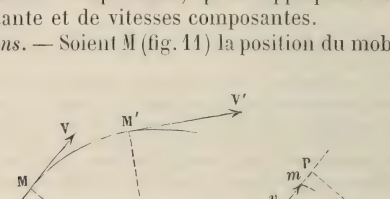


Fig. 11.

jectoire au temps t et M' sa position au temps $(t + \Delta t)$; soient v et v' les vitesses à ces deux instants. Par un point quelconque O de l'espace, menons les droites Om et Om' respectivement parallèles et égales aux vitesses v et v' et joignons mm'. D'après la règle de la composition des vitesses, on peut considérer la vitesse en M' comme la résultante des deux vitesses v et mm' : donc mm' représente en grandeur et en direction *la variation de vitesse pendant*

l'intervalle de temps Δt. En faisant le quotient $\frac{mm'}{\Delta t}$, on a *l'accélération moyenne pendant l'intervalle* Δt, à savoir : $\gamma_m = \frac{mm'}{\Delta t}$.

En faisant tendre Δt vers zéro, la limite de ce rapport donne *l'accélération à l'instant* t *du mouvement curviligne*

$$\gamma = \lim. \left(\frac{mm'}{\Delta t}\right).$$

La direction limite de mm' est la direction de γ. Elle est comprise dans la *position limite* du plan déterminé par les tangentes à la courbe aux points infiniment voisins M et M'.

Remarques. — I. On sait que ce plan limite est ce qu'on appelle le *plan osculateur* de la courbe au point M.

II. Rappelons aussi que si l'on prend le rapport $\frac{\text{angle } \alpha}{\text{arc MM}'} \left(= \frac{\alpha}{\Delta s}\right)$ de l'angle des deux tangentes à la courbe en M et M', et qu'on fasse tendre M' vers M, ce rapport tend vers une limite, qu'on appelle *courbure de la courbe au point* M. On désigne cette limite par le quotient $\frac{1}{\rho}$ et l'on a

$$\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\rho}.$$

Le coefficient ρ s'appelle le *rayon de courbure* en M. C'est le rayon d'un cercle (*cercle osculateur*) qui serait tangent en M à la courbe et serait compris dans le plan osculateur.

2° *Calcul des deux composantes de l'accélération à l'instant* t. — Prolongeons Om et abaissons la perpendiculaire m'P. D'après la règle de la composition des vitesses, l'accroissement de vitesse $m'm$ peut être considéré comme la résultante des deux vitesses, l'une mP, dirigée suivant la tangente en M à la trajectoire, et l'autre Pm', dirigée suivant la normale. Par suite, lim. $\left(\frac{mm'}{\Delta t}\right)$, ou γ, peut être considéré comme la résultante des deux limites suivantes :

$$\lim. \left(\frac{m\text{P}}{\Delta t}\right) \quad \text{et} \quad \lim. \left(\frac{m'\text{P}}{\Delta t}\right).$$

Autrement dit, ces deux limites représentent, l'une la *composante tangentielle* de l'accélération à l'instant t et l'autre sa *composante normale*.

Accélération tangentielle. — Soit $S = f(t)$ l'équation du mouvement. S représente l'espace parcouru, compté sur la courbe. On sait que la vitesse à l'instant t est donnée par l'équation $V = f'(t)$.

Dans le triangle infiniment petit Om'P, la perpendiculaire m'P tend à se confondre avec l'arc décrit du point O comme centre avec Om' pour rayon ; donc

la ligne mP tend vers la valeur limite ($Om' - Om$) ou $v' - v$ ou Δv. On a donc

$$\left(\lim. \frac{m\mathrm{P}}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

Or $\lim. \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire $f''(t)$. En appelant T la composante tangentielle de l'accélération, on aura donc

$$\mathrm{T} = f''(t).$$

Telle est l'expression de la composante tangentielle de l'accélération à l'instant t : c'est ce qu'on appelle ordinairement l'*accélération tangentielle* à l'instant t.

Accélération centripète. — De même, soit α l'angle des deux vitesses v et v' ; d'une part, m'P tend vers la valeur de l'arc $v'\alpha$; et comme v' tend vers la valeur v lorsque Δt tend vers zéro, on peut dire que m'P tend vers $v\alpha$: donc

$$\lim. \left(\frac{m\mathrm{P}}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{v\alpha}{\Delta t}\right) = v \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right).$$

Or nous savons que $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\varrho}$, en appelant ϱ le *rayon* de courbure en m. On peut donc écrire

$$\varrho \lim. \alpha = \lim. \Delta s, \quad \text{d'où} \quad \lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (ou } v) = \varrho \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right).$$

Par conséquent $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{\varrho}$ et $v \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{\varrho}$.

Soit N cette composante normale de l'accélération, on a donc $\mathrm{N} = \frac{v^2}{\varrho}$: c'est ce qu'on appelle ordinairement l'*accélération centripète à l'instant* t. Enfin, posons $\omega = \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$. On a en résumé :

$\mathrm{T} = f''(t)$, c'est l'accélération tangentielle à l'instant t.

$\mathrm{N} = \frac{v^2}{\varrho}$, c'est l'accélération centripète.

$\omega = \frac{v}{\varrho}$, c'est la vitesse angulaire à l'instant t.

40. **Mouvement circulaire uniforme.** — On peut déduire de ce calcul général les éléments du mouvement curviligne dans un cas particulier très intéressant, celui du mouvement circulaire uniforme.

Les équations précédentes se simplifient. On a successivement

[1] $$\mathrm{S} = f(t) = \mathrm{A}t,$$

A étant une constante : *l'espace parcouru est donc proportionnel au temps.*

[2] $$\mathrm{V} = f'(t) = \mathrm{A},$$

la vitesse est donc constante.

[3] $$\mathrm{T} = f'(t) = 0,$$

l'accélération tangentielle est donc nulle : cela signifie que l'accélération à l'instant t est *constamment normale à la trajectoire*, c'est-à-dire qu'elle se réduit à l'accélération centripète.

$$[4] \qquad N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{V^2}{R},$$

l'accélération centripète est donc constante. R est le rayon de la circonférence décrite, et il est identique en chaque point au rayon de courbure.

Enfin, on a

$$[5] \qquad \omega = \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{\rho} = \frac{V}{R},$$

la vitesse angulaire est donc constante. V étant ici l'arc parcouru dans l'unité de temps, et R le rayon de cet arc, le quotient $\frac{V}{R}$ représente l'angle au centre correspondant ω. Cela explique le nom de *vitesse angulaire* donné à lim. $\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$.

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE

NOTIONS DE STATIQUE

41. Forces. — Nous avons déjà vu qu'on appelle *force* toute cause capable de produire le mouvement et de le modifier. L'action des muscles chez les animaux, la pesanteur, les attractions et les répulsions magnétiques ou électriques sont des forces. Nous ignorons en quoi consistent les forces, mais la notion nous en est donnée nettement par la sensation de l'effort. Cette notion de force implique trois éléments qui la caractérisent, à savoir le *point d'application* de la force, sa *direction* et son *intensité*.

Les forces peuvent n'agir sur les corps que pendant un temps très court, comme cela a lieu dans les chocs, dans l'explosion de la poudre, ou bien elles agissent pendant toute la durée du mouvement. On dit dans le premier cas qu'elles sont *instantanées*, et dans le second, qu'elles sont *continues;* mais on entend

par là qu'il y a non pas deux espèces de forces, mais seulement deux modes d'action des forces.

42. **Équilibre. — Statique.** — Plusieurs forces étant appliquées à un même corps, il peut arriver qu'elles se neutralisent mutuellement et que l'état de repos ou de mouvement du corps ne soit pas modifié. On dit alors que *le corps est en équilibre* et que les forces appliquées au corps *se font équilibre.*

On appelle *Statique* la partie de la mécanique qui traite des forces considérées à l'état d'équilibre et qui détermine les conditions de cet équilibre.

43. **Mesure des forces. — Dynamomètre.** — On dit que deux forces sont *égales*, quand, appliquées en sens contraire à un même point matériel, elles se font équilibre. On dit qu'une force est *double, triple* d'une autre, lorsqu'elle fait équilibre à deux, trois forces égales à celle-ci, et appliquées simultanément en sens contraire au même point matériel.

L'état d'équilibre fournit le moyen de *comparer* l'intensité d'une force à l'intensité d'une autre force, prise comme unité, c'est-à-dire de *mesurer* les forces. L'unité ordinairement adoptée, d'après le système métrique, est le *kilogramme. Théoriquement*, c'est la force avec laquelle une masse d'eau pure, à la température de 4°, du volume de 1 litre, est sollicitée par la pesanteur. *Pratiquement*, c'est la force avec laquelle la pesanteur sollicite une masse en platine, construite de manière à réaliser le kilogramme théorique, et conservée aux Archives sous le nom de *kilogramme-étalon.*

La comparaison des forces avec l'unité se fait au moyen d'instruments spéciaux appelés *dynamomètres.* Ils se composent tous essentiellement d'un ressort, dont l'élasticité peut faire équilibre à des forces variables. En appliquant successivement au ressort des poids connus, et en notant les flexions correspondantes, on graduera l'instrument en kilogrammes. Une force inconnue quelconque appliquée ensuite au ressort et produisant *la même flexion* qu'un poids de n kilogrammes vaudra elle-même, par définition, n kilogrammes.

Nous décrirons quelques dynamomètres usuels dans le chapitre des Instruments de mesure.

Remarque. — Si la force conserve toujours la même intensité de n kilogrammes, on dit que c'est une *force constante;* si son intensité augmente ou diminue avec le temps, on dit que c'est une *force variable en grandeur;* si elle change de direction en même temps que d'intensité, on dit qu'elle est *variable en grandeur et en direction.*

44. **Représentation des forces.** — Une force est complètement déterminée lorsqu'on connaît son point d'application, sa direction et son intensité. On peut représenter ces divers éléments d'une force, comme on a représenté, en cinématique, les vitesses et les accélérations. On mène par son point d'application, dans le sens de sa direction, une ligne droite indéfinie; puis sur cette ligne, à partir du point d'application, et dans le sens où agit la force, on porte une unité de longueur arbitraire, le centimètre par exemple, autant de fois que la force donnée contient l'unité de force. On a ainsi une ligne droite qui représente complètement la force. Pour distinguer les forces entre elles, on les désigne par les lettres P, Q, R..., qu'on place sur leurs directions respectives à l'extrémité de la longueur qui en représente l'intensité (fig. 12).

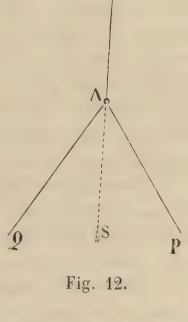


Fig. 12.

Remarque. — Ce procédé de figuration graphique permet d'appliquer à l'étude des forces les mêmes méthodes géométriques qu'à l'étude des mouvements. La statique est donc, comme la cinématique, une sorte de géométrie, qui joint à l'idée d'espace, non seulement l'idée de temps, mais aussi l'idée nouvelle de force. Étant donnés ces notions fondamentales et les principes d'observation qu'elles comportent, la statique procède géométriquement, comme la cinématique, et arrive de déductions en déductions à l'établissement des conditions d'équilibre d'un système de forces quelconques appliquées à un système de points matériels.

45. **Composition et décomposition des forces.** — Le premier problème qui se présente en statique est celui de la *composition* et de la *décomposition* des forces. La solution de ce problème est indispensable à connaître pour résoudre toutes les questions d'équilibre.

Résultante et composantes. — Lorsque plusieurs forces P, Q, R..., appliquées à un même point matériel A (fig. 12), se font équilibre, *il est évident que* l'une quelconque d'entre elles, R par exemple, peut, à elle seule, annuler l'action de toutes les autres. Une force S, égale et opposée à R, produirait donc à elle seule le même effet que le système des forces P et Q. Toute force qui peut ainsi produire le même effet que plusieurs forces simultanées se nomme leur *résultante*, et les autres forces, par rapport à la résultante, en sont les *composantes*. La force S est la résultante des forces P et Q, et celles-ci en sont les composantes.

Le problème de la composition des forces consiste à trouver la résultante d'un système de forces quelconques. Le problème inverse de la décomposition des forces consiste à trouver un système de forces qui produise le même effet qu'une force unique donnée. On suppose toujours ces forces appliquées soit à un point matériel unique, soit à un système de points matériels séparés par des intervalles invariables, et constituant des *corps solides* absolument *rigides*, c'est-à-dire incompressibles et indéformables. Nous traiterons d'abord le cas des *forces concourantes*, puis celui des *forces parallèles*, qui se déduit aisément du premier.

46. **Composition des forces concourantes.** — 1° *Définitions et principes.* — On appelle *forces concourantes* celles dont les directions se rencontrent en un même point où l'on peut les supposer toutes appliquées. Par exemple, lorsque plusieurs hommes, pour sonner une cloche, tirent des cordeaux fixés à un même nœud sur la corde de cette cloche, les efforts de ces hommes sont des forces concourantes.

La solution du problème général et la détermination de la résultante, dans chaque cas particulier, se déduisent des lemmes ou principes suivants :

I. *Deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite rigide* (de longueur invariable) *et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre.*

On admet ce principe comme évident.

II. *Une force* F *étant appliquée en un point* A, *on peut l'appliquer en tout autre point* B *de sa direction, pourvu que ce nouveau point d'application soit lié invariablement au premier* (fig. 13).

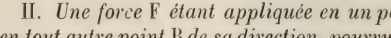


Fig. 13.

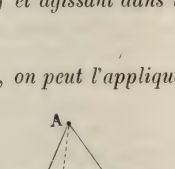


Fig. 14.

III. Réciproquement, *si une force* F *agissant sur un point libre* A *peut être transportée en un point* B *lié invariablement au point* A, *le second point est sur la direction de la force.*

Ce principe et sa réciproque se déduisent du premier principe.

IV. *Lorsque deux forces* P *et* Q (fig. 14) *agissent simultanément sur un point matériel* A, *leur résultante* R *est nécessairement comprise dans le plan des deux forces et à l'intérieur de l'angle formé par leurs directions.*

Ce principe est une conséquence de celui de la composition des mouvements : le mouvement que produira la résultante étant le mouvement résultant des mouvements que produirait chacune des composantes, la trajectoire du mouvement résultant (supposé rectiligne) ou l'élément de trajectoire du mouvement résultant (supposé curviligne) est dans le plan des trajectoires ou des éléments de trajectoire des mouvements composants, d'après la règle du parallélogramme des vitesses.

2° Théorème général. — *Lorsque plusieurs forces concourent en un même point matériel et qu'elles ne se font pas équilibre, il existe toujours une force unique ou* résultante *par laquelle on peut les remplacer.*

I. *Cas de deux forces. — Parallélogramme des forces.* — Soient d'abord deux forces concourantes F et F′ (fig. 15), et O leur point d'application. Ces deux droites qui se coupent déterminent un plan que nous prenons pour plan de la figure 15. On déduit des principes qui précèdent la règle du *parallélogramme des forces* qui détermine la résultante de deux forces, comme la règle du parallélogramme des vitesses détermine la vitesse résultante de deux mouvements.

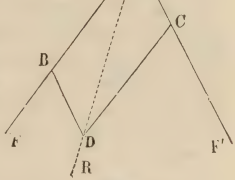


Fig. 15.

La résultante de deux forces concourantes est représentée, en direction et en grandeur, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

Ainsi la résultante R des forces F et F′ est dirigée suivant la diagonale OD et contient l'unité de force autant de fois que cette diagonale contient elle-même l'unité linéaire qui a été portée sur OB et OC pour représenter les forces F et F′.

II. *Cas de plusieurs forces. — Polygone des forces.* — La règle précédente est susceptible d'un autre énoncé, comme dans le cas des mouvements. On voit en effet que la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces est la *somme géométrique* des deux lignes qui représentent ces forces. On peut donc dire aussi que *la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la somme géométrique des lignes qui représentent ces forces.*

Sous cette forme l'énoncé est général et s'applique au cas d'un nombre quelconque des forces. En effet, soient les forces F, F′, F″, F‴ sollicitant le point matériel O et représentées, en grandeur et en direction, par les droites OA, OB, OC, OD, non situées

dans un même plan (fig. 16) : si l'on applique la règle du parallélogramme aux deux premières forces, on obtient une résultante partielle OB_1 ; si l'on compose OB_1 avec la force suivante, on obtient la deuxième résultante partielle OC_1 ; enfin, en composant OC_1 avec la dernière force OD, on a OR, qui est évidemment la résultante totale. Or la droite OR est, par définition, la somme géométrique des droites OA, OB, OC, OD : on l'eût donc obtenue directement en appliquant la règle de la somme géométrique.

On voit aussi que la ligne OR n'est pas autre chose que *le dernier côté d'un polygone construit en menant par le point* O, *à la suite les unes des autres, des lignes parallèles et égales aux forces concourantes.* C'est pourquoi l'on appelle aussi *règle du polygone des forces* cette règle de composition.

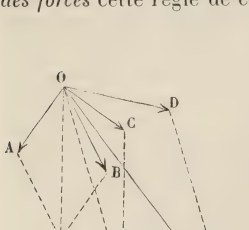


Fig. 16.

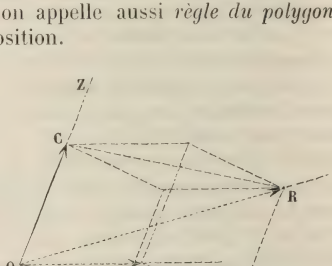


Fig. 17.

III. *Parallélépipède des forces.* — Dans le cas particulier où le système des forces concourantes se réduit à trois forces OA, OB, OC (fig. 17) formant un trièdre quelconque, la règle de composition se simplifie. Il suffit d'appliquer soit la règle du polygone, soit celle de la somme géométrique, pour voir que la résultante OR est la diagonale d'un parallélépipède construit sur les trois lignes OA, OB, OC. De là cette autre règle, dite *règle du parallélépipède*, qui s'applique au cas particulier de trois forces :

La résultante d'un système de trois forces concourantes est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélépipède construit sur ces trois forces.

IV. *Décomposition d'une force unique en plusieurs forces concourantes.* — Inversement, une force unique étant donnée, on peut la décomposer en deux ou plusieurs forces concourantes qui produisent le même effet. Ces composantes de la force unique sont

déterminées dans chaque cas en appliquant l'une des réciproques des règles de composition.

1° Cas de deux forces. — *Une force unique* R (fig. 15) *peut être décomposée en deux autres* F *et* F′, *appliquées au même point que la première et dirigées suivant des droites données.* Il suffit pour cela de construire sur ces droites un parallélogramme dont la force donnée soit la diagonale; les longueurs des côtés représentent les composantes cherchées.

2° Cas de trois forces. — *Une force* R (fig. 17) *peut être décomposée d'une infinité de manières, suivant trois directions* OA, OB, OC, *formant un angle trièdre quelconque.*

3° Cas de plusieurs forces. — *Étant donnée une force* R (fig. 16), *on peut la décomposer suivant un nombre quelconque de forces concourantes.* Il suffit d'appliquer en sens inverse la règle du polygone.

47. **Composition et décomposition des forces parallèles.** — 1° *Lorsque deux forces parallèles sont appliquées à un même point, elles ont une résultante égale à leur somme si elles sont de même sens, et à leur différence si elles sont de sens contraires.* Par exemple, si deux hommes tirent un fardeau par le même point et suivant des directions parallèles, avec des efforts respectifs de 20 kilogr. et 15 kilogr., l'effort résultant est 35 kilogr. ou 5 kilogr., suivant qu'ils tirent dans le même sens ou en sens contraires.

Lorsque les forces parallèles sont appliquées, non pas au même point d'un solide rigide, mais suivant la même direction, la règle de composition est la même, parce qu'on peut transporter fictivement les points d'application réels de ces forces en un même point quelconque de leur direction sur le corps rigide.

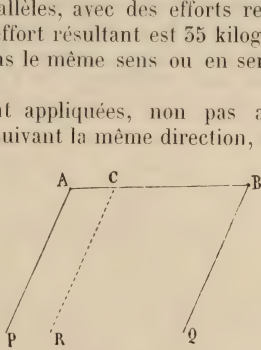


Fig. 18.

2° *Lorsque deux forces parallèles et de même sens sont appliquées aux points* A *et* B *d'un solide rigide* (fig. 18), *leur résultante* R *est égale à leur somme, leur est parallèle et partage la droite* AB *en deux segments inversement proportionnels aux intensités des forces* P *et* Q.

On a $R = P + Q$ et $\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$, C étant le point d'application de R. Par exemple, si P est deux, trois fois plus grande que Q, la distance AC est deux, trois fois plus petite que CB. Par suite, lorsque les forces P et Q sont égales, la direction de leur résultante partage la ligne AB en deux parties égales.

3° Réciproquement, *une force unique* R, *appliquée en* C, *peut être remplacée par le système de deux forces parallèles et de même sens,* P *et* Q, *dont la somme est égale à* R; *si les points* A, B, C *sont en ligne droite, ces nouvelles forces sont en raison inverse des longueurs* AC *et* CB.

4° *Cas d'un nombre quelconque de forces de même sens. — Centre des forces parallèles.* — On cherche, d'après la règle précédente, la résultante de deux de ces forces, puis celle de cette résultante partielle et d'une troisième force, et ainsi de suite jusqu'à la dernière. Cela mène toujours à une résultante totale unique, qui est *une force égale à la somme des composantes, de même sens, et appliquée en un point qu'on appelle centre des forces parallèles.*

La position du centre des forces parallèles se détermine analytiquement, à l'aide du théorème des moments, que nous verrons plus bas. Il résulte de la règle de composition que la position de ce point est invariable, quelles que soient la direction et la grandeur des composantes, pourvu qu'elles restent parallèles entre elles et dans les mêmes rapports de grandeur.

5° *Cas d'un nombre quelconque de forces, de sens opposés. — Couple.* — Quand on a des forces parallèles en nombre quelconque agissant indifféremment dans les deux sens, on pourra composer les forces de chaque groupe en une seule force, et l'on n'aura plus que deux forces parallèles P et Q de sens opposés, appliquées en des points différents A et B (fig. 19).

Dans le cas où *les deux forces sont inégales*, elles ont une résul-

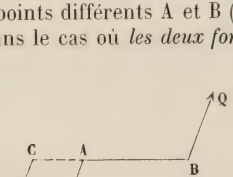


Fig. 19.

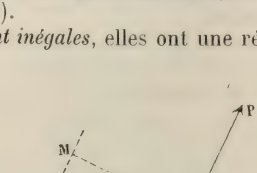


Fig. 20.

tante R *égale à leur différence* (P — Q), *parallèle à chacune d'elles et de même sens que la plus grande, appliquée en un point* C *extérieur à la ligne* AB *et dont les distances aux points* A *et* B *sont inversement proportionnelles aux forces* P *et* Q.

On a donc, en général, $R = P - Q$ et $\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$. La force R est donc parfaitement déterminée dans ses trois éléments, intensité, direction et point d'application.

Dans le cas particulier où $P = Q$, il n'y a pas de résultante. Ce système de forces s'appelle un *couple :* il tend à faire tourner le solide auquel il est appliqué dans le plan du couple, jusqu'à ce que la droite AB soit amenée dans la direction des forces. Un couple est déterminé par son *moment :* c'est le produit de l'intensité de la force P par la plus courte distance MN de deux forces. MN est le *bras de levier* du couple (fig. 20).

48. **Théorème général des moments.** — 1° *Définitions.* Nous définirons les *moments par rapport à un point* et *les moments par rapport à un axe.*

I. Le *moment d'une force par rapport à un point* est une quantité algébrique qui est égale, en valeur absolue, au *produit de la force par la distance du point à cette force.*

Si F est la force, O le point et OA la distance, la valeur absolue du moment est $F \times OA$. Pour une autre force telle que F′, la valeur absolue sera $F' \times OA'$ (fig. 21). Les distances OA, OA′ sont appelées *bras de levier* des forces F et F′. Le moment est positif ou négatif, suivant que la force tend à entraîner son bras de levier dans un sens ou dans l'autre. Si, par exemple, on donne le signe + au moment de F, celui de F′ aura nécessairement le signe —.

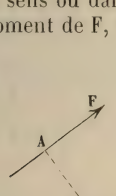


Fig. 21.

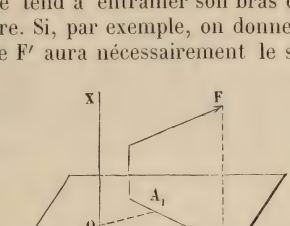


Fig. 22.

II. Le *moment d'une force par rapport à un axe* est le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe par rapport au point où l'axe perce le plan.

Soient XX′ l'axe et F la force (fig. 22) ; si O est le pied de l'axe sur un plan perpendiculaire et F_1 la projection de la force, en abaissant la perpendiculaire OA_1 on a pour le moment de la force $F_1 \times OA_1$. Comme c'est, en somme, un moment par rapport à un point, la convention des signes s'y applique. Le moment est positif ou négatif, suivant que la projection F_1 tend à entraîner son bras de levier OA_1 dans un sens ou dans l'autre.

2° Théorème général. — *Le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Le théorème s'applique également bien à un système de forces concourantes et à un système de forces parallèles, soit qu'on prenne leurs moments par rapport à un point de leur plan, soit qu'on les prenne par rapport à un axe quelconque.

3° *Conséquence.* — La somme algébrique des moments d'un système de forces est évidemment *nulle*, soit *quand la résultante passe par le centre des moments*, soit *quand elle rencontre l'axe des moments;* car, dans l'un ou l'autre cas, le bras de levier de la force ou celui de sa projection se réduit à zéro.

49. **Expression analytique des moments d'une force par rapport à trois axes rectangulaires.** — Soit F une force appliquée en un point A dont la position est déterminée par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. Soient x, y, z les coordonnées du point A; α, β, γ les angles de la force avec Ox, Oy, Oz (fig. 23).

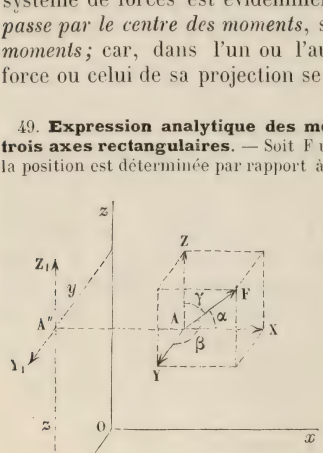


Fig. 23.

Le moment de F par rapport à l'axe Ox est égal à la somme des moments des trois composantes de F, suivant les trois axes de coordonnées. En construisant le parallélépipède des forces, on a ces trois composantes en grandeur et en direction. Ce sont :

Suivant l'axe des x ... $X = F \cos \alpha$,
— y ... $Y = F \cos \beta$,
— z ... $Z = F \cos \gamma$.

Le moment de X par rapport à Ox est nul, puisque la projection de X sur le plan des yz se réduit au point A″.

Le moment de Y est égal, en valeur absolue, à Yz, car Y se projette en vraie grandeur sur le plan des yz qui lui est parallèle, et la distance de sa projection au pied O de l'axe est précisément égale au z du point O. Quant au signe de ce moment, on le détermine en appliquant ici une convention générale. *Supposons un observateur placé le long de l'axe et les pieds en O : si la projection de la force sur le plan tend à entraîner son bras de levier dans le sens direct, c'est-à-dire de la gauche vers la droite de l'observateur, le moment sera positif; il sera négatif dans le cas contraire.* Ici le moment de Y est donc $-zY$. De même le moment de Z sera $+yZ$. Donc enfin le moment L de la force F par rapport à l'axe des x sera

$$L = yZ - zY.$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera que

le moment par rapport à l'axe des y . . . $M = zX - xZ$;
— — z . . . $N = xY - yX$.

Remarque. — Ces deux derniers moments peuvent se déduire du premier par un procédé mnémonique simple, qui consiste à substituer aux lettres y et Z les autres lettres similaires dans l'ordre suivant : x, y, z et X, Y, Z.

50. **Composition des couples.** — 1° *Définitions.* — Nous avons défini plus haut (47, 5°) le *couple*, son *bras de levier* et son *moment*.

Axe d'un couple. — On appelle *direction de l'axe d'un couple* la perpendiculaire à son plan élevée par le milieu de son bras de levier. En prenant sur cette direction une longueur proportionnelle au moment du couple et en l'armant d'une flèche à l'une de ses extrémités, pour indiquer le sens de la rotation, on pourra représenter un couple en grandeur et en direction par une seule droite, tout comme une simple force. C'est cette droite, caractéristique du couple, qui s'appelle l'*axe du couple*. Ainsi la droite OA (fig. 24) représente, en grandeur et en direction, un couple situé dans le plan perpendiculaire en O à OA et ayant un moment exprimé par le même nombre que la longueur OA.

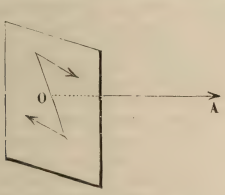


Fig. 24.

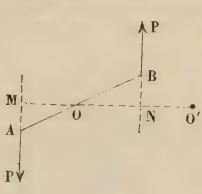


Fig. 25.

Remarque. — *Le moment d'un couple est égal à la somme algébrique des moments des forces du couple pris chacun par rapport à la direction de son axe.* — L'axe se projette au point O pour le couple (P. MN) qui est dans le plan de la figure 25. Si l'on prend la somme algébrique des moments des forces du couple par rapport à son axe, on a

$$P.OM + P.ON = P.MN;$$

cette somme est précisément égale au *moment du couple*. De même, si l'on prend cette somme algébrique des moments des forces par rapport à un axe parallèle à l'axe O et se projetant en O', on a pour l'un $+ P.O'M$ et pour l'autre $- P.O'N$ et pour la somme algébrique :

$$P.(O'M - O'N) = P.MN.$$

2° *Translation et transformation des couples.* — *Un couple quelconque peut toujours être remplacé par un autre de même sens, situé dans le même plan ou dans un plan parallèle, et ayant même moment.*

3° *Composition d'un nombre quelconque de couples.* — *On transporte leurs axes parallèlement à eux-mêmes, de manière qu'ils aient tous leur origine en un même point du corps, et l'on compose ces axes comme un système de forces concourantes : la résultante ainsi obtenue sera, en grandeur et en direction, l'axe du couple résultant.*

En effet, d'après ce qui précède sur la translation des couples et sur leur représentation graphique par leurs axes, toutes les règles de composition relatives aux forces concourantes peuvent s'appliquer aux axes des couples. Un nombre quelconque de couples appliqués à un corps solide aura donc toujours un *couple résultant*. L'axe de ce couple résultant sera déterminé dans chaque cas, soit par la règle du parallélogramme, soit par la règle du parallélépipède, soit par celle du polygone.

51. **Équilibre des forces appliquées à un point matériel.** — Lorsqu'on applique la règle du polygone pour composer un système de forces concourantes en un point matériel, et que le polygone des forces *se ferme tout seul*, il en résulte que le côté OR (fig. 16) qui représente la résultante se réduit à zéro : donc la résultante est nulle. On dit alors que *le point matériel est en équilibre sous l'influence du système des forces concourantes.*

Conditions d'équilibre. — Il faut et il suffit que la somme des projections des forces sur trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun des axes. Cela fait trois équations d'équilibre.

En effet, soit R la résultante d'un système quelconque de forces appliquées au point matériel O. On peut décomposer R en trois composantes X, Y, Z, suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. — Évaluons R en fonction de ses composantes (fig. 26).

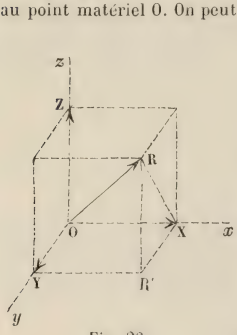


Fig. 26.

Le triangle RR'X est rectangle en R' et donne

$$RX^2 = RR'^2 + R'X^2,$$

c'est-à-dire

$$RX^2 = Z^2 + Y^2;$$

de même, le triangle OXR est rectangle en X et donne

$$R^2 = OX^2 + RX^2$$

ou, en remplaçant OX et RX par leurs valeurs,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Pour que $R = 0$, on doit avoir séparément

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Or X, étant la projection de la résultante sur l'axe des X, est égal à la somme des projections des composantes sur le même axe (théorème des projections). De même pour Y; de même pour Z.

52. **Équilibre des couples appliqués à un corps solide libre.** — Dans le cas général d'un système de couples *situés dans des plans quelconques,* les conditions d'équilibre sont les mêmes que celles d'un système de forces concourantes en un point matériel. Il faut exprimer que l'*axe résultant* ou que le moment résultant est nul, et par conséquent que les projections de cet axe sur trois axes de coordonnées rectangulaires sont nulles pour chacun des axes. Donc, *pour qu'un système de couples quelconques se fasse équilibre sur un corps solide, il faut et il suffit que la somme des projections des axes des couples sur trois axes de coordonnées rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.*

Comme la longueur de l'axe d'un couple représente la grandeur du moment du couple, et comme le moment du couple est égal lui-même à la somme algébrique des moments des forces du couple pris par rapport à une droite parallèle à l'axe du couple, on peut énoncer autrement la condition d'équilibre des couples :

Pour qu'un système de couples quelconques se fasse équilibre sur un corps solide, il faut et il suffit que la somme des moments des forces des couples pris par rapport à trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.

Cela donne trois conditions d'équilibre, quel que soit l'énoncé qu'on adopte, comme dans le cas d'un système de forces concourantes.

Cas particulier. — Les couples sont dans un même plan ou dans des plans parallèles. — Les trois conditions se réduisent à une seule. En effet, tous les axes de ces couples étant parallèles, leur composition revient à celle de forces parallèles mais de sens différents, appliquées en un même point : l'*axe résultant* est égal à la somme algébrique des *axes composants*. Il n'y a donc, pour ces couples, qu'une seule condition d'équilibre : *la somme algébrique des moments de leurs forces, par rapport à une droite perpendiculaire à leur plan, doit être nulle.*

53. **Équilibre des forces appliquées à un corps solide libre**. — 1° *Réduction des forces. — Un système de forces quelconques sollicitant un corps solide libre peut toujours se réduire soit à deux forces distinctes, dont l'une passe par un point arbitraire du corps, soit à une force et à un couple, l'une des composantes du couple passant par le même point que la force.*

Soit un corps solide auquel sont appliquées n forces quelconques F, F′, F″... Par l'un quelconque des points d'application A, appliquons au corps deux forces (F'_1, F'_2) égales et contraires à l'une des forces F′ du système : nous ne changeons rien à l'état mécanique du corps (fig. 27). Faisons de même pour chacune des forces du système. Nous finirons par remplacer celui-ci par un autre système, composé : 1° de n forces concourantes appliquées au point A, égales et parallèles respectivement aux forces du système ; 2° de $(n-1)$ couples, formés chacun comme il a été dit.

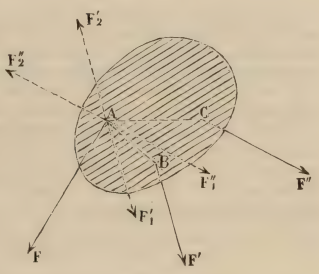


Fig. 27.

D'une part les forces concourantes ont une résultante R, et d'autre part les couples, dont les plans ont tous un point commun, ont également un couple résultant unique (S, S′) dont le plan contient aussi le point A.

On voit qu'on pourrait encore réduire ces trois forces à deux, en composant les deux forces R et S′ qui concourent au point A (fig. 28).

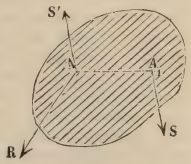


Fig. 28.

2° *Conditions générales d'équilibre.* — Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un corps solide libre soit en équilibre sous l'influence d'un système de forces sont :

I. *Que la somme des projections des forces sur trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun d'eux.*

II. *Que la somme des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.*

En effet, il faut et il suffit que la résultante R et le couple (S, S′) soient nuls séparément, car dans aucun cas une force unique ne peut faire équilibre à un couple (fig. 28).

Or, pour que R soit nul, il faut et il suffit que ses trois composantes X, Y, Z, suivant Ox, Oy et Oz soient nulles, et chacune de ces composantes est égale à la somme des projections des forces suivant l'axe correspondant. De là les trois premières conditions d'équilibre :

$$[1] \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Pour que le couple (S, S') soit nul, il faut et il suffit que ses couples composants dans les trois plans coordonnés aient des moments nuls séparément. Or le couple composant qui est situé dans le plan des yz a précisément pour moment (à un facteur constant près) la somme des moments des forces du système par rapport à l'axe des x (50, 1°); de même pour les deux autres couples composants. De là les trois autres équations d'équilibre :

$$[2] \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$

en posant

$$L = \Sigma\,(yZ - zY), \qquad M = \Sigma\,(zX - xZ), \qquad N = \Sigma\,(xY - yX).$$

3° *Condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une résultante unique.* — Elle est

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Cette équation exprime que la résultante R et le couple (S, S') sont dans un même plan. Dans ce cas, ils ne sont plus distincts et les trois forces (R, S, S') se composent nécessairement en une résultante unique.

En effet, X représente la projection sur l'axe des x de la résultante R; on a donc $X = R \cos \alpha$; on a de même $Y = R \cos \beta$ et $Z = R \cos \gamma$. De plus L est la somme des moments des forces par rapport à l'axe des x; c'est donc aussi la projection sur l'axe des x de l'axe du couple résultant (S, S'). En appelant A cet axe et α', β', γ' ses angles avec les axes coordonnés, on aura $L = A \cos \alpha'$; de même $M = A \cos \beta'$ et $N = A \cos \gamma'$. En substituant ces valeurs dans l'équation de condition, elle devient

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0.$$

Elle exprime que l'axe du couple est perpendiculaire à la force, et, par suite, que celle-ci est parallèle au plan du couple : comme elle a un point commun avec lui, elle est dans le même plan.

54 **Équilibre des forces appliquées à un corps solide gêné.** — On dit qu'un corps solide est *gêné*, lorsqu'il est assujetti à certaines liaisons qui l'empêchent de se déplacer librement dans toutes les directions.

1° *Corps mobile autour d'un point fixe.* — Dans le cas où l'un des points du corps est fixé invariablement, le corps est nécessairement assujetti à tourner autour de ce point. On peut alors opérer la réduction du système de forces en prenant le point fixe pour origine de la résultante unique R : celle-ci se trouve alors détruite par la résistance du point. Reste le couple (S, S') qui seul peut déplacer le corps. La condition d'équilibre nécessaire et suffisante est donc que *le moment* ou *l'axe du couple résultant soit nul*, ou bien que *la somme des moments* des forces, pris par rapport à trois axes rectangulaires passant par le point fixe, *soit nulle pour chacun de ces axes.* — Cette condition s'exprime algébriquement par les trois équations [2] :

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

2° *Corps mobile autour d'un axe fixe.* — Dans le cas où deux points du corps sont fixés invariablement, le corps ne peut prendre d'autre mouvemen qu'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe, déterminé par ces deux points.

Prenons pour origine des coordonnées un point O de l'axe fixe, et pour axe des z cet axe fixe lui-même. On voit, d'une part, que la force résultante R sera détruite par la résistance de l'axe; d'autre part que, sur les trois couples

composants du couple résultant (S, S'), ceux qui sont dans le plan des yz et dans le plan des xz sont également annulés par la résistance de l'axe, car on peut amener le bras du levier de chacun d'eux à coïncider avec l'axe des z. — Reste le couple situé dans le plan des xy, et dont l'axe est parallèle à Oz. La condition d'équilibre nécessaire et suffisante est donc que *le moment* ou *l'axe de ce couple soit nul*, c'est-à-dire que *la somme des moments des forces, pris par rapport à l'axe fixe, soit nulle*. Cette condition s'exprime par la seule équation $N = 0$.

55. **Équilibre d'un système quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide libre.** — En appliquant à ce cas la méthode générale de réduction des forces, on arrive à une force résultante R, égale à la somme *algébrique* des forces, et à un couple résultant (S, S') dont les forces et, par suite, le plan sont parallèles à la force R. L'axe du couple résultant est donc, dans ce cas, perpendiculaire à la force R. Que deviennent les équations d'équilibre?

Supposons qu'on ait pris l'un des axes de coordonnées, par exemple l'axe des x, parallèle à la direction des forces. La force R est donc parallèle à l'axe des x; l'axe du couple (S, S') lui est perpendiculaire, on peut le supposer placé dans le plan des yz. Il faut exprimer que les projections de ces deux droites sur les axes sont nulles pour chacun d'eux.

Or les projections Y et Z de R sur Oy et Oz sont *identiquement nulles* puisque R est perpendiculaire à Ox et Oy. Reste donc l'équation

$$[1] \qquad X = 0,$$

avec cette particularité que $X = R$.

De même la projection L de l'axe du couple sur Ox est *identiquement nulle*, puisque cet axe est perpendiculaire à Ox. Reste donc à écrire que les deux autres projections sont nulles, ce qui donne les équations

$$[2] \qquad M = 0 \quad \text{et} \quad N = 0,$$

avec cette particularité que la première de ces deux équations se réduit à $\Sigma\,(zX_1) = 0$ et la deuxième à $\Sigma\,(yX_1) = 0$, puisque les termes en xZ_1 et yZ_1 sont *identiquement nuls*.

56. **Détermination du centre des forces parallèles.** — Dans le cas d'un système quelconque de forces parallèles, si les équations précédentes ne sont pas satisfaites, c'est qu'il y a une résultante unique R, appliquée en un point A (fig. 29), qui est le *centre des forces parallèles*. Nous pouvons déduire du cas d'équilibre un moyen simple de déterminer ce point.

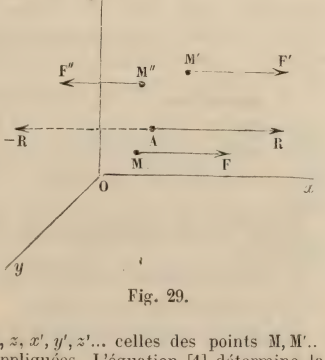


Fig. 29.

Reprenons le système d'axes précédent, l'axe des x étant parallèle aux forces F, F', F''.... Si nous appliquons en A une force (— R) égale et opposée à R, le système F, F', F''... (— R) formera un système de forces parallèles *en équilibre*, auquel nous pourrons appliquer les équations précédentes. Soient a, b, c les coordonnées inconnues du point A et x, y, z, x', y', z'... celles des points M, M'.. auxquels les forces parallèles sont appliquées. L'équation [1] détermine la

grandeur de la résultante R, puisqu'elle donne

$$X - R = 0,$$

d'où

$$R = X = F + F' + F'' + \ldots = \Sigma (F).$$

Les équations [2] donnent successivement

$$\Sigma (zX_1) - cR = 0, \qquad \text{d'où} \qquad cR = Fz + F'z' + \ldots = \Sigma (Fz),$$
$$\Sigma (yX_1) - bR = 0, \qquad \text{d'où} \qquad bR = Fy + F'y' + \ldots = \Sigma (Fy).$$

Ces trois équations déterminent déjà deux des coordonnées inconnues. Pour obtenir la troisième, il suffit de remarquer que le centre des forces parallèles ne change pas de position quand on vient à changer la direction de toutes les forces sans modifier leurs rapports de grandeur. Or, si nous amenons toutes les forces à être parallèles à l'axe des z, nous pourrons écrire de même

$$\Sigma (xZ_1) - aR = 0, \qquad \text{d'où} \qquad aR = xF + x'F' + \ldots = \Sigma (Fx).$$

En résumé, les coordonnées du centre des forces parallèles sont fournies par les trois équations :

$$aR = \Sigma (Fx),$$
$$bR = \Sigma (Fy),$$
$$cR = \Sigma (Fz),$$

R étant déterminé par l'équation

$$R = \Sigma (F).$$

CHAPITRE V

MÉCANIQUE

NOTIONS DE DYNAMIQUE

57. **Définitions**. — La *Dynamique* (de δύναμις, puissance, force) est la partie de la mécanique où l'on étudie les forces, non plus *à l'état statique*, c'est-à-dire se faisant équilibre sur un système matériel, mais *à l'état dynamique*, c'est-à-dire produisant le mouvement.

L'objet de la Dynamique est de résoudre le double problème suivant :

1° Étant données les forces qui agissent sur un corps, déterminer le mouvement de ce corps.

2° Étant donné le mouvement d'un corps, déterminer les forces qui agissent actuellement sur ce corps.

C'est là l'objet même de la Mécanique. On peut dire que la Dynamique est la partie essentielle de cette science, tandis que la Cinématique et la Statique n'en sont que les préliminaires.

La dynamique est fondée sur trois principes généraux, sortes de *postulats*, qu'on a tirés, par induction, de l'observation de certains faits naturels, et qu'on vérifie par l'expérience dans leurs conséquences pratiques. Ce sont :

1° Le *principe de l'inertie*, dont la première idée est due à Képler;

2° Le *principe du mouvement relatif*, énoncé par Galilée ;

3° Le *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, découvert par Newton.

Nous avons dû énoncer plus haut les deux premiers; mais nous les répéterons ici, en y ajoutant leurs conséquences immédiates.

58. **Principe de l'inertie.** — 1° *Un corps ne peut rien changer de lui-même à son état de repos ni à son état de mouvement.*

2° *Si un corps libre n'est sollicité par aucune force, ce corps est en repos, ou bien il est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.*

La première proposition est le seul énoncé qu'on donne souvent du principe de l'inertie. Cependant elle ne constitue pas, à proprement parler, un principe; elle ne fait qu'exprimer, sous une forme nouvelle, l'existence de cette propriété essentielle de la matière que nous avons déjà définie sous le nom d'*inertie*. La seconde partie de l'énoncé, au contraire, est un véritable postulat. Rien ne pouvait faire deviner *à priori* que le *mouvement naturel* des corps est le mouvement rectiligne et uniforme; on a même longtemps cru que c'était le mouvement circulaire et uniforme. Mais le seul fait d'une bille, lancée sur un sol horizontal bien uni, qui se meut sensiblement en ligne droite avec une vitesse, non pas constante, mais lentement décroissante (à cause du frottement), a suffi pour indiquer ce principe; on l'a ensuite généralisé par induction, puis vérifié expérimentalement dans ses conséquences.

Corollaire. — *Si un corps libre est sollicité par une force quelconque, il prend un mouvement varié; et si, à un instant* t, *on vient à supprimer la force, le corps continue à se mouvoir d'un mouvement rectiligne et uniforme : la vitesse de ce dernier mouvement est précisément la vitesse à l'instant* t *du mouvement varié, et sa direction est celle de la tangente à la trajectoire au point où le corps se trouvait à l'instant* t.

On peut aisément démontrer l'identité de ces deux vitesses. En effet, soit Δs

l'espace que parcourrait le mobile sur sa trajectoire pendant le temps Δt, à partir de l'instant t; on sait que la vitesse à l'instant t est par définition $V_t = \lim. \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ quand Δt tend vers zéro. Considérons un intervalle de temps Δt assez court pour que le mouvement soit constamment accéléré, et soient V_1 et V_2 les vitesses des mouvements uniformes qui succéderaient au mouvement varié si l'on supprimait la force successivement aux instants t et $t + \Delta t$. Il est évident que l'espace Δs, réellement parcouru par le mobile, est plus grand que l'espace $V_1 \Delta t$ qui serait parcouru dans le premier mouvement uniforme, mais plus petit que l'espace $V_2 \Delta t$. On peut donc écrire la double inégalité

$$V_1 \Delta t < \Delta s < V_2 \Delta t, \qquad \text{d'où} \qquad V_1 < \frac{\Delta s}{\Delta t} < V_2.$$

Ces inégalités seront toujours vraies, quelque petit que soit Δt; et comme à la limite $V_2 = V_1$, il s'ensuit que $V_1 = \lim. \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = V_t$.

59. **Principe du mouvement relatif.** — *Dans un système de points matériels animés d'un mouvement de translation, toute force qui agit sur l'un d'eux lui imprime le même déplacement par rapport aux autres que si le système était en repos.*

Nous avons déjà énoncé ce principe en Cinématique, sous une forme un peu différente, qui dispensait de faire intervenir la cause du mouvement. Il n'est indiqué nettement par l'observation que dans le cas où le mouvement de translation est rectiligne et uniforme, comme celui d'un bateau descendant paisiblement une rivière; mais on est amené, par les conséquences qu'on en déduit, à l'admettre aussi dans le cas général d'un système animé d'un mouvement de translation quelconque.

60. **Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.** — *Lorsque, dans un système de points matériels, un point* A (fig. 30) *exerce sur un autre point* B *une action représentée par une force* F *dirigée suivant la droite qui joint les deux points, inversement le point* B *exerce sur le point* A *une réaction, représentée par une force* (— F), *dirigée suivant la même droite et égale, mais opposée, à la force* F.

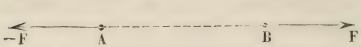


Fig. 30.

Les deux premiers principes permettent de résoudre, pour un point matériel unique, les deux problèmes de la dynamique ; le troisième principe permet d'en généraliser les solutions et de les étendre au cas d'un système matériel. On arrive à ces solutions par l'intermédiaire des théorèmes fondamentaux suivants.

61. **Théorèmes fondamentaux.** — Théorème I. — *Lorsqu'une force constante (en intensité et en direction) agit sur un point maté-*

riel, soit en repos, soit animé d'une vitesse initiale dirigée parallèlement à la force, elle lui imprime un mouvement rectiligne et uniformément varié.

Remarque. — Un système de points matériels ou, autrement dit, un corps libre, prendrait, dans les mêmes conditions, un mouvement de translation uniformément accéléré.

Réciproquement, *lorsqu'une force communique à un point matériel libre un mouvement rectiligne et uniformément varié, cette force est constante en grandeur et en direction.*

Théorème II. — *Si une force variable, qui produit un mouvement varié, devient constante à partir d'un instant* t, *le mouvement devient uniformément varié à partir du même instant, et l'accélération du mouvement final est égale à l'accélération à l'instant* t *du mouvement initial.*

Théorème III. — *Lorsque deux ou plusieurs forces constantes agissent simultanément et dans la même direction sur un même point matériel* (partant du repos), *l'accélération du mouvement qu'elles lui impriment est la somme algébrique des accélérations que chacune d'elles produirait séparément.*

Soient γ, γ', γ''... les accélérations que produirait chacune des forces F, F′, F″..., si, au lieu d'agir simultanément sur le mobile, elles agissaient séparément. L'accélération Γ du mouvement uniformément accéléré et rectiligne qui résulte de leur action simultanée est donnée par l'égalité

$$\Gamma = \gamma \pm \gamma' \pm \gamma'' \pm \ldots.$$

Le signe $\pm$ indique que les forces peuvent agir dans le même sens ou en sens contraire, suivant la même direction.

Dans le cas particulier où le système des forces se compose de n forces égales à F, agissant dans le même sens et suivant la même direction, on a pour l'accélération totale Γ

$$\Gamma = n\gamma.$$

Théorème IV. — *Lorsque deux ou plusieurs forces constantes agissent successivement sur un même corps, elles lui impriment des accélérations proportionnelles à leurs intensités respectives.*

Soient F, F′, F″... les intensités des forces et $\gamma, \gamma', \gamma''$... les accélérations des mouvements correspondants, on a

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{F}{F'} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\gamma''} = \frac{F}{F''}.$$

Des égalités ci-dessus on tire

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \ldots.$$

Ces dernières égalités permettent d'énoncer le même théorème sous la forme suivante : *Deux forces* F, F′ *sont proportionnelles aux accélérations* γ, γ' *qu'elles impriment à un même point matériel.*

62. **Masse**. — Ces théorèmes généraux, fondements de la Dynamique, servent à préciser la notion de *masse*, que nous avions déjà introduite à propos de l'inertie de la matière; ils fournissent aussi le moyen d'exprimer par une formule et de mesurer par l'expérience cette qualité essentielle des corps.

1° *Notion de la masse.* — Puisqu'une même force, étant appliquée à des corps différents, leur imprime en général des mouvements d'accélération différents, c'est que les différents corps n'opposent pas la *même résistance* au mouvement; ils ne sont pas *inertes* au même degré. C'est ce qu'on exprime en disant que deux corps, pris au hasard, n'ont *pas la même masse*. Ils seraient, au contraire, *de même masse*, si, étant soumis successivement à la même force, ils prenaient la même accélération.

La masse est une qualité inhérente à chaque corps, indépendante de son état de repos ou de mouvement, ainsi que de sa position par rapport aux autres corps de l'univers. La masse résulte de la *quantité de matière* que le corps renferme.

2° *Définition et formule.* — Puisque, d'autre part, plusieurs forces F, F′, F″..., étant successivement appliquées à un même corps, lui impriment des accélérations différentes γ, γ', γ''... qui sont exactement proportionnelles à ces forces, c'est que l'on peut écrire, à propos de ce corps, la suite des rapports égaux

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \ldots = \text{constante}$$

et que cette constante est caractéristique du corps, au point de vue de *sa résistance au mouvement*, ou de *son degré d'inertie*. Il est donc naturel de prendre ce rapport pour définir cette qualité du corps; et c'est à lui qu'on a donné le nom de *masse*, qui équivaut à celui de *coefficient de résistance au mouvement*. On a donc, par définition, en appelant M la masse d'un corps quelconque,

$$M = \frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \ldots.$$

3° *Mesure de la masse.* — Cette formule permet de mesurer facilement la masse d'un corps quelconque. En effet, parmi les forces constantes qu'on peut faire agir sur un corps, la pesanteur est celle dont on dispose le mieux. Elle entre spontanément en action, dès qu'on enlève au corps toute espèce d'appui : elle le fait tomber vers le sol d'un mouvement qui est rectiligne et uniformément accéléré, ainsi que nous le démontrerons plus loin. L'accélération de ce mouvement est la même pour tous les corps, dans un même lieu : on la désigne par g et on l'appelle *accélération* ou *intensité* de la pesanteur. Quant à la résultante des actions de la pesanteur sur le corps, elle est égale à la *pression* que le corps, avant la chute, exerçait sur son appui : c'est ce qu'on appelle le *poids* P du corps; nous apprendrons plus tard à le mesurer dans chaque cas. On aura donc, en appliquant la formule générale au cas particulier de la pesanteur,

$$M = \frac{P}{g}.$$

La *masse* d'un corps est donc égale au quotient de son *poids* par l'accélération de la pesanteur. Le nombre exprimant cette mesure dépend d'ailleurs des unités choisies pour le poids et pour l'accélération.

63. **Expression d'une force quelconque.** — Inversement, étant donnée la masse d'un mobile, exprimée de la manière précédente et mesurée expérimentalement, cette masse peut servir à exprimer et à mesurer une force quelconque.

Soit d'abord une force F, constante en intensité et en direction; on la fait agir sur le corps de masse M, et l'on mesure l'accélération γ du mouvement uniformément accéléré qui en résulte. On a alors

$$\frac{F}{\gamma} = M, \quad \text{d'où l'on tire l'expression de la force} \quad F = M\gamma.$$

Cette relation est générale. On l'étend aisément au cas d'une *force variable*, et, au moyen des projections, à celui d'une *trajectoire quelconque*. On a toujours, dans tous les cas, $F = M\gamma$, pourvu que F et γ représentent les valeurs de la force et de l'accélération à l'instant t, et l'on peut énoncer ce théorème général :

Dans tout mouvement, la force est égale, à chaque instant, au produit de la masse du mobile par son accélération.

64. **Quantité de mouvement. — Impulsion.** — Soit une force F imprimant à un mobile de masse M un mouvement d'accéléra-

tion γ. On a, entre ces trois grandeurs, la relation fondamentale

$$[1] \qquad F = M\gamma.$$

En multipliant par le temps t les deux membres de cette égalité, on a

$$Ft = M\gamma t.$$

Le produit γt est égal à la vitesse V acquise par le mobile au bout du temps t. On peut donc écrire

$$[2] \qquad Ft = MV.$$

Le produit MV a reçu le nom particulier de *quantité de mouvement :* il représente, en effet, la vitesse *accumulée*, en quelque sorte, par le mobile *pendant l'intervalle de temps* t.

Le produit Ft a également reçu un nom particulier, celui d'*impulsion*. En adoptant ces deux dénominations, on peut énoncer l'équation [2] comme il suit :

L'impulsion d'une force au bout du temps t *est égale à la quantité de mouvement acquise par le mobile.*

La quantité de mouvement intervient, en mécanique, toutes les fois que la force produit *un choc sans pénétration,* et toutes les fois que le résultat qu'on a en vue dépend du temps pendant lequel l'action s'est exercée, plutôt que de l'espace le long duquel elle s'est exercée. Sous la forme MV on a la *mesure de l'effet*, et sous la forme Ft on a la *mesure de la cause.*

65. **Proportionnalité des forces aux quantités de mouvement.** — On a vu que pour une force F agissant sur la masse M et lui imprimant une vitesse V au bout du temps t, on a l'égalité

$$Ft = MV.$$

Pour une autre force F′, agissant sur un autre mobile de masse M′, et lui imprimant au bout du même temps t une vitesse V′, on aurait de même

$$F't = M'V'.$$

En divisant membre à membre ces deux équations, on a

$$\frac{F}{F'} = \frac{MV}{M'V'}.$$

Il résulte de cette équation un moyen de comparer les forces entre elles, sans les appliquer à une même masse. On peut dire, en effet, que *deux forces quelconques sont entre elles comme les*

quantités de mouvement qu'elles impriment à deux masses différentes.

Conséquences. — 1° Les forces étant proportionnelles aux quantités de mouvement, il en résulte que, pour une même force, le produit MV est constant, c'est-à-dire que, la masse devenait 2, 3 fois plus grande, la vitesse serait 2, 3 fois plus petite. Ce résultat se déduit de la dernière égalité ci-dessus, en y faisant $F = F'$, ce qui donne $M'V' = MV$, ou $\frac{V'}{V} = \frac{M}{M'}$. Si l'on remplace V et V' par γt et $\gamma' t$, l'égalité devient $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{M}{M'}$; donc *les accélérations imprimées par une même force à deux masses inégales sont en raison inverse de ces masses.*

2° Si $V = V'$, on a $\frac{F}{F'} = \frac{M}{M'}$, c'est-à-dire que *deux forces sont entre elles comme les masses auxquelles elles impriment des vitesses égales dans le même temps.*

66. **Travail et force vive.** — Nous avons dit que, dans tous les cas où la force produit un choc sans pénétration, la *quantité de mouvement*, c'est-à-dire le produit MV, sert de mesure à l'effet, et l'impulsion, c'est-à-dire le produit Ft, sert de mesure à la cause. Ces deux quantités ne suffisent pas dans tous les cas où la force déplace son point d'application d'une manière sensible, par exemple lorsqu'un projectile pénètre dans un obstacle matériel ou animé, ou bien lorsqu'on élève un fardeau à une certaine hauteur, etc. On fait alors intervenir deux nouvelles quantités, qui jouent un rôle très important en mécanique : l'une s'appelle le *travail mécanique* et l'autre la *force vive*. Il existe entre elles une relation analogue à celle qui lie l'impulsion à la quantité de mouvement, mais infiniment plus importante dans la pratique. Nous la ferons connaître, après avoir défini ces deux quantités avec précision.

67. **Travail mécanique d'une force constante en grandeur et en direction.** — 1° *Cas où le point d'application se déplace dans la direction de la force.* — On appelle *travail de la force* (pour amener

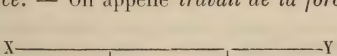


Fig. 31.

son point d'application de A en B) *le produit de l'espace* $AB = e$ (évalué en unités de longueur) *par l'intensité* F *de la force* (évaluée en unités de force). On a, en désignant par T le travail, $T = Fe$.

Si la force agit dans le sens du déplacement XY, on dit qu'elle est *mouvante* et l'on donne au travail le signe + ; si la force agit en sens contraire du chemin parcouru, on dit qu'elle est *résistante* et son travail est négatif : $T = -(Fe)$ (fig. 31).

2° *Cas d'un déplacement rectiligne qui n'est pas dans la direction de la force.* — Le travail est alors *le produit de la force par le déplacement et par le cosinus de l'angle* α *des deux droites :* $T = Fe \cos \alpha$. Le travail est positif ou négatif, suivant que $\cos \alpha$ est + ou —, c'est-à-dire suivant que α est un angle aigu ou obtus (fig. 32).

Dans le cas où α est un angle aigu, la projection de la force sur

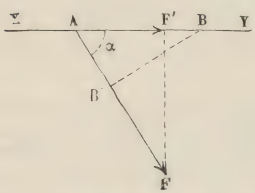


Fig. 32.

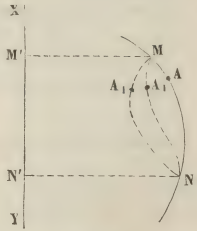


Fig. 33.

la direction du déplacement est dirigée dans le même sens que celui-ci : on peut dire que la projection de la force est mouvante; c'est le contraire dans le cas où α est obtus : la projection de la force est résistante.

Remarque. — On peut aussi considérer le produit $e \cos \alpha$ comme la projection AB′ du déplacement (fig. 32) sur la direction de la force et faire rentrer ce cas dans le cas précédent.

3° *Le point d'application de la force a un déplacement curviligne.* — Le travail est alors *le produit de la force par la projection de l'arc de trajectoire* MN *sur la direction constante* XY *de la force :* $T = F.M'N'$ (fig. 33).

Si l'on partage l'arc MN en une infinité d'arcs élémentaires, tels que MA, on peut substituer à chacun d'eux sa corde : alors le produit de la force par la projection de ce déplacement rectiligne suivant la corde est un travail qu'on appelle *travail élémentaire* de la force. Le travail total est la limite de la somme de ces travaux élémentaires, lorsque le nombre des arcs élémentaires tend vers l'infini.

Il en résulte que le travail d'une force constante en direction ne dépend nullement du chemin réellement parcouru par son

point d'application. En effet, que le déplacement ait lieu suivant l'arc MAN, ou suivant l'arc MA_1N, ou suivant toute autre courbe ayant les mêmes extrémités A et B (fig. 33), le produit $F \times M'N'$ est toujours le même.

4° *Travail de la résultante de plusieurs forces constantes concourantes. — Il est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.*

Cela résulte immédiatement des règles de composition d'un système de forces concourantes. En effet, si l'on projette la résultante R sur la direction du déplacement, ainsi que les composantes, on a

$$R \cos \lambda = F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + \ldots = \Sigma (F \cos \alpha),$$

en appelant λ, α, α' les angles de ces forces avec la direction du déplacement. En multipliant les deux membres de l'équation par le déplacement e du point d'application, on a

$$Re \cos \lambda = \Sigma (Fe \cos \alpha).$$

Or le premier membre est le travail T de la résultante, et chacun des termes du second membre est le travail $\mathcal{T}$ de l'une des forces composantes. On a donc

$$T = \Sigma (\mathcal{T}).$$

Remarque. — Le théorème est également vrai lorsque le déplacement du point d'application est curviligne.

68. **Travail d'une force variable en grandeur et en direction**. — La trajectoire est alors une courbe quelconque, et, en chaque point de cette courbe, la force prend une intensité et une direction différentes.

1° *Travail élémentaire.* — Soient MN la trajectoire, A la position du point d'application à l'instant t, et F la force, représentée par la longueur AF en grandeur et en direction (fig. 34). Soit A_1 un point infiniment voisin sur la courbe, soit Δe la corde AA_1, soit α l'angle de cette direction AA_1 avec la direction actuelle de la force : le produit $(F \times \Delta e \times \cos \alpha) = \Delta T$ est ce qu'on appelle le *travail élémentaire de la force variable, à l'instant* t. C'est une quantité qui tend vers zéro quand le point A_1 tend vers le point A.

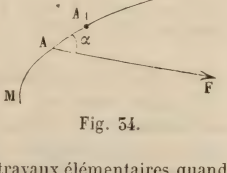


Fig. 34.

2° *Travail total.* — Le travail total, relatif à un déplacement AB, est la limite de la somme des travaux élémentaires quand le nombre des arcs élémentaires tend vers l'infini. On a donc

$$T = \Sigma (F . \Delta e . \cos \alpha) = \Sigma (\Delta T).$$

3° *Représentation graphique du travail d'une force variable.* — Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy (fig. 35). Portons sur Ox la longueur OA_1 égale (ou proportionnelle) à la corde AA_1 de la figure; au point A_1 élevons l'ordonnée A_1B_1 parallèle à Oy et égale (ou proportionnelle) à $F \cos \alpha$; le rectangle

$OA_1 B_1 B'_1$ a une aire égale à $OA_1 \times A_1 B_1$, c'est-à-dire $F.\Delta e \cos \alpha$: cette aire représente donc graphiquement le travail élémentaire. Chacun des travaux élémentaires successifs sera de même représenté par l'aire d'un rectangle tel que $A_1 A_2 B_2 B'_2$, etc.

Si l'on suppose que le nombre n des travaux élémentaires croisse sans limite, les points B'_1, B'_2, B'_3 se rapprocheront indéfiniment et formeront à la limite une courbe continue que l'on peut construire par points. La limite de la somme des travaux élémentaires sera donc représentée par la limite de la somme de ces aires, c'est-à-dire par l'aire S du trapèze mixtiligne formé : 1° par la portion OL de l'axe des x, égale à l'arc de trajectoire total développé; 2° par les ordonnées OB_1 et LL_1, égales respectivement aux projections sur les tangentes

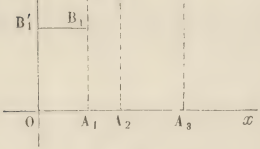


Fig. 35.

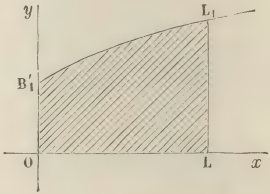


Fig. 36.

aux deux extrémités de l'arc des intensités correspondantes de la force; 3° par la courbe $B'_1 L_1$, lieu des points B_1, B_2 (fig. 36).

Ainsi l'évaluation du travail d'une force variable est ramenée à la mesure d'une aire, c'est-à-dire à ce qu'on appelle, en géométrie, une *quadrature*.

Il existe des procédés mathématiques qui permettent de trouver aisément des valeurs suffisamment approchées des aires ainsi définies et, par suite, des travaux qu'elles représentent. On peut citer en particulier celui de Thomas Simpson et celui de Poncelet.

4° *Le travail de la résultante de plusieurs forces variables est égal à la somme des travaux des composantes.* — C'est le théorème énoncé plus haut pour les forces constantes. On démontre qu'il est général. Cela revient à dire que l'aire totale est égale à la somme des aires partielles figuratives des travaux partiels.

69. **Force vive, puissance vive. — Moments d'inertie.** — 1° *Cas d'un point matériel.* — On appelle *force vive* d'un point matériel, *à l'instant* t, *le produit de la masse de ce point par le carré de la vitesse qu'il a acquise à cet instant.*

Si m est la masse du point, V sa vitesse à l'instant t, et si l'on désigne la force vive par W, on aura, par définition,

$$W = mV^2.$$

Ordinairement, c'est la moitié de ce produit qui entre dans les formules de la mécanique : c'est pourquoi l'on donne quel-

quefois au produit $\frac{1}{2} mV^2$ un nom particulier, celui de *puissance vive*.

2° *Cas d'un système.* — On appelle *force vive* d'un système de points matériels *la somme des forces vives des différents points qui composent le système.* Cette quantité est donc une somme de produits analogues à mV^2. On désigne cette somme par le symbole Σ, et l'on écrit

$$W = \Sigma (mV^2).$$

Il n'y a pas d'autre relation entre la somme des forces vives des points du système et la force vive de chaque point que celle qui résulte de la définition.

3° *Expression algébrique.* — La fonction $\Sigma (mV^2)$ qui exprime la force vive d'un système est plus ou moins compliquée, suivant les cas. On peut la représenter d'une manière fort simple dans le cas particulier où le système est un corps de figure invariable, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

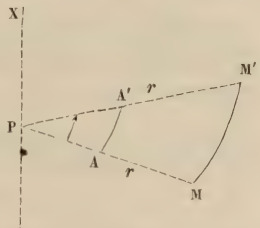


Fig. 37.

Soit OX l'axe de rotation, M un point du corps, situé à une distance $MP = r$ de l'axe (fig. 37). Si l'on appelle ω la vitesse à l'instant t d'un point A, situé à l'unité de distance, comme tous les points du corps décrivent dans le même temps des arcs de cercle, tels que AA' et MM', semblables et proportionnels à leurs rayons, la vitesse V du point M, à l'instant considéré, sera $V = r\omega$. Pour ce point M la force vive sera donc $mr^2\omega^2$; pour un autre point M', elle sera $m'r'^2\omega^2$, et ainsi de suite pour tous les autres. On aura donc pour la force vive du système à l'instant t,

$$\Sigma (mV^2) = \Sigma (mr^2\omega^2) = W.$$

Comme ω est le même pour tous les points, on pourra le faire sortir du signe Σ et le mettre en facteur commun. On aura donc

$$W = \omega^2 \Sigma mr^2.$$

La force vive du système se présente donc ici comme le produit de deux facteurs : ω^2 et Σmr^2. Le premier est le carré de la vitesse du point situé à l'unité de distance ; cette vitesse ω est un facteur caractéristique du mouvement de rotation : c'est la *vitesse angulaire* du corps à l'instant t. C'est un coefficient constant lorsque le mouvement de rotation est uniforme. Le deuxième facteur est indépendant de la vitesse angulaire et dépend uniquement de la position de l'axe de rotation. C'est un coefficient purement géométrique ; on l'appelle *moment d'inertie du corps* par rapport à l'axe considéré.

On peut le calculer aisément dans le cas d'un corps homogène ayant une figure géométrique. Nous aurons l'occasion de calculer un moment d'inertie à propos du pendule de Borda.

70. **Théorème du travail ou des forces vives.** — 1° *Cas d'un point matériel. — Le travail effectué par une force pour amener un point matériel d'une position à une autre sur sa trajectoire est égal à la variation de puissance vive qu'a subie le point matériel pendant ce déplacement.*

Soient m la masse du point matériel, M sa position initiale et V_0 sa vitesse initiale, N sa position finale et V sa vitesse finale (fig. 38). La variation de puissance vive est égale à la demi-variation de force vive $\frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} mV_0^2$.

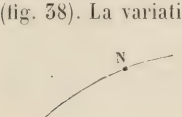


Fig. 38.

Fig. 39.

Si T est le travail accompli par la force, le théorème s'exprime par l'équation

$$T = \frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2).$$

Démontrons ce théorème dans le cas simple d'une force constante agissant dans la direction et dans le sens du déplacement (fig. 39). On sait qu'alors le mouvement du point matériel est uniformément accéléré. La vitesse en N est donnée par l'équation

$$[1] \qquad V = V_0 + \gamma\theta,$$

en appelant θ l'intervalle de temps qui s'écoule pendant le déplacement ; l'espace parcouru est donné par

$$[2] \qquad MN = V_0 \theta + \frac{1}{2} \gamma\theta^2.$$

Élevons au carré l'équation [1], il vient

$$V^2 = V_0^2 + \gamma^2 \theta^2 + 2 V_0 \gamma\theta,$$

d'où

$$(V^2 - V_0^2) = \gamma^2 \theta^2 + 2V_0 \gamma \theta = 2\gamma \left(V_0 \theta + \frac{1}{2} \gamma\theta^2\right).$$

Or la parenthèse est égale à MN. En remplaçant et en multipliant les deux membres par m, il vient

$$\frac{1}{2} m (V^2 - V_1^2) = m\gamma \times MN = F . MN = T. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Le théorème se démontre de même dans le cas d'une force constante inclinée sur la direction du déplacement, puis dans le cas d'un déplacement curviligne, dans le cas d'une force variable : il est donc général.

2° *Cas d'un système.* — Le théorème s'applique enfin au cas tout à fait général d'un système de points matériels se déplaçant d'une manière quelconque sous l'influence d'un système de forces quelconques.

La somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur les différents points d'un système matériel, pendant un intervalle de temps

déterminé, est égale à la demi-somme des variations de force vive de tous ces points.

Ce théorème s'exprime par l'équation suivante :

$$\Sigma\,(T) = \Sigma\left(\frac{mV^2 - mV_0^2}{2}\right),$$

où m représente la masse de l'un quelconque des points matériels, V et V_0 ses vitesses à la fin et au commencement du déplacement, et T le travail de la force qui a produit le déplacement. C'est ce qu'on appelle l'*équation générale des forces vives.*

71. **Transformation du travail en force vive et de la force vive en travail.** — Entre le travail mécanique et la force vive il n'y a pas seulement une relation numérique, exprimée par l'équation des forces vives; il existe entre ces deux quantités un rapport naturel de transformation réciproque. Dans un grand nombre de circonstances le travail mécanique se transforme en force vive, ou réciproquement ; nous allons en citer deux exemples.

1° *Projectile lancé horizontalement contre un obstacle.* — Supposons un projectile, par exemple un boulet en fonte, de poids P et de masse M $\left(\text{égale à } \frac{P}{g}\right)$, lancé horizontalement par un canon contre un obstacle matériel, par exemple un massif de terre ou de maçonnerie L'agent moteur, dans ce cas, est la détente d'une masse gazeuse élevée à une haute température : représentons par F son intensité moyenne pendant la durée de son action. La force F agit sur le boulet pendant le temps qu'il met pour aller du fond de l'âme à la bouche du canon : soit L le chemin parcouru, le travail dépensé par la force sera FL.

Le boulet sort du canon et commence à parcourir sa trajectoire extérieure avec une vitesse initiale V, qui est déterminée par l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}MV^2 = FL.$$

Le travail FL s'est donc transformé en la puissance vive initiale $\frac{1}{2}MV^2$ du boulet : il s'y retrouve tout entier.

Négligeons les actions retardatrices, telles que la résistance de l'air traversé et l'attraction de la pesanteur : le boulet arrive donc, avec cette même quantité de force vive, au contact de l'obstacle qu'il doit détruire. L'obstacle lui oppose une résistance qu'on pourrait évaluer en unités de forces : soit F′ sa valeur ; le boulet surmonte cette résistance et pénètre dans le massif jusqu'à ce que sa vitesse soit anéantie. Il s'arrête alors, à une profondeur L′ qui est déterminée par l'équation des forces vives. En effet, le travail résistant F′ L′, vaincu par le boulet, est lié à la force vive du boulet par l'équation

$$F'L' = \frac{1}{2}MV^2.$$

Dans ce cas la force vive s'est donc retransformée en travail. C'est ce travail qui constitue le dégât, l'effet destructeur causé par le projectile. Par conséquent la *puissance vive* $\left(\frac{1}{2}MV^2\right)$ mesure la *puissance de destruction* que le boulet emportait avec lui, au sortir du canon. On voit que cette puissance de

destruction est proportionnelle au carré de la vitesse et à la masse, ou au poids du projectile. — Cette loi a été depuis longtemps trouvée empiriquement par les artilleurs[1].

2° *Projectile lancé verticalement de bas en haut*, dans le vide. — Un projectile quelconque de poids P et de masse M $\left(\text{égale à } \frac{P}{g}\right)$ est lancé verticalement de bas en haut, dans le vide, avec une vitesse initiale V, qui lui a été communiquée par un procédé quelconque.

La masse M emporte avec elle une force vive initiale $\frac{1}{2}MV^2$. Bien qu'elle n'ait pas d'obstacle à détruire, elle se trouve pourtant, dès qu'elle s'élève, dans le même cas que le boulet de canon entrant dans un massif de terre. En effet, elle est immédiatement saisie par l'action retardatrice de la pesanteur, qui agit d'une manière continue et *travaille* pour épuiser sa vitesse initiale, comme un frein *travaille* pour épuiser la vitesse d'un train lancé sur la voie ferrée. A une élévation e du mobile correspond un travail résistant Pe de la pesanteur et une diminution de vitesse $(V - V')$ qui est donnée par l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}M(V^2 - V'^2) = Pe.$$

Il y a, dans ce cas, *transformation de la force vive du projectile en travail;* car le projectile ne peut s'élever qu'en triomphant de la résistance de la pesanteur et en dépensant, à son tour, un *travail moteur* égal à ce *travail résistant*. Aussi le mobile s'arrêtera-t-il nécessairement lorsque sa force vive initiale aura été entièrement transformée en travail. La hauteur h, où il sera parvenu alors, est encore déterminée par l'équation des forces vives. Car on doit avoir

$$\frac{1}{2}MV^2 = Ph.$$

Ce travail Ph représente soit *le travail résistant de la pesanteur*, soit *le travail moteur du mobile*. Il est égal à celui que l'agent moteur, quel qu'il soit, avait dépensé pour communiquer au projectile sa force vive initiale.

72. **Énergie actuelle. — Énergie potentielle. — Énergie totale.** — 1° *Énergie actuelle.* — On voit donc que le produit Ph, d'une part, c'est-à-dire le travail, et le produit $\frac{1}{2}MV^2$, d'autre part, c'est-à-dire la puissance vive, sont deux expressions équivalentes d'une même qualité des corps en mouvement, à savoir l'*aptitude à vaincre les obstacles* que possède un corps de masse M, animé d'une vitesse V. C'est cette aptitude qui est proprement appelée *énergie*. Elle peut être exprimée soit par le produit Ph, soit par le produit $\frac{1}{2}MV^2$, de même qu'elle peut se manifester tour à tour sous la forme de *travail* ou sous celle de *force vive*.

Pendant qu'elle se manifeste, sous l'une ou l'autre forme, on lui donne souvent un nom unique, celui d'*énergie actuelle*, qui signifie énergie *en acte*, ou *énergie de mouvement*. On dit encore, dans le même sens, *énergie dynamique*.

2° *Énergie potentielle.* — Quand l'énergie ne se manifeste sous aucune de ces deux formes mécaniques, elle n'en existe pas moins, *à l'état latent*, en quelque sorte, ou bien *en puissance*, comme on dit en philosophie.

Ainsi un corps pesant, une pierre par exemple, de poids P et de masse M $\left(\text{égale à } \frac{P}{g}\right)$, qui serait immobile sur un appui, à la hauteur h, n'est pas du

1. Jouffret, *Introduction à la théorie de l'énergie.*

tout dans les mêmes conditions, au point de vue de l'énergie, qu'une pierre de même poids qui serait immobile sur le sol. En effet, si nous supprimons l'appui, de manière à laisser tomber la première pierre, elle acquerra, par le seul fait de sa chute, une énergie actuelle qui ira en croissant, et qui aura atteint la valeur P*h* au moment où la pierre touche le sol. Par conséquent, dans sa position initiale, le corps pesant, tout immobile qu'il était, possédait, *à l'état latent* ou *en puissance*, l'énergie qui s'est ensuite manifestée dans sa chute. C'est à cette sorte d'énergie, énergie tranquille et comme emmagasinée dans le corps, qu'on a donné le nom d'*énergie potentielle* (ou *en puissance*), par opposition à l'énergie actuelle, ou bien d'*énergie de position*, par opposition à l'énergie de mouvement.

Par exemple, une masse d'eau de poids P, située à une hauteur *h*, constitue un approvisionnement d'énergie potentielle égal à P*h*. Cette énergie potentielle est égale à l'énergie actuelle (travail ou force vive) qu'il a fallu dépenser pour élever l'eau à la hauteur *h* et en remplir le réservoir.

De même, lorsqu'on remonte une montre, on dépense une certaine quantité d'énergie dynamique qui s'emmagasine dans le ressort sous la forme d'*énergie de position*, et qui se retransformera lentement en énergie dynamique, à mesure que le ressort mettra les rouages en mouvement.

3° *Énergie totale.* — La quantité d'énergie de position que possède le ressort de montre, à un moment donné, dépend de la quantité d'énergie dynamique qu'on y a emmagasinée en le remontant. Si l'on n'a donné que deux ou trois tours de clef, le ressort n'aura pas acquis toute l'énergie potentielle dont il est susceptible, et il ne pourra pas créer, par sa détente, assez d'énergie dynamique pour faire parcourir aux aiguilles leur course complète sur le cadran. Mais si l'on a donné au ressort son degré de tension maximum, il produira, en se détendant, toute l'énergie qu'il est capable d'emmagasiner d'abord sous la forme potentielle et puis de restituer sous la forme dynamique : c'est ce qu'on appelle l'*énergie totale* du ressort.

On voit que c'est l'*énergie qu'il est capable soit d'emmagasiner en passant de la limite extrême de détente à la limite extrême de tension, soit de restituer en repassant, au contraire, de l'état de tension maximum à celui de détente complète.*

Il en est de même dans le cas des corps pesants. Si, au lieu de porter la masse d'eau à une hauteur *h*, on l'élève à des hauteurs successivement croissantes, la pesanteur accomplira sur cette masse un travail de plus en plus grand et lui communiquera une énergie potentielle de plus en plus considérable. Pour donner à la pesanteur la plénitude de son action, et emmagasiner dans la masse son énergie totale, il faudrait la supposer élevée jusqu'à une altitude telle, que l'attraction terrestre devînt insensible.

Ce cas se réalise approximativement pour les astéroïdes que la terre rencontre dans sa révolution autour du soleil, qu'elle entraîne dans sa sphère d'attraction, et qui traversent son atmosphère sous le nom d'*étoiles filantes* ou de *bolides*. L'*énergie totale* d'un de ces bolides, c'est la quantité de force vive qu'il a acquise, depuis l'instant où il a été saisi par la pesanteur jusqu'à l'instant où il touche le sol.

En général, l'énergie totale d'un système matériel, c'est *la quantité maximum d'énergie* que, sous l'influence des forces auxquelles il est soumis, le système peut emmagasiner, sous la forme d'énergie potentielle, pour la restituer ensuite sous la forme d'énergie dynamique.

73. **Principe de la conservation de l'énergie.** — Nous avons vu que lorsqu'un corps pesant, de poids P et de masse M $\left(\text{égale à } \frac{P}{g}\right)$, tombe, dans le vide, d'une hauteur *h*, il acquiert une force vive $\frac{1}{2}MV^2$ déterminée par l'é-

quation

$$Ph = \frac{1}{2} mV^2;$$

mais, en même temps que son énergie dynamique s'accroît de $\frac{1}{2} mV^2$, son énergie potentielle diminue de la quantité équivalente Ph. Inversement, lorsqu'un corps pesant s'élève suivant la verticale, son énergie potentielle s'accroît, en même temps que son énergie dynamique diminue de la quantité équivalente. Il s'établit donc une compensation exacte entre ces deux sortes d'énergie, de manière que leur somme, qui est l'énergie totale du corps, reste invariable. C'est dans ce fait que consiste le principe de la conservation de l'énergie. Il ne s'applique pas seulement au cas de la pesanteur ; c'est le principe le plus général de la mécanique, et on peut l'énoncer de la manière suivante :

Dans un système matériel qui se meut sous l'influence de forces extérieures et intérieures quelconques, il se fait à chaque instant une compensation exacte entre la variation de l'énergie dynamique du système et celle de son énergie potentielle, en sorte que son énergie totale demeure invariable.

Tel est le principe de la conservation de l'énergie, qui est le fondement de la physique moderne, comme le principe de la conservation de la matière est le fondement de la chimie moderne. Nous avons dit que l'objet de la physique est *la matière en mouvement*. Or l'effet immédiat de la matière en mouvement, c'est l'*énergie ;* et c'est l'énergie qui produit, par ses transformations, non seulement le travail et la force vive, mais toutes les propriétés des corps, tous les agents physiques, le son, la chaleur, la lumière et les forces de toute nature. Nous pouvons donc dire que l'objet de la physique, c'est *l'énergie et ses transformations.*

74. **Unités métriques d'énergie.** — Le travail et la force vive étant deux formes différentes d'une même quantité, l'énergie, il est naturel de les évaluer au moyen de la même unité.

1° *Kilogrammètre.* — C'est le produit Ph, c'est-à-dire l'expression du travail qui a servi au choix de l'unité d'énergie. On a pris le travail correspondant à une force de 1 kilogramme qui déplacerait son point d'application de 1 mètre dans sa propre direction, et on l'a appelé *kilogrammètre.* Telle est l'unité vulgaire d'énergie, c'est-à-dire l'unité correspondant aux unités du système métrique.

Ainsi l'énergie de 1 kilogrammètre, c'est celle en vertu de laquelle une masse de poids égal à 1 kilogramme s'élèverait verticalement à la hauteur de 1 mètre. On peut dire aussi que c'est le *travail* effectué par la pesanteur soit pour anéantir une vitesse initiale définie par l'équation

$$1 = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}$$

$\left(\text{ici, } M = \frac{1}{g}\right)$, soit pour communiquer cette même vitesse à la même masse $\left(\text{égale à } \frac{1}{g}\right)$, tombant de la hauteur de 1 mètre, sans vitesse initiale.

Remarque. — La définition du kilogrammètre est complètement indépendante et du chemin parcouru par le point d'application de la masse soulevée, et du temps employé à la soulever. Cela résulte de la définition même du travail. On sait que le travail ne dépend absolument que de l'intensité de la force et du déplacement de son point d'application (parallèlement à la direction de la force), mais qu'il ne dépend nullement de la trajectoire parcourue par ce point d'application entre les deux points extrêmes de son déplacement, ni par conséquent du temps employé à la parcourir.

2° *Tonne-mètre.* — Dans le cas où l'on n'a affaire qu'à des quantités d'énergie considérables, comme cela a lieu dans les expériences et les calculs des artilleurs, on prend comme unité la *tonne-mètre*, qui vaut *mille kilogrammètres*.

3° *Cheval-vapeur.* — Enfin, on se sert dans l'industrie d'une autre unité, dérivée de la première, et qu'on appelle le *cheval-vapeur*. Comme elle est destinée à évaluer le travail utile que peut fournir une machine, le temps, qui est une denrée fort chère, doit nécessairement entrer dans sa définition. On appelle *cheval-vapeur le travail de 75 kilogrammètres effectué dans 1 seconde.*

Cette unité industrielle de travail s'appelle aussi *unité de puissance*. Elle a été choisie par Watt. Elle équivaut sensiblement à la puissance de 3 chevaux de trait, ou à celle de 7 hommes de peine.

75. **Transmission du travail dans les machines.** — Nous terminerons ces notions de dynamique en faisant une application du théorème des forces vives à la transmission du travail mécanique dans les machines. Nous aurons souvent l'occasion de vérifier, dans l'usage des instruments et appareils de physique, les principes généraux que nous allons établir.

1° *Définitions.* — *Machines.* — Ce sont des appareils destinés soit à faire équilibre à certaines forces, dites *résistances* ou *forces résistantes*, soit à déplacer les points d'application de ces forces, au moyen d'autres forces appelées *puissances* ou *forces mouvantes*, qui ne sont pas directement opposées aux premières.

La transmission des effets des forces dans les machines se fait par l'intermédiaire de leurs *organes*, ou pièces solides qui réagissent l'une sur l'autre Une *machine simple* est celle dont les organes se réduisent à un seul corps solide, assujetti à certaines liaisons : tels sont le levier, le treuil. Une *machine composée* est celle dont les organes sont eux-mêmes des machines simples le type est la machine à vapeur.

Travail moteur et travail résistant. — Dans toute machine en activité, la puissance produit un travail moteur, qui doit être transformé en *travail utile* par l'intermédiaire des organes, tout en détruisant les résistances qui s'opposent au mouvement.

Les *forces mouvantes* sont celles dont la direction fait un angle aigu avec le déplacement du point d'application ; leurs projections sur cette dernière direction sont donc positives et elles effectuent un travail positif. Les *forces résis-*

tantes sont celles dont la direction fait un angle obtus avec le déplacement du point d'application : leurs projections sur ce déplacement sont donc négatives et elles effectuent un travail négatif.

On appelle *travail moteur* de la machine la somme des travaux des forces mouvantes, et *travail résistant* la somme des travaux des forces résistantes. En désignant par T_m le travail moteur et par T_r la valeur absolue du travail résistant, la somme des travaux exécutés à un instant donné par toutes les forces appliquées à la machine est donc exprimée par l'égalité

$$\Sigma(\mathcal{T}) = T_m - T_r.$$

2° *Égalité du travail moteur et du travail résistant.* — Dans une machine en activité, les travaux effectués à un instant t sont liés à la variation des forces vives par l'équation générale

$$\Sigma\left(\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}\right) = \Sigma(\mathcal{T}) = T_m - T_r.$$

Or on s'arrange de manière à donner aux machines soit un mouvement uniforme, soit un mouvement périodiquement uniforme.

Dans le premier cas, on a constamment $V = V_0$, par suite $\Sigma(\mathcal{T}) = 0$, et $T_m = T_r$.

Dans le deuxième cas, après chaque période égale à θ, la vitesse a repris sa valeur initiale V_0 : par conséquent l'accroissement de force vive est nul pendant cet intervalle de temps, et l'on a encore $T_m = T_r$ pour la durée de la période.

Dans l'un et l'autre cas, on peut dire que *le travail moteur se transforme complètement en travail résistant.*

3° *Résistances passives, travail utile et travail passif.* — Parmi les résistances que les forces mouvantes doivent vaincre, par l'intermédiaire des machines, pour l'accomplissement du travail à effectuer, il y en a de deux sortes. Les unes sont de véritables forces, analogues aux forces mouvantes, telles que le poids des organes de la machine, la réaction du travail à effectuer ; les autres sont inhérentes aux imperfections inévitables de la construction et du jeu des organes dans l'air : ce sont, par exemple, les frottements réciproques des organes, les chocs, la raideur des cordes, la résistance de l'air. Le travail moteur est donc employé, dans toute machine, à vaincre ces deux catégories de résistances : une portion a un effet utile au point de vue de la production, et l'autre portion un effet qui est inutile à ce dernier point de vue, et ne sert qu'à entretenir le jeu de la machine. C'est ce fait qu'on exprime en disant que le travail résistant se décompose en *travail utile* et en *travail passif*, et en écrivant l'égalité $T_r = T_u + T_p$. L'équation du travail moteur et du travail résistant peut donc se mettre sous la forme

$$T_m = T_u + T_p.$$

Comme on ne peut jamais annuler T_p, si parfaite que soit la machine, il en résulte que le travail utile produit est toujours inférieur au travail moteur dépensé.

4° *Rendement.* — Une machine *rend* donc moins en travail utile qu'elle ne reçoit en travail moteur. Elle en garde pour elle-même une partie, qui n'a d'autre effet que d'user ses organes. On appelle *rendement d'une machine* le rapport du travail utile au travail moteur :

$$R = \frac{T_u}{T_m}.$$

Ce rapport est constamment inférieur à l'unité, car on a

$$T_u = T_r - T_p = T_m - T_p,$$

et, par suite,

$$R = 1 - \frac{T_p}{T_m}.$$

Dans les machines les mieux construites, la valeur de R ne dépasse pas 0,80. Elle est plus souvent comprise entre 0,40 et 0,60.

5° *Impossibilité du mouvement perpétuel.* — Le problème chimérique du mouvement perpétuel consiste à réaliser une machine qui fournirait indéfiniment du travail utile sans recevoir de travail moteur, et en conservant la même énergie. L'application des principes précédents démontre que ce problème est insoluble et absurde.

6° *Véritable objet des machines.* — Bien qu'on voie journellement, dans la pratique, les forces se multiplier, pour ainsi dire, avec le secours des machines [1], il ne faudrait pas croire que les machines aient pour fonction de *créer* du travail : elles ne peuvent que *transformer* du travail, en lui faisant subir une perte plus ou moins grande. Elles servent à remplacer les deux facteurs F et L du travail FL dont on dispose (travail moteur), par deux autres facteurs F′ et L′, dont le produit F′L′ constitue le *travail résistant.* En général la résistance F′ est beaucoup plus grande que la puissance F dont on dispose : par suite, le facteur L qui représente le chemin parcouru par la puissance doit être beaucoup plus grand que le facteur L′, qui est le déplacement de la résistance F′ L′. C'est ce qu'on exprime en disant : *Ce que la machine gagne en force, elle le perd en chemin parcouru.*

Si donc la machine nous permet de surmonter avec un petit effort une grande résistance, en revanche ce petit effort doit parcourir un chemin d'autant plus grand. Ainsi, pour soulever un poids de 1000 kilogrammes à une hauteur de 10 mètres, il faut dépenser un travail de 10 000 kilogrammètres, et quelque moyen qu'on emploie, on ne pourra jamais dépenser moins. Si l'on dispose d'une *machine parfaite*, c'est-à-dire sans frottement ni réactions, et qu'on ne puisse y appliquer qu'un effort de 10 kilogrammes, cet effort devra parcourir 1000 mètres au lieu de 10 mètres. Mais, comme il n'existe pas de machine parfaite, il faudra en réalité employer une force de 15 ou de 20 kilogrammes et lui faire parcourir tout de même une longueur de 1000 mètres.

Malgré ce défaut inhérent aux machines, elles n'en sont pas moins d'un très grand secours dans la pratique. Car, non seulement elles permettent de substituer à la force dispendieuse de l'homme les forces brutes des animaux ou des agents physiques, mais encore elles nous fournissent le moyen de mieux utiliser les forces limitées dont nous pouvons disposer, en suppléant par le temps ce qui leur manque en intensité [2].

1. Par exemple, un seul homme peut, à l'aide d'une grue, soulever une locomotive du poids de 25 à 30 tonnes.
2. Jouffret, *Introduction à la théorie de l'énergie.*

LIVRE II

PESANTEUR

MOUVEMENT ET ÉQUILIBRE DES CORPS PESANTS

CHAPITRE PREMIER

DIRECTION ET NATURE DE LA PESANTEUR

76. **Définition de la pesanteur.** — Nous avons déjà dit que tous les corps qui sont à la surface de la terre *tombent* vers le sol dès qu'ils ne sont plus appuyés ou soutenus. La cause de ce mouvement est une force dont on ne connaît *à priori* ni l'origine, ni la nature : on l'appelle *pesanteur*.

Tout ce que la simple observation des faits a appris sur la pesanteur, c'est qu'elle s'exerce sur tous les corps solides et liquides, dans quelques conditions qu'ils se trouvent placés : on a exprimé depuis longtemps ce fait général en disant que ces corps *sont pesants*. Il a fallu l'intervention de l'expérience pour démontrer que les gaz sont aussi des *corps pesants*. Et si certains corps ne paraissent pas tomber, comme les nuages qui planent dans l'atmosphère et la fumée ou les aérostats qui s'y élèvent, cela tient précisément à ce que l'air est pesant et qu'il exerce sur tous les corps qui y sont plongés une poussée verticale, qui est tantôt égale, tantôt supérieure, à l'action directe de la pesanteur.

Quant aux caractères mécaniques de cette force, à sa nature et à son origine physiques, on n'a pu les déterminer que par une étude expérimentale et rationnelle de ses effets. Cette étude constitue une partie de la physique, à laquelle on a également donné le nom de Pesanteur. Elle nous offrira un premier exemple d'application de la méthode expérimentale que nous avons définie, et des principes mécaniques que nous avons exposés précédemment.

77. **Direction de la pesanteur. — Fil à plomb.** — La force de la pesanteur sera complètement déterminée quand on connaîtra

sa *direction* en un lieu donné, son *point d'application* sur un corps quelconque et l'*intensité* de son action.

Nous allons en chercher tout d'abord la direction.

La direction de la force, en un lieu quelconque, sera donnée exactement par la trajectoire que suivrait un corps pesant en tombant librement dans ce lieu. On fixe cette trajectoire dans l'atmosphère, on la matérialise en quelque sorte, à l'aide d'un appareil très employé dans les arts et les métiers sous le nom de *fil à plomb*.

Il se compose d'un fil parfaitement flexible auquel est suspendue une petite balle de plomb (fig. 40). Ce fil, étant fixé par son extrémité supérieure et abandonné à lui-même, prend naturellement, lorsqu'il est en équilibre, la direction de la pesanteur. En effet, à cause de sa flexibilité, il suit exactement la direction que lui imprime le corps pesant, laquelle est la direction de la chute libre, et par conséquent de la pesanteur.

Fig. 40.

La direction de la pesanteur est donc définie expérimentalement par le fil à plomb en équilibre ; elle est définie géométriquement par cette propriété du fil à plomb : *La direction d'un fil à plomb en équilibre est normale à la surface libre des eaux tranquilles ou des liquides en équilibre.* La vérification de cette propriété est fondée sur une conséquence des lois de la réflexion de la lumière, que nous admettrons pour le moment :

L'image d'une droite lumineuse, donnée par une surface plane réfléchissante, est une droite symétrique de la première par rapport au plan du miroir.

Or, si un fil à plomb OA, suspendu au-dessus d'un bain de mercure (fig. 41), est normal à la surface plane du liquide, son image vue dans le mercure ne pourra lui être symétrique qu'en se mettant exactement sur son prolongement. Il est facile de s'en assurer. Un observateur n'a qu'à placer un second fil à plomb IB entre son œil et le fil OA, de manière à cacher complètement ce dernier : il constatera que l'image du fil est cachée en même temps que le fil lui-même ; donc cette image est comprise dans le plan déterminé par les deux fils parallèles OA et IB. — En prenant une autre position par rapport au fil OA, l'observateur arrivera au même résultat, c'est-à-dire qu'il pourra cacher à la fois le fil OA et son image par l'interposition du fil IB ; donc cette image est également comprise dans le nouveau plan déterminé par OA et la

nouvelle position de IB. Cette image, devant se trouver à la fois dans les deux plans, coïncide avec leur intersection, laquelle est précisément OA; *donc l'image de* OA *est sur le prolongement même*

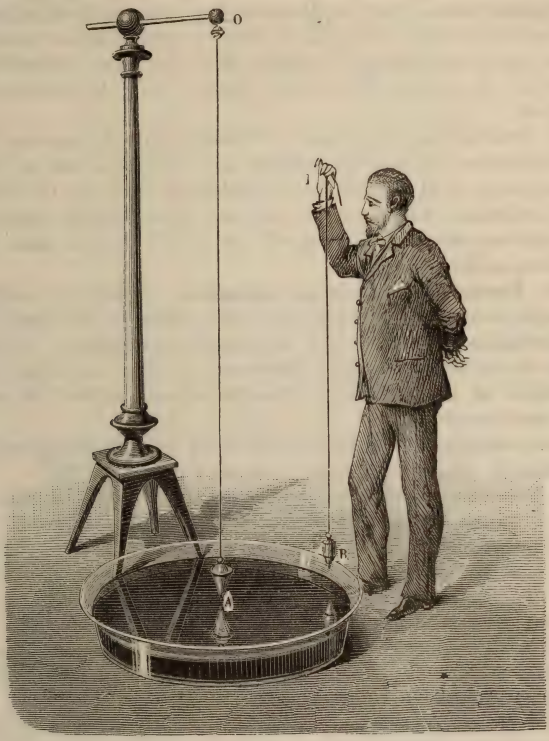


Fig. 41.

de OA : donc la direction de OA est normale à la surface plane du mercure.

Remarques — 1° La vérification expérimentale de cette proposition sera confirmée plus tard (en hydrostatique) par la démonstration géométrique de la proposition réciproque, à savoir que : *Un liquide pesant ne peut être en équilibre qu'autant que sa surface libre est perpendiculaire à la direction de la pesanteur.*

2° *Constance de la direction de la pesanteur.* — Le fil à plomb ne pourrait pas indiquer tout seul si la direction de la pesanteur en un lieu est constante. En effet, si l'on observait que le fil à plomb, d'abord parallèle au mur d'un édifice, a cessé de l'être, on ne saurait dire si c'est la pesanteur qui a changé de direction, ou si c'est le mur qui s'est incliné. Mais si cette direction changeait, il en serait de même de la surface libre des eaux tranquilles. La stabilité du niveau de celles-ci prouve donc la constance de celle-là.

3° *Déviation du fil à plomb.* — Toutefois, dans le voisinage d'une grande masse de matière, comme une montagne ou un massif continental, le fil à plomb est sensiblement dévié de la verticale. La Condamine et Bouguer ont constaté qu'au pied du Chimboraço la déviation est de 7″,5 et qu'elle est de 11″ près du mont Schihallien, en Écosse.

78. **Verticale. — Définitions accessoires.** — Dans les conditions où nous avons expérimenté, c'est-à-dire dans un air calme, à une faible distance du sol et loin des massifs montagneux, la trajectoire des corps qui tombent librement est donc *une ligne droite*, parallèle au fil à plomb, c'est-à-dire *perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles.*

Cette direction s'appelle la *verticale* du lieu. Le fil à plomb détermine la verticale du point même où il est suspendu.

Si la surface des eaux tranquilles et, en général, la surface terrestre étaient planes, toutes les verticales des différents lieux seraient parallèles. Mais on sait que la surface terrestre, abstraction faite des inégalités accidentelles du sol, est une surface convexe. La verticale d'un lieu est donc une droite perpendiculaire au plan tangent en un point d'une surface convexe, — plan tangent qui se confond d'ailleurs avec la surface même, sur une certaine étendue : — il en résulte que les verticales des différents lieux ne sont pas des droites parallèles.

Ce défaut de parallélisme est difficile à constater pour de faibles distances. Ainsi deux verticales dont la distance horizontale est de 31 mètres ne forment qu'un angle de 1″. Il faut une distance de 1860 mètres pour faire un angle de 1′, et de 111 kilomètres pour 1°. Les verticales AZ et AZ′ ou AZ″, qui font entre elles un angle d'environ 3° (fig. 42), correspondent à deux points distants de 333 kilomètres. De Paris à Dunkerque la verticale s'incline de 2° 12′, et de 7° 28′ entre Paris et Barcelone.

Si la surface terrestre était parfaitement sphérique, toutes les verticales Z, Z′, Z″, etc. (fig. 43) seraient perpendiculaires à des plans tangents à la sphère, et iraient se couper en son centre.

On pourrait donc dire qu'*en chaque lieu la pesanteur est dirigée vers le centre de la terre*. Mais on sait que la terre est un globe sphéroïdal, aplati à ses deux pôles, et qui présente, en outre, certaines irrégularités de forme sur ses méridiens et sur ses parallèles. Il en résulte que la conclusion précédente n'est qu'approxi-

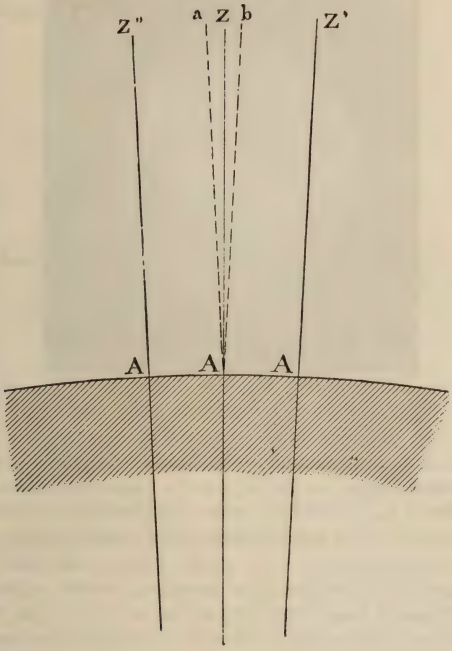


Fig. 42.

mative. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que les verticales vont *sensiblement* se couper en un même point et que la pesanteur est *sensiblement* dirigée, en chaque lieu, vers le centre de la terre.

Azimut. — Tout plan passant par la verticale d'un lieu s'appelle *plan vertical* ou *azimut*.

Plan horizontal. — Tout plan perpendiculaire à la verticale est un *plan horizontal*. Par exemple, la surface des eaux tranquilles, du moins dans le voisinage de la verticale, est un plan horizontal.

Horizontale. — *Horizon.* — Toute ligne tracée dans un plan

horizontal est une *horizontale*. On appelle *horizon* d'un lieu la ligne circulaire suivant laquelle le plan horizontal qui passe par l'œil d'un observateur coupe la calotte sphérique du ciel.

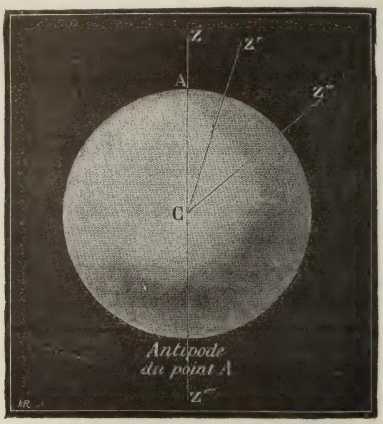


Fig. 45.

79. **Nature de la pesanteur. — Définition du poids et du centre de gravité des corps.** — De ce que la verticale a une direction constante dans un même lieu, nous pouvons déjà conclure que le mouvement des corps qui tombent est un mouvement rectiligne, et, par suite, que la cause de ce mouvement, c'est-à-dire la pesanteur, est une force *constante en direction*. L'étude expérimentale de ce mouvement nous démontrera en outre : 1° que ce mouvement est le même pour tous les corps pesants, quelque petits qu'ils soient ; 2° qu'il est uniformément accéléré. Nous en conclurons que la pesanteur est une force *constante en intensité*, comme en direction, et qu'elle agit également sur tous les corps, et sur toutes les particules des corps.

Nous pouvons donc, dès à présent, nous représenter un corps pesant comme un corps soumis à un nombre considérable de petites forces provenant de la pesanteur. Toutes ces forces, étant verticales et très rapprochées, peuvent être considérées comme rigoureusement parallèles. Elles ont donc une résultante unique : c'est ce qu'on appelle le *poids du corps*[1].

1. On dit quelquefois la *pesanteur* d'un corps. C'est là une expression vicieuse.

Le poids est appliqué en un point du corps, qui est le centre de ces forces parallèles : on appelle ce point d'application le *centre de gravité*[1] du corps.

Reste à démontrer que le centre de gravité est un point fixe et le poids une force constante pour un corps déterminé. Ce sera là une conséquence immédiate des lois de la chute des corps que nous allons exposer.

CHAPITRE II

LOIS DE LA CHUTE DES CORPS

80. **Énoncé des lois.** — Le mouvement des corps qui tombent s'appelle *mouvement de chute* ou simplement *chute*. Les lois de ce mouvement ont été recherchées expérimentalement et découvertes par Galilée, à la fin du seizième siècle. On peut les énoncer de la manière suivante :

1re Loi. — *Tous les corps tombent également vite dans le vide.*

Cette loi signifie que, *dans le vide*, tous les corps, quelles qu'en soient la nature, la masse et la forme, mettent des temps égaux pour tomber de la même hauteur.

2e Loi des espaces. — *Les espaces parcourus par un corps qui, partant de l'état de repos, tombe librement dans le vide, sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.*

Cela veut dire que, si l'espace parcouru au bout de 1 seconde est égal à e_1 mètres, les espaces successivement parcourus au bout de $2^s, 3^s, 4^s \ldots, t^s$ seront respectivement égaux à $4e_1, 9e_1, 16e_1 \ldots t^2e_1$.

Corollaire. — Il en résulte que l'espace parcouru pendant la deuxième seconde est $4e_1$ moins e, ou $3e_1$; pendant la troisième seconde, il est $9e_1$ moins $4e_1$, ou $5e_1$; dans la quatrième, $16e_1$ moins $9e_1$, ou $7e_1$, et ainsi de suite. De là cette conséquence de la loi des espaces : *Les espaces parcourus successivement pendant la première, la deuxième, la troisième, la quatrième... seconde de la chute sont entre eux comme la suite naturelle des nombres impairs* 1, 3, 5, 7...

Le mot *pesanteur* doit être réservé pour désigner la cause du poids, cause variable dans l'intensité de ses effets, suivant la quantité de matière sur laquelle elle agit. Le *poids* est précisément la mesure de cette intensité.

1. Dans cette expression, *gravité* est synonyme de pesanteur. On dit de même corps *graves* au lieu de corps *pesants*.

3° Loi des vitesses. — *Les vitesses acquises par un corps qui, partant du repos, tombe librement dans le vide, sont proportionnelles aux temps écoulés depuis le commencement de la chute.*

On a vu précédemment (26, 3°) ce qu'il faut entendre par *vitesse* dans un mouvement varié. Cet énoncé signifie que si la vitesse ainsi définie est égale à v_1 au bout de la 1re seconde de chute, elle sera égale à $2v_1$ au bout de 2s, à $3v_1$ au bout de 3s..., enfin à v_1t au bout du temps t.

81. **Vérification expérimentale des lois.** — 1re Loi. — Plusieurs faits d'observation courante semblent contredire cette proposition. Des corps de nature différente et de formes diverses (feuille de papier, balle de plomb, plume, etc.) tombent manifestement dans l'air avec des vitesses très différentes. Aristote en avait conclu, et les anciens croyaient d'après lui, que les corps tombent *d'autant plus vite* qu'ils sont *plus pesants*. Galilée le premier attribua ces inégalités de vitesse à la résistance de l'air, qui doit retarder inégalement dans leur chute les corps de forme et de surface différentes. Il fit tomber, du haut de la tour penchée de Pise, des corps inégalement pesants, mais de même volume extérieur, des boules de plomb, de cuivre, de marbre, de cire, et il constata que ces corps arrivaient à terre *sensiblement* au même instant. Il en conclut que dans le vide ils mettraient des temps absolument égaux pour tomber de la même hauteur, et que, par conséquent, la pesanteur agit également sur tous les corps.

Expérience du tube de Newton. — Newton compléta la démonstration de Galilée en supprimant la résistance de l'air, au lieu de se contenter de l'atténuer. Il eut l'idée de faire tomber les corps inégalement pesants, non plus dans l'air, mais dans le vide. On répète son expérience de la manière suivante :

On prend un tube de verre de deux mètres de longueur environ, fermé à l'une de ses extrémités par une calotte métallique et terminé à l'autre par une douille métallique mastiquée (fig. 44). Celle-ci se prolonge par un tube à robinet de cuivre pouvant se visser sur la platine d'une machine pneumatique. On y introduit une balle de plomb, un fragment de liège, un bout de papier, une barbe de plume; puis on y fait le vide. Retournant ensuite le tube brusquement, on voit tous les corps qu'on y a introduits tomber ensemble, sans que l'un d'eux prenne de l'avance ou ait du retard sur les autres. Mais si, après avoir fait rentrer un peu d'air, on renverse de nouveau le tube, on remarque un faible retard pour les corps les plus légers. Ce retard devient très apparent lorsqu'on a laissé rentrer l'air complètement. Si donc, dans les conditions ordinaires, les différents corps tombent inégalement vite,

cela provient uniquement de la résistance de l'air, qui les retarde inégalement dans leur chute.

Expérience du marteau d'eau. — Cette résistance est surtout sensible pour les liquides. Dans l'air, ils se divisent et tombent en gouttelettes; dans le vide, au contraire, ils tombent en bloc et sans se diviser, comme ferait une masse solide. On montre ce phénomène avec le *marteau d'eau.* On nomme ainsi un tube de verre un peu gros, de 30 à 40 centimètres de long, qu'on a rempli d'eau à moitié, puis fermé à la lampe après en

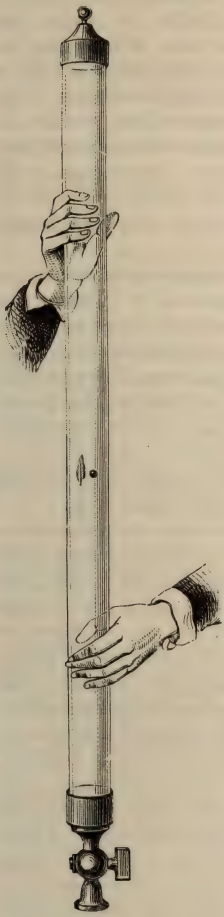


Fig. 44.

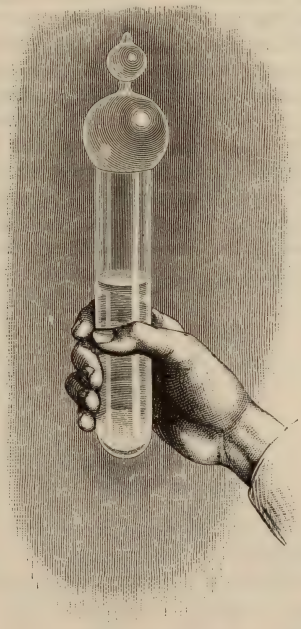


Fig. 45.

avoir chassé l'air par une ébullition prolongée (fig. 45). Lorsqu'on retourne ce tube brusquement, l'eau, en tombant, vient frapper

l'extrémité inférieure en rendant un son sec, analogue à celui d'un corps solide venant choquer la paroi du verre.

2e ET 3e LOI. — Deux graves difficultés se présentent dans la vérification des autres lois. D'abord, la rapidité de chute d'un corps qui tombe librement rend son mouvement difficilement observable. De plus, comme on ne peut pas opérer dans le vide, la résistance de l'air produit nécessairement une perturbation d'autant plus grande que la chute est plus rapide. Pour vérifier les lois avec rigueur et facilité, on a dû inventer des appareils spéciaux qui permettent d'atténuer la difficulté d'observation et de supprimer la cause d'erreur. Ce sont le *plan incliné de Galilée*, la *machine d'Atwood* et l'*appareil de Morin*. Nous allons les décrire l'un après l'autre et en indiquer l'usage.

82. **Plan incliné.** — Galilée a le premier résolu le problème expérimental qui consiste à ralentir le mouvement de la chute des corps, de manière à le rendre aisément observable, sans en altérer la nature. Il démontra, en effet, que « *un corps pesant descend suivant la verticale avec une force plus grande que lorsqu'il descend suivant un plan incliné, dans la proportion où la ligne de plus grande pente du plan est plus longue que la verticale* ». Cette proposition est le principe même de sa méthode.

Principe de l'appareil. — On appelle *plan incliné* tout plan qui fait avec un plan horizontal un angle moindre qu'un droit.

Soit BAC la section du plan incliné par un plan perpendiculaire à la fois à ce plan et au plan horizontal, et par suite à leur intersection : l'angle BAC est l'angle plan du dièdre formé par le plan incliné avec l'horizon (fig. 46) et AB en est la *ligne de plus grande pente*. Soit BC une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque B de la ligne AB sur la ligne AC : BC s'appelle la *hauteur* du plan incliné et AB en est la *longueur*. Soit enfin M la section d'un corps quelconque s'appuyant sur le plan incliné : son poids P pourra être décomposé en deux forces Q et F, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle au plan incliné. La première sera détruite par la résistance du plan et n'aura pas d'effet utile au point de vue du mouvement ; la force F agira seule sur la masse M pour la faire descendre. Pour calculer la valeur de F, on porte sur GP une longueur GH qui représente le poids P, et l'on achève le parallélogramme DGEH; la force F est alors représentée par GD. Or les triangles DGH et ABC sont semblables, comme ayant les angles

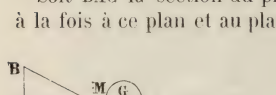


Fig. 46

égaux. On en déduit que

$$\frac{GD}{GH} = \frac{BC}{AB}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{F}{P} = \frac{BC}{BA}.$$

Cette égalité démontre la proposition de Galilée. On voit en effet que F est une fraction de P, ayant pour numérateur la hauteur du plan et sa longueur pour dénominateur. Cette fraction est d'autant plus petite que l'angle BAC est plus petit, car le rapport $\frac{BC}{AC}$ est égal à sin α, α étant l'inclinaison BAC. On peut donc, en augmentant cette inclinaison, rendre la force F aussi petite qu'on le veut. Par suite, on peut ralentir la chute du mobile M sur le plan incliné, de manière à observer aisément les chemins parcourus en 1, 2, 3... secondes. Et le mouvement n'est pas altéré dans sa nature, car si le poids P est constant et continu, sa composante F l'est également. Quant à la résistance de l'air, son influence perturbatrice sera d'autant plus atténuée qu'on ralentira davantage la vitesse de la chute.

2° *Vérification de la loi des espaces.* — Galilée avait réalisé son plan incliné en creusant dans une longue barre de bois (de 7m,20 environ) un canal bien lisse et bien dressé. Il n'avait qu'à soulever plus ou moins l'une des extrémités de la barre pour faire varier à volonté l'inclinaison du plan. Le mobile était une boule de bronze dur, très bien polie; il l'introduisait dans la rigole, et il notait, non pas les espaces parcourus au bout de 1, 2 secondes, etc., mais, ce qui revient au même, les temps qu'elle mettait pour parcourir d'abord le canal tout entier, puis 1/4, puis 1/9, etc. de sa longueur. Il trouva que ces temps successifs variaient comme les nombres 1, 1/2, 1/3, etc. : ce qui démontrait la loi des espaces.

Appareil de cours. — On peut répéter plus simplement ces expériences, en prenant pour plan incliné un fil de soie (fig. 47) tendu obliquement entre un clou A et une petite poulie B, à l'aide d'un poids M qui s'attache à l'extrémité libre. Le long de ce plan incliné on fait descendre un petit équipage mobile C, formé de deux poulies accouplées et soutenant un poids P. En laissant tomber l'équipage pendant des temps progressivement croissants, on vérifiera la loi des espaces. En déplaçant le point d'attache A, de manière à faire varier l'inclinaison, on vérifiera le principe même de l'appareil, c'est-à-dire la proportionnalité de la force motrice ($F = P \sin \alpha$) au sinus de l'inclinaison.

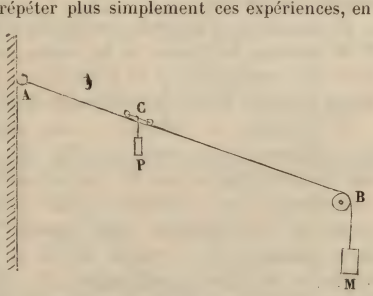


Fig. 47.

3° *Vérification de la loi des vitesses.* — La loi des espaces étant connue, le

mouvement de la chute des corps et la nature de la force qui le produit sont complètement déterminés. On peut en conclure que ce mouvement est uniformément accéléré et que la pesanteur est une force constante. La loi des vitesses s'ensuit donc nécessairement et il est inutile de la vérifier. En effet, Galilée s'était dispensé de cette vérification. Toutefois on pourrait la réaliser très simplement et avec une approximation suffisante à l'aide du petit appareil précédent.

Supposons, en effet, qu'en un point H du plan incliné (fig. 48) on redresse

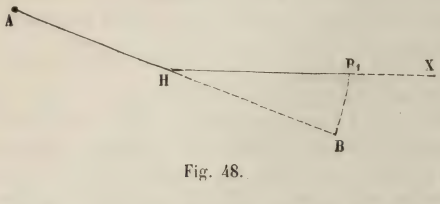


Fig. 48.

le fil, de manière à tendre le bout HB_1 horizontalement, dans la direction B_1X. Le mobile, étant lâché en A au temps zéro, arrivera en H, au temps t, avec une certaine vitesse V : la force accélératrice étant brusquement supprimée en ce point, on sait que le mobile continuera à *se mouvoir uniformément* avec cette vitesse V ; on n'aura donc qu'à mesurer l'espace parcouru pendant une seconde, à partir de l'instant t, pour obtenir la vitesse V à l'instant t. De même, pour obtenir la vitesse V' à l'instant t', il suffira de redresser le fil à partir du point que le mobile a atteint à l'instant t'. On vérifiera ainsi que les vitesses V, V'... sont sensiblement proportionnelles aux temps t, t'....

83. **Machine d'Atwood.** — L'appareil le plus commode pour démontrer approximativement les lois de la chute des corps fut inventé par Atwood, professeur à Cambridge, en 1784 : on l'appelle *machine d'Atwood.*

La machine d'Atwood, comme le plan incliné, donne le moyen 1° de ralentir la vitesse de la chute des corps, sans altérer la nature du mouvement; 2° d'atténuer, par cela même, dans une large mesure, l'effet perturbateur de la résistance de l'air.

1° *Principe.* — Réduite à son organe essentiel, la machine se compose d'une poulie R (fig. 49), très légère et très mobile, sur laquelle passe un fil, parfaitement flexible et inextensible, soutenant à ses extrémités deux masses égales K et K'. Ce système est en équilibre dans toutes les positions relatives des deux masses, car le poids du fil est complètement négligeable vis-à-vis des deux poids égaux, P, de celles-ci. Mais supposons qu'on élève l'une des masses K jusqu'au haut de sa course, et qu'on place au-dessus d'elle une masse additionnelle k, ayant un poids égal à p. Le système tout entier sera entraîné par cette surcharge, et prendra un mouvement qui sera évidemment plus lent que dans

la chute libre. En effet, si le poids p, *supposé constant*, n'agissait que sur sa propre masse m, comme cela aurait lieu en chute libre, il lui imprimerait un mouvement uniformément accéléré, dont nous appellerons g l'accélération. En agissant sur la masse m augmentée des masses M et M des corps K, K′, il imprime encore à la masse totale $(2M + m)$ un mouvement uniformément accéléré. Soit γ l'accélération de ce dernier. Les accélérations qu'une même force imprime à deux masses différentes étant inversement proportionnelles à ces masses (65, 1°), on aura entre g et γ la relation

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{m}{2M + m}$$

d'où l'on tire

$$[1] \qquad \gamma = g \cdot \frac{m}{2M + m}.$$

Donc γ, c'est-à-dire l'accélération de la chute dans la machine d'Atwood, est une fraction de g dont le numérateur est m et le dénominateur $2M + m$. Elle sera donc aussi petite qu'on le voudra. De plus, si g est constant, c'est-à-dire si le mouvement dans la chute libre est uniformément accéléré, γ sera également constant : la réciproque sera également vraie.

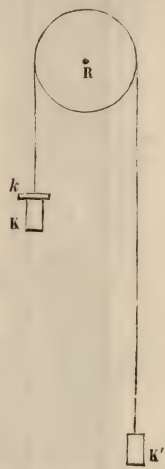


Fig. 49.

Remarque. — Au lieu des masses du système K, K′, k, on en considère plus ordinairement les poids, qu'on détermine directement. On sait que pour chacun des corps pesants on a la relation

$$m = \frac{p}{g} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{P}{g}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle devient

$$[2] \qquad \gamma = g \cdot \frac{p}{2P + p}.$$

Si nous faisons, par exemple, $P = 16$ et $p = 1$, on aura $\gamma = \frac{1}{33} g$. L'accélération sera donc 33 fois moins grande : cela permettra de mesurer aisément les espaces parcourus et rendra la résistance de l'air presque absolument négligeable.

2° *Description.* — Une colonne en bois (fig. 50) de $2^m,30$ environ de hauteur porte à son sommet la poulie R. Cette poulie est ordinairement en cuivre, mais il est plus avantageux de la faire en aluminium; elle est généralement recouverte d'une cage en verre. Sur la poulie s'enroule un fil de soie, assez fin pour que son poids puisse être négligé; ce fil soutient, à ses deux bouts, deux poids égaux K, K′. L'axe de la poulie, au lieu de reposer sur deux coussinets fixes, s'appuie sur les jantes croisées de quatre roues mo-

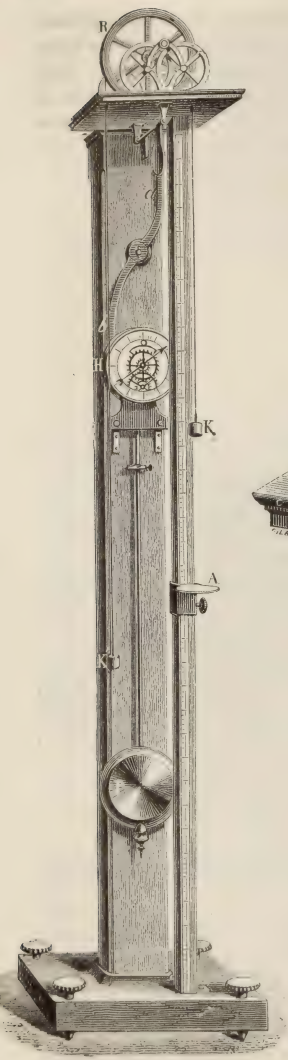


Fig. 50.

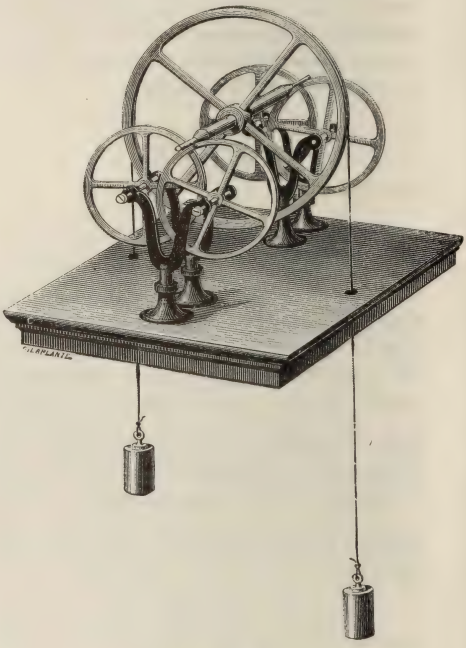


Fig. 51.

biles (fig. 51). Grâce à ce dispositif, l'axe de la poulie transmet son mouvement aux quatre roues et, au lieu d'un frottement de glissement, il se produit un frottement de roulement qui est beaucoup plus doux.

Sur le devant de la colonne est fixé un mouvement d'horlogerie H, que règle un pendule à secondes P, muni d'un échappement à ancre. L'axe de la roue dentée, qui est réglée par l'échappement, porte, à l'extrémité antérieure, une aiguille qui marque les secondes, et à l'extrémité postérieure, derrière le cadran, un excentrique *e* (fig. 52), qui tourne avec l'aiguille dans le sens de la flèche. Cet excentrique peut, en appuyant sur le levier *ba*, faire basculer un plateau *n* sur lequel se place le corps *m* dont on veut observer la chute. Ce plateau, qui est mobile autour d'un axe horizontal, tend à basculer spontanément par son propre poids ; mais il est maintenu horizontal, au moyen d'un taquet *i* dont il est muni, qui s'appuie sur le bout supérieur *a* du levier *ab*, tant que celui-ci est dans sa position normale. Dès que l'extrémité *b* du levier est chassée par l'excentrique, l'extrémité *a* abandonne le taquet et le plateau *n* bascule en laissant tomber le poids qu'il soutenait. Le système est réglé de façon que la chute commence au moment précis où l'aiguille du cadran H arrive au zéro de la graduation.

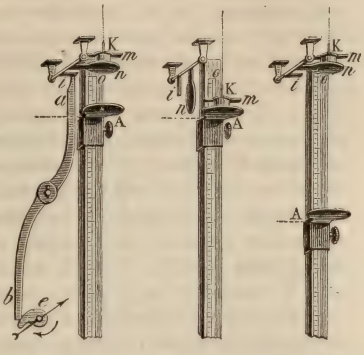


Fig. 52. Fig. 53. Fig. 54.

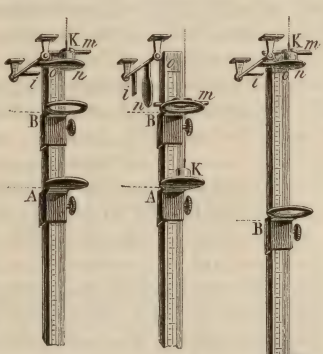


Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57.

Fig. 58.

Enfin, parallèlement à la colonne, est fixée une échelle de bois qui est divisée en centimètres : elle est destinée à mesurer les espaces parcourus par le corps qui tombe. Sur cette échelle sont deux *curseurs*, A et B, c'est-à-dire deux pièces mobiles qui, à l'aide de vis de pression, peuvent se fixer à telle hauteur qu'on veut. Ces curseurs sont représentés dans différentes positions, sur la droite de la machine, dans les figures 52 à 57. L'un d'eux, A, porte un disque plein, qui sert à arrêter le corps qui tombe à un instant quelconque de sa chute : c'est le *curseur plein ;* l'autre, B, est évidé en forme d'anneau : c'est le *curseur évidé.* Celui-ci se laisse traverser par le corps qui tombe, mais arrête au passage le poids additionnel, qui consiste en une lame de laiton *m*, plus longue que le diamètre intérieur de l'anneau. La figure 58 représente, à une plus grande échelle, le poids additionnel *m*, ainsi que l'un des poids K, sur lequel on le place, pour entraîner le système.

3° *Vérification de la loi des espaces.* — Le pendule P est arrêté et l'aiguille du cadran fixée au delà du zéro. On met le poids additionnel *m* sur le poids K, et l'on pose celui-ci ainsi chargé sur le plateau *n* (fig. 52), qui est maintenu horizontal par le levier *ab* en face du zéro de l'échelle. On lâche alors le pendule; l'aiguille parcourt son cadran, et lorsqu'elle passe au zéro, la plate-forme s'abaisse automatiquement, en laissant tomber le poids. On déplace alors le curseur plein sur l'échelle graduée, jusqu'à ce qu'il arrête le poids au bout de la première seconde de chute. On n'y parvient qu'après une série de tâtonnements. La bonne position est trouvée (fig. 53) quand le choc du poids contre le curseur coïncide avec le deuxième battement du pendule (à partir du zéro).

La distance du curseur au zéro de l'échelle donne l'espace parcouru pendant la première seconde. Supposons-le égal à 7 divisions. Recommençons alors l'expérience de la même manière, mais en n'arrêtant le poids qu'au bout de la deuxième seconde. On constate qu'il faut, pour cela, placer le curseur plein juste en face de la 28e division de l'échelle (fig. 54) : donc l'espace parcouru en 2 secondes est égal à 4 fois 7 divisions, c'est-à-dire au quadruple de l'espace parcouru pendant 1 seconde. On trouve de même qu'une hauteur 9 fois plus grande, ou de 63 divisions, est parcourue en 3 secondes, et ainsi de suite : la loi des espaces est donc vérifiée.

4° *Vérification de la loi des vitesses.* — Il faut se rappeler que, dans le mouvement varié, on entend par vitesse à un instant donné celle du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié, si à cet instant on supprimait la force accélératrice (38). Par conséquent, pour constater suivant quelle loi varie

la vitesse d'un corps qui tombe, il suffit de mesurer la vitesse du mouvement uniforme qu'on substitue au mouvement accéléré, successivement après 1, 2, 3... secondes de chute.

Cette substitution s'obtient ici moins simplement que dans l'expérience du plan incliné, mais avec plus de précision. Pour cela on commence par placer le curseur annulaire B à une distance telle (fig. 55), que le système mobile mette 1 seconde à y arriver. Le poids additionnel étant alors arrêté par le curseur B (fig. 56), le poids K continue seul à descendre. On cherche par tâtonnements à l'arrêter, à l'aide du curseur plein, juste au bout de la deuxième seconde. La distance des deux curseurs représente alors, d'après ce que nous avons dit plus haut, la vitesse acquise par le système mobile au bout de 1 seconde de chute.

Dans une deuxième expérience, on place le curseur annulaire B à une distance 4 fois plus grande que la première fois (fig. 57), en sorte que le poids additionnel ne soit enlevé qu'après 2 secondes de chute. En cherchant alors à arrêter le système au bout de la troisième seconde par le curseur plein, on trouve qu'il faut fixer celui-ci à une distance du curseur B double de celle qui les séparait tout à l'heure. Donc la vitesse acquise au bout de 2 secondes est double de celle qui était acquise après 1 seconde. On constate de même qu'après 3, 4, 5 secondes de chute cette vitesse est 3, 4, 5 fois plus grande : donc la troisième loi est vérifiée.

84. **Autre usage de la machine d'Atwood.** — La machine d'Atwood peut servir à vérifier aisément l'un des théorèmes fondamentaux de la dynamique, à savoir que *les accélérations* $\gamma, \gamma', \gamma''$... *imprimées à une même masse par diverses forces* constantes F, F', F''... *sont proportionnelles aux intensités de ces forces* (61, théorème IV).

Pour cette expérience, on prend deux masses K et K' formées chacune d'un certain nombre de rondelles de laiton, ayant le même poids p que la masse additionnelle. En appliquant la formule [2] du § 83 au cas de 16 rondelles, on voit que l'accélération γ du mouvement observé dans ces conditions sera égale à $\frac{1}{55}g$. Or, ce mouvement étant uniformément accéléré, l'accélération γ est liée à l'espace parcouru par l'équation des espaces

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Soit e_1 l'espace parcouru au bout de la première seconde de chute, cette équation donne

$$e_1 = \frac{1}{2}\gamma, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma = 2e_1,$$

c'est-à-dire qu'il suffit de doubler l'espace parcouru au bout de la première seconde pour avoir l'accélération du mouvement correspondant.

Cela posé, faisons les expériences suivantes :

Première expérience. — K et K′ sont formés chacun de 16 rondelles. On met sur K le poids additionnel p, et l'on observe le mouvement. Soit e_1 l'espace mesuré au bout de 1 seconde, on en déduit $\gamma = 2e_1$.

Deuxième expérience. — On prend à K′ une de ses rondelles et on la place sur K. La masse totale du système n'est pas changée, mais la force accélératrice, qui est toujours égale à la différence des deux poids ,est devenue

$$18\,p - 13\,p = 5\,p,$$

c'est-à-dire qu'elle est triple de ce qu'elle était précédemment. Observons le mouvement ; soit e'_1 l'espace mesuré au bout de 1 seconde ; on en déduit

$$\gamma' = 2e'_1.$$

En comparant γ' à γ, on constate que

$$\gamma' = 5\gamma.$$

Troisième expérience. — On enlève à K′ une autre rondelle pour la reporter sur K. La masse totale ne change pas, mais la force accélératrice devient

$$19\,p - 14\,p = 5\,p;$$

elle est 5 fois plus grande que dans la première expérience. En mesurant l'espace e''_1, on en déduit

$$\gamma'' = 2e''_1$$

et l'on constate que

$$\gamma'' = 5\gamma.$$

Ces trois expériences prouvent bien que les accélérations sont proportionnelles aux forces accélératrices. On pourrait pousser la vérification plus loin, dans les limites où le dispositif de l'expérience et la nécessité d'avoir une chûte suffisamment ralentie la rendent possible.

85. **Appareil de Morin.** — 1° *Principe de l'appareil.* — Cet appareil, dont l'idée première est due à Poncelet, est fondé sur un tout autre principe que les appareils précédents. Il ne sert pas à ralentir la vitesse du mobile qui tombe, mais il force ce corps à tracer lui-même ce qu'on appelle un *diagramme* ou un *graphique* de son mouvement, c'est-à-dire une courbe qui permet d'étudier géométriquement toutes les particularités de la chute et d'en déterminer les lois. Quant à l'influence perturbatrice de l'air, elle est éliminée par la faible durée de l'expérience : le mobile ne tombe que pendant une fraction de seconde, et sa vitesse n'a pas le temps de devenir assez grande pour que la résistance de l'air puisse la retarder sensiblement. L'appareil de Morin appartient à la catégorie des appareils enregistreurs, dont nous verrons de nombreux spécimens en acoustique, en télégraphie et en météorologie.

2° *Description.* — Un bâti en bois (fig. 59 et 60) sert à maintenir verticalement un cylindre en bois M, très léger et pouvant tourner librement sur deux pivots. Avant chaque expérience, on recouvre la surface du cylindre d'une feuille de papier quadrillé en carrés ou en rectangles. On colle le papier de manière que l'une des directions des côtés soit horizontale et, par suite, l'autre verticale. Les verticales serviront à mesurer l'espace parcouru par le corps qui tombe le long du cylindre, et les lignes horizontales à partager la durée de la chute en intervalles égaux.

Le mobile est une masse de fonte P, portant un crayon i qui est pressé contre le papier par un petit ressort (fig. 60). Dans sa chute, cette masse est guidée

par deux fils de fer bien tendus qui passent dans des oreilles sur ses deux côtés. A sa partie supérieure, la même masse porte un mentonnet qui s'appuie sur l'extrémité d'un levier coudé AC. Par suite, si l'on tire sur un cordeau K attaché au levier, celui-ci lâche le mentonnet, et la masse P commence sa chute.

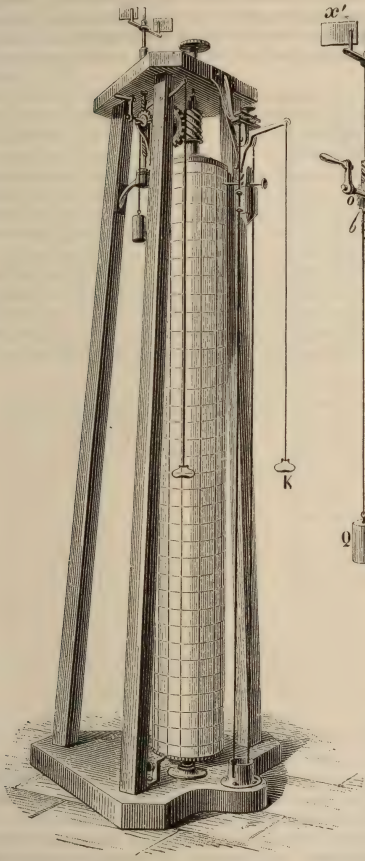


Fig. 59.

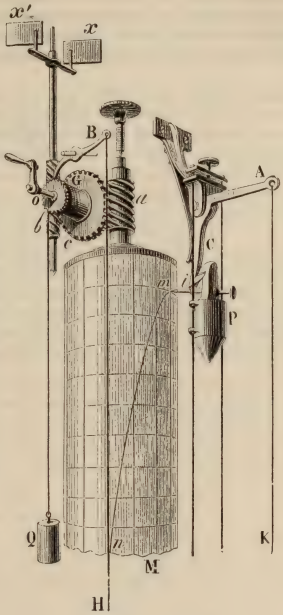


Fig. 60

Quant à la rotation du cylindre, elle s'obtient à l'aide d'un poids Q suspendu à une corde qui s'enroule sur un treuil G (fig. 60). L'axe de celui-ci porte à un bout une roue dentée *c* qui mène deux vis sans fin *a* et *b*, dont la première fait tourner le cylindre et l'autre deux ailettes *x* et *x'*. A l'autre bout du treuil est une roue à rochet *o* dans les dents de laquelle s'engage l'extrémité d'un rochet B, qui empêche le treuil et tout le système de tourner. Mais en tirant sur un cordeau H attaché au rochet on rend libre la roue *o*, le poids Q descend et tout le système se met à tourner. Le mouvement est d'abord accéléré,

puisqu'il est produit par la chute d'un corps pesant; mais l'air oppose aux ailettes une résistance qui croit beaucoup plus rapidement que la vitesse de rotation, de sorte que l'accélération imprimée par la pesanteur finit par être annulée, et la rotation par devenir uniforme. Ce résultat est sensiblement obtenu quand le poids Q a parcouru environ les trois quarts de sa course.

3° *Opération.* — Le mobile étant maintenu en haut de l'appareil, on laisse le crayon appuyer sur le papier pendant qu'on fait tourner à la main le cylindre : on trace aussi un cercle, sur lequel se trouvera le point de départ du mobile. On retire alors le crayon en arrière, tout en laissant le mobile en place, et

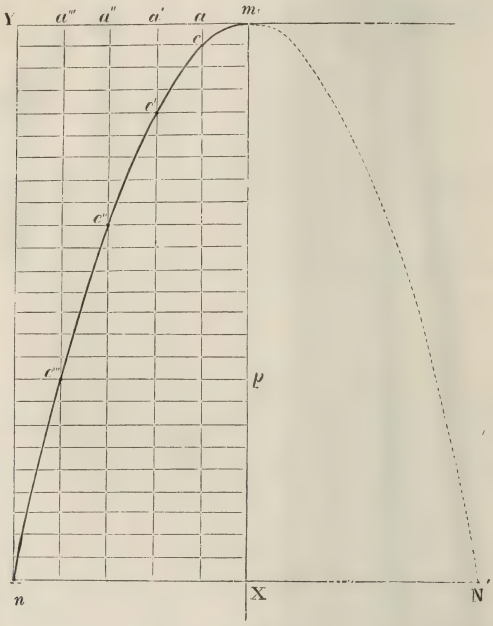


Fig. 61.

on lâche le poids moteur de manière à commencer le mouvement de rotation du cylindre. A l'instant où l'on juge que ce mouvement est devenu uniforme, on tire vivement sur le cordeau K, et la masse P tombe verticalement.

Si le cylindre M était fixe, le crayon tracerait sur le papier une ligne droite qui serait une génératrice du cylindre; mais comme le cylindre tourne d'un mouvement uniforme, le crayon trace une courbe *mn* (fig. 61). Cette courbe est la trajectoire du mouvement résultant de deux autres mouvements, dont l'un est le mouvement uniforme du cylindre et l'autre le mouvement inconnu du corps pesant. C'est l'étude de cette courbe qui va permettre de vérifier les lois de la chute des corps.

4° *Vérification de la loi des espaces.* — On fend la feuille de papier suivant

une génératrice, et on l'enlève de dessus le cylindre : si on la développe alors sur un plan, on obtient sensiblement la courbe, tracée en trait plein, de la figure 61. Les longueurs ma, ma', ma'', ma''', comptées sur le cercle de départ, rectifié à partir de l'origine, sont proportionnelles aux temps 1, 2, 3... et peuvent représenter ces temps; les droites ac, ac', ac'', ac'''... représentent les espaces parcourus respectivement par le mobile pendant ces intervalles de temps. Or, si l'on prend la distance ac pour unité de longueur, c'est-à-dire si on la suppose égale à 1, on trouve que $a'c'$ vaut 4, que $a''c'' = 9$, que $a'''c''' = 16$: ce qui prouve que les espaces ac, $a'c'$, $a''c''$... croissent comme les carrés des temps 1, 2, 3, 4....

5° *Détermination graphique du sommet de la courbe.* — La relation précédente peut s'exprimer comme il suit : *Les distances des points de la courbe à une perpendiculaire à l'axe menée par son sommet sont proportionnelles aux carrés des distances de ces mêmes points à l'axe lui-même.* Cette propriété géométrique définit la courbe appelée *parabole.* Ainsi le *diagramme* de la chute est une branche de *parabole :* le point m en est le sommet, la droite mX, direction du mouvement uniformément accéléré, en est l'axe, et la droite mY, direction du mouvement uniforme, en est la tangente au sommet.

On profite de cette remarque pour déterminer avec précision le sommet de la courbe, lequel reste toujours incertain. On n'a pour cela qu'à appliquer l'une des propriétés géométriques de la parabole. Si l'on mène les tangentes en deux points c' et c'' (fig. 62), et qu'on leur élève respectivement des perpendiculaires aux points t' et t'' où elles coupent la tangente au sommet, ces droites se coupent en un même point de l'axe qui est le *foyer* de la parabole. En abaissant de ce

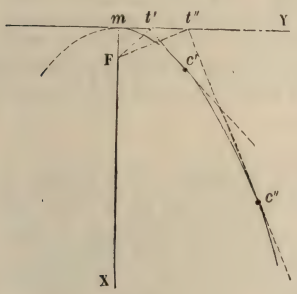


Fig. 62.

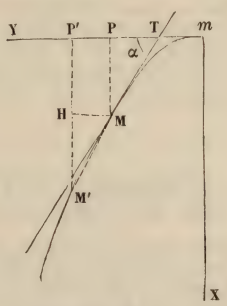


Fig. 63.

point une perpendiculaire sur la tangente au sommet, le point d'intersection sera exactement le sommet de la courbe et par suite l'origine des espaces.

Remarque. — L'identité de ce diagramme avec une parabole démontre expérimentalement le théorème (37) relatif à la composition de deux mouvements rectilignes, dont l'un est uniforme et l'autre uniformément varié sans vitesse initiale : nous avons vu que le mouvement résultant avait pour trajectoire une parabole, orientée de la même manière que la courbe mn.

6° *Vérification de la loi des vitesses.* — On sait que, dans tous les cas, la vérification de la loi des espaces rend superflue celle de la loi des vitesses. Mais il est intéressant de montrer comment cette vérification même résulte simplement de l'étude géométrique du diagramme précédent.

Soient deux points M et M' de la courbe, correspondants aux positions qu'occupait le mobile aux instants t et $(t + \Delta t)$ (fig. 63). Menons la corde MM', les

perpendiculaires MP et M'P' à la tangente mY et la ligne MH parallèle à mY. Nous formons ainsi un triangle M'MH, dont les côtés représentent des éléments du mouvement. En effet, d'abord $M'H = M'P' - MP$: c'est le chemin parcouru verticalement par le mobile pendant l'intervalle Δt : posons $M'H = \Delta e$. D'autre part, $MH = mP' - mP$; c'est le chemin parcouru par un point de la surface du cylindre tournant pendant le même intervalle de temps. Si l'on appelle ω la vitesse angulaire du cylindre et R son rayon, la vitesse d'un point quelconque de la surface cylindrique est ωR, et le chemin parcouru PP' est égal à $\omega R \Delta t$. On a donc $MH = \omega R \Delta t$. Enfin, l'angle HMM' du triangle a pour tangente trigonométrique le rapport $\frac{M'H}{MH}$. On peut donc écrire

$$\text{tang HMM}' = \frac{\Delta e}{\omega R . \Delta t} = \frac{1}{\omega R} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, ce qui revient à faire tendre Δt vers zéro : d'une part la sécante MM' devient la tangente en M, MT faisant avec mY l'angle α ; d'autre part le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ devient la vitesse V du mobile à l'instant t : quant au rapport $\frac{1}{\omega R}$, il ne change pas. D'ailleurs la relation précédente ne cesse pas d'exister, et elle devient à la limite

$$\text{tang } \alpha = \frac{1}{\omega R} V, \qquad \text{d'où} \qquad V = \omega R . \text{tang } \alpha.$$

Donc, en menant la tangente en M à la courbe, et en cherchant dans les tables la tangente trigonométrique de l'angle MTY, on aura une grandeur proportionnelle à la vitesse du mobile à l'instant t. De même, en faisant la même construction pour un autre point M' de la courbe, on aura une grandeur proportionnelle à la vitesse V' à l'instant t'. En prenant le rapport $\frac{\text{tang } \alpha}{\text{tang } \alpha'}$ on vérifiera qu'il est égal au rapport $\frac{t}{t'}$.

86. **Conclusions.** — 1° *Nature de la pesanteur.* — Il résulte de toutes les expériences précédentes que les lois de la chute des corps sont identiques à celles du mouvement rectiligne et uniformément accéléré. Donc, dans les limites où ces lois ont été vérifiées, *la pesanteur*, qui produit la chute des corps, *est une force constante en grandeur et en direction.*

2° *Équations de la chute des corps.* — Les équations générales données précédemment pour le mouvement uniformément accéléré s'appliquent donc à la chute des corps dans le vide. En appelant g l'accélération de la pesanteur en un lieu donné du globe, on a l'équation

$$[1] \qquad v = gt$$

pour représenter la loi des vitesses, et l'équation

$$[2] \qquad e = \frac{1}{2} g t^2$$

pour la loi des espaces.

3° *Formules usuelles.* — I. Si dans l'équation [2] on fait $t = 1$, il vient

$$e = \frac{1}{2} g, \qquad \text{d'où} \qquad g = 2e,$$

c'est-à-dire que *l'accélération due à la pesanteur est égale au double de l'espace parcouru pendant la première seconde de la chute.* (Nous nous sommes servis précédemment de ce résultat, pour vérifier, à l'aide de la machine d'Atwood, le théorème de la proportionnalité des forces aux accélérations.)

II. Dans l'équation [1], la vitesse v est exprimée en fonction du temps ; mais on peut aussi l'exprimer en fonction de l'espace parcouru, en éliminant t entre les équations [1] et [2]. Pour cela, on tire de la première

$$t = \frac{v}{g}, \qquad \text{d'où} \qquad t^2 = \frac{v^2}{g^2}.$$

Portant cette valeur de t^2 dans l'égalité [2], on a

$$e = \frac{1}{2} g \times \frac{v^2}{g^2}, \qquad \text{d'où} \qquad e = \frac{v^2}{2g}.$$

On déduit de là $v^2 = 2ge$ et, en extrayant la racine carrée,

$$[3] \qquad v = \sqrt{2ge}.$$

On voit donc que, *lorsqu'un corps tombe librement dans le vide, la vitesse acquise à un instant donné est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de chute.*

4° *Intensité de la pesanteur.* — On doit définir l'intensité de la pesanteur *l'action qu'elle exerce sur l'unité de masse,* autrement dit *le poids de l'unité de masse.* Or l'équation générale qui lie les forces aux accélérations devient, dans le cas de la pesanteur, $P = Mg$, P étant le poids du corps dont la masse est M, g étant l'accélération de la chute libre dans le vide. Si l'on suppose $M = 1$, on a $P = g$: c'est-à-dire que *l'intensité de la pesanteur est représentée par le même nombre que l'accélération du mouvement qu'elle produit.* C'est pourquoi l'on donne souvent à la constante g le nom d'*intensité de la pesanteur.*

CHAPITRE III

APPLICATIONS DES LOIS DE LA CHUTE DES CORPS

CENTRES DE GRAVITÉ. — ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES PESANTS. — MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE. — PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DU PLAN INCLINÉ. — MOUVEMENT PENDULAIRE OU OSCILLATOIRE. — MOUVEMENT VIBRATOIRE.

87. **Centre de gravité des corps homogènes.** — La vérification des lois de la chute des corps justifie les définitions que nous avons données précédemment :

1° Du *poids* d'un corps, résultante des forces de la pesanteur, qui sont appliquées à ce corps ;

1° Du *centre de gravité*, point d'application de cette résultante.

Le centre de gravité jouit de toutes les propriétés géométriques d'un centre des forces parallèles. Sa position dans le corps ne dépend donc ni de la direction commune des forces parallèles, ni de leur intensité absolue. Par conséquent, elle ne variera point quand on changera l'orientation du corps par rapport à la verticale du lieu, ni quand on transportera le corps dans un autre lieu, d'altitude et de latitude différentes. Elle est déterminée, en général, dans chaque corps par sa forme extérieure et par le mode de répartition de sa masse.

Le cas le plus intéressant à étudier, à ce point de vue, est celui des *corps homogènes*. On dit qu'un corps est *homogène*, quand sa matière est uniformément répartie dans toute son étendue, de manière qu'une portion quelconque du corps ait une masse proportionnelle à son volume. D'après l'équation $P = Mg$, qui lie le poids à la masse, on voit que le poids d'une portion de corps homogène est également proportionnel à son volume.

Dans tous les corps homogènes, la position du centre de gravité ne dépend que de la figure du corps. Si cette figure est géométrique, la recherche de ce point est un problème de géométrie ou d'analyse, plus ou moins compliqué, mais toujours possible. Si le corps, tout en étant homogène, n'est pas limité par une surface géométrique, son centre de gravité n'en existe pas moins, mais on ne peut le déterminer que d'une manière approchée. Nous verrons qu'on emploie, dans ce dernier cas, un procédé expérimental, fondé sur les conditions d'équilibre d'un solide pesant.

88. **Centre de gravité des solides géométriques.** — Nous résoudrons d'abord le problème dans quelques cas simples, qui nous conduiront naturellement au cas général d'un solide géométrique de forme quelconque.

1° *Cas des corps à centre.* — On dit qu'un corps possède un *centre de figure*, ou simplement un *centre*, lorsqu'il existe dans ce corps un point qui divise en parties égales toutes les cordes passant par ce point et limitées à la surface du corps. Tels sont, par exemple, la *sphère*, le *parallélépipède*, le *cylindre circulaire droit*.

On voit tout de suite qu'un pareil corps peut se décomposer en groupes de deux masses égales et également distantes du centre, telles que m et m' (fig. 64). Ces masses sont sollicitées par leurs poids p et p, forces égales et parallèles qui se composent en une force double $2p$, appliquée au milieu de la ligne mm', c'est-à-dire au centre de figure G. La résultante totale des forces $2p$ correspondantes à chaque groupe sera le *poids total* du corps, et elle sera nécessairement appliquée au même point G : donc le centre de gravité coïncide avec le centre de figure. Ainsi, *lorsqu'un corps homogène a un centre de figure, ce point est le centre de gravité.*

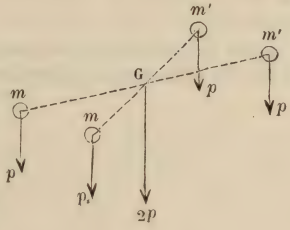


Fig. 64.

2° *Corps à plan diamétral* ou *à plan de symétrie.* — Un *plan diamétral* est un plan qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à une même direction et limitées à la surface du corps. Ainsi, dans un tétraèdre, tout plan passant par une arête et par le milieu de l'arête opposée est un plan diamétral pour toutes les cordes parallèles à cette dernière arête.

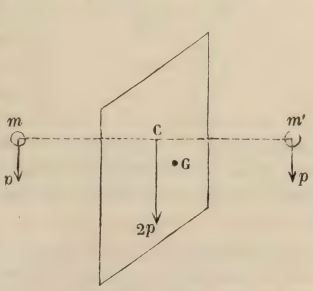


Fig. 65.

Dans le cas où le plan diamétral est perpendiculaire aux cordes qu'il partage par moitiés, on le nomme *plan de symétrie.* Ainsi, dans une sphère, tout plan passant par le centre est un plan de symétrie pour les cordes qui lui sont perpendiculaires.

Il est évident que tout corps homogène, possédant un plan dia-

métral ou un plan de symétrie, peut se décomposer en couples de masses égales, telles que m et m' (fig. 65), auxquelles sont appliquées des forces égales p et p dont la résultante $2p$ a son point d'application au milieu C de la ligne mm'. Le poids du corps, qui est la résultante totale de toutes ces résultantes partielles, aura nécessairement son point d'application G, qui est le centre de gravité, quelque part dans le même plan. Ainsi, *lorsqu'un corps homogène a un plan diamétral*, ou un *plan de symétrie, le centre de gravité du corps est toujours dans ce plan.*

3° *Cas d'un tétraèdre. — Le centre de gravité est sur la ligne qui joint l'un des sommets au point de concours des médianes dans la face opposée, et aux trois quarts de cette ligne à partir du sommet.*

Cette propriété est une conséquence immédiate du cas précédent. En effet, soit le tétraèdre SABC (fig. 66), M et M′ les milieux des côtés BC et AC. Le plan SAM est diamétral pour les cordes parallèles à l'arête BC : donc le centre de gravité G est dans ce plan; il est de même dans le plan SBM′ qui est diamétral pour les cordes parallèles à l'arête AC : donc il est sur la ligne SO, intersection des deux plans.

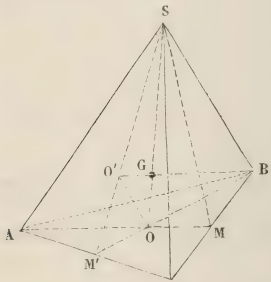


Fig. 66.

Remarquons que cette ligne SO joint le sommet S au point de rencontre O des médianes de la face opposée. Si donc on avait pris le sommet B au lieu du sommet S, on eût démontré de la même manière que le centre de gravité du solide doit se trouver sur la ligne qui joint ce sommet B au point de rencontre O′ des médianes de la face opposée : donc il est placé au point G, intersection de ces deux droites. On démontre aisément que la longueur OG est égale à un quart de la longueur SO.

Calcul de OG. — En effet, on sait que le point O, intersection des médianes dans le triangle ABC, est situé au tiers de BM′ à partir de M′; de même O′ est situé au tiers de SM′ à partir de M′ : donc si l'on joint OO′, cette ligne est parallèle à l'arête SB, comme partageant en parties proportionnelles les deux côtés M′S et M′B du triangle M′BS. Les deux triangles GOO′ et GSB sont donc semblables comme ayant leurs angles égaux chacun à chacun. On a donc

$$\frac{OG}{SG} = \frac{OO'}{SB}.$$

Or les triangles M'OO' et M'BS, qui sont évidemment semblables, donnent

$$\frac{OO'}{SB} = \frac{OM'}{BM'} = \frac{1}{5}.$$

On a donc

$$\frac{OG}{SG} = \frac{1}{5}, \quad \text{et par suite} \quad \frac{OG}{SG + OG} = \frac{1}{5+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{OG}{SO} = \frac{1}{4}.$$

C. Q. F. D.

4° *Cas d'un prisme triangulaire. — Le centre de gravité est au milieu de la droite qui joint les points de rencontre des médianes dans les deux bases.*

Soit un prisme triangulaire quelconque ABCA'B'C' (fig. 67). Le plan AA'M', mené par l'arête AA' et par la médiane A'M' de la base A'B'C', est un plan diamétral du prisme pour les cordes parallèles à l'arête B'C' : ce plan contient donc le centre de gravité du prisme. Le plan diamétral BB'N' le contient également. Il est donc situé sur l'intersection OO' de ces deux plans. Cette ligne OO' joint les points de rencontre O et O' des médianes des deux bases. Enfin le plan *abc*, mené, parallèlement aux bases par le milieu *a* de l'arête AA', est aussi un plan diamétral par rapport à la direction des arêtes latérales, et doit contenir aussi le centre de gravité : donc ce point est à l'intersection G de la ligne OO' et du plan *abc*. Ce point G est évidemment le milieu de OO'.

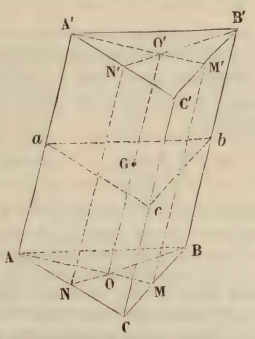


Fig. 67.

5° *Cas d'un polyèdre quelconque.* — Un polyèdre quelconque peut toujours être décomposé en tétraèdres et en prismes triangulaires. Les règles précédentes permettant de trouver les centres de gravité de ces solides partiels, il suffira de composer les résultantes partielles pour avoir le point d'application du poids total, c'est-à-dire le centre de gravité du polyèdre.

6° *Cas d'un solide géométrique quelconque.* — Un polyèdre est toujours limité par des faces planes ; un solide géométrique quelconque peut être limité par des faces courbes, appartenant à des surfaces géométriquement définies. Il est encore possible de déterminer le centre de gravité dans ce cas en appliquant les équations générales relatives au centre des forces parallèles. Nous avons vu (56) que, en rapportant le système à trois axes de coordonnées rectangulaires,

et en appelant a, b, c les trois coordonnées du centre, x, y, z, x_1, y_1, z_1... les coordonnées des points d'application des composantes, enfin R la résultante des forces F, F_1..., on a les équations

$$[I] \quad \begin{cases} aR = \sum (Fx), \\ bR = \sum (Fy), \\ cR = \sum (Fz), \end{cases} \qquad \text{avec l'équation } R = \sum (F).$$

Dans le cas actuel, chacune des forces F est le poids d'une portion infiniment petite du corps. Si donc on appelle p le poids de l'unité de volume de la substance de ce corps et dv l'élément de volume considéré, on aura $F = pdv$; R est le poids total du corps : nous le désignerons par P.

Les équations précédentes deviendront

$$[II] \quad \begin{cases} aP = \sum (pxdv), \\ bP = \sum (pydv), \\ cP = \sum (pzdv), \end{cases} \qquad \text{avec } P = \sum (pdv).$$

Elles déterminent les coordonnées a, b, c du centre de gravité G, pourvu que le corps lui-même soit géométriquement défini.

Remarques. — I. Dans le cas des corps homogènes le facteur p est une constante, et on peut le faire sortir du signe $\sum$. Les équations se simplifient et deviennent

$$aP = p \sum (xdv), \qquad bP = p \sum (ydv), \qquad cP = p \sum (zdv), \qquad P = Vp,$$

en posant $V = \sum (dv)$. On calcule les sommes qui entrent dans ces équations, en les intégrant entre les limites marquées par la surface extérieure du corps, dont on connaît l'équation algébrique.

II. Les équations générales [I] s'appliquent aussi au cas d'un corps *hétérogène;* mais alors p n'est plus une constante, c'est une fonction des coordonnées de chaque point, qu'il faut connaître : cela nécessite une cinquième équation.

89. **Centres de gravité des surfaces et des lignes.** — On a généralisé la notion, purement physique, de centre de gravité, en l'étendant aux cas, purement géométriques et idéaux, des surfaces et des lignes.

Une surface, qui n'a pas d'épaisseur, et une ligne, qui n'a qu'une seule dimension, ne peuvent pas être pesantes et n'ont pas, à proprement parler, de centre de gravité. Mais on peut concevoir la surface et la ligne partagées, l'une en éléments superficiels, et l'autre en éléments linéaires, auxquels on suppose appliqués des poids proportionnels à leurs dimensions. Ces forces virtuelles ont une résultante égale à leur somme et dont le point d'application est appelé *centre de gravité* de la surface ou de la ligne.

Les mêmes principes qui nous ont servi à déterminer les centres de gravité des solides géométriques s'appliquent aux cas des surfaces et des lignes. Ainsi, *pour toute figure plane, douée d'un centre ou d'un diamètre ou d'un axe de symétrie, le centre de gravité est en ce point ou sur cette droite.*

En s'appuyant sur ce lemme préliminaire, on démontre aisément les propositions suivantes :

Le centre de gravité est placé :

Pour une portion de droite, *en son point milieu;*

Pour une circonférence ou pour un cercle, *en son centre;*

Pour la surface d'un triangle, *au point de concours de ses médianes ;*

Pour le périmètre d'un triangle, *au point de concours de ses bissectrices ;*

Pour un parallélogramme et pour un rectangle, *au point d'intersection des diagonales,* qui est le *centre de figure.*

Par suite, on trouvera le centre de gravité d'un polygone quelconque en décomposant sa surface en triangles et en parallélogrammes, et celui d'une surface géométrique quelconque en la rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires et en faisant un calcul identique à celui qui nous a servi dans le cas d'un solide quelconque terminé par une surface géométrique.

Remarque. — La notion du centre de gravité des surfaces peut servir à simplifier certains énoncés relatifs aux centres de gravité des corps solides. Ainsi l'on dira, par exemple, que : *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est le milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

90. **Équilibre des solides pesants.** — La considération du centre de gravité permet de formuler simplement les conditions d'équilibre des corps solides pesants. En réalité tous les corps sont pesants, et cette épithète de *pesants* appliquée aux corps solides est un pléonasme; mais il est d'usage de désigner ainsi les corps lorsqu'on les considère comme soumis aux seules forces de la pesanteur.

1° *Conditions d'équilibre.* — L'action de la pesanteur sur un corps se réduit toujours à une force unique, verticale, dirigée de haut en bas, et appliquée en son centre de gravité : donc, pour qu'il y ait équilibre, *il faut et il suffit que cette force soit détruite par la résistance d'un point fixe par lequel elle passe.* Par suite, si le corps est suspendu par un point unique ou repose sur un seul point d'appui, le centre de gravité doit se trouver sur la verticale de ce point; si le corps est soutenu par deux points, la verticale du centre de gravité doit rencontrer la droite qui les joint; si le corps est supporté par plusieurs points, la verticale du centre de gravité doit passer dans l'intérieur du *polygone de sustentation :* on appelle ainsi le polygone qu'on obtient en joignant les points d'appui.

Dans les tours de Pise et de Bologne, qui sont tellement inclinées sur l'horizon qu'elles semblent menacer les passants de leur chute, l'équilibre subsiste, parce que la verticale du centre de gravité de l'édifice passe dans l'intérieur de la base.

Un homme est d'autant plus ferme sur ses pieds que ceux-ci comprennent une base de sustentation plus étendue; car il peut alors donner à ses mouvements plus d'amplitude, sans que la verticale menée par son centre de gravité se trouve en dehors de cette base. S'il se pose sur un pied, sa stabilité diminue; elle diminue encore s'il s'élève sur la pointe du pied. Dans cette position, un très faible balancement suffit pour que son centre de gravité n'ait plus sa verticale au-dessus de la base, et pour lui faire perdre l'équilibre.

2° *Condition de stabilité.* — Selon la position du centre de gravité par rapport aux points d'appui, il se présente trois états d'équilibre : l'état d'*équilibre stable*, celui d'*équilibre instable*, et celui d'*équilibre indifférent*.

L'*équilibre stable* est l'état d'un corps qui, dévié de sa position d'équilibre, y revient de lui-même lorsque aucun obstacle ne s'y oppose. D'une manière générale, *la stabilité est maximum lorsque le centre de gravité du corps est plus bas que dans toute autre position voisine.*

On conçoit en effet que si le corps est alors déplacé, son centre de gravité ne peut être que relevé, et comme la pesanteur tend sans cesse à l'abaisser, elle le ramène, après une série d'oscillations, à sa position première, et l'équilibre se rétablit. Tel est le cas d'un balancier d'horloge, ou celui d'un œuf posé sur un plan horizontal, lorsque son grand axe est parallèle à ce plan.

On construit de petits appareils où l'on voit se manifester nettement la tendance qu'a le centre de gravité à se placer le plus bas possible. Nous citerons, par exemple, le disque de bois portant latéralement une masse de plomb (fig. 68). Si on le pose sur un plan légèrement incliné, dans une position telle que la verticale du centre de gravité G tombe un peu en avant du point de contact O, on verra le disque remonter le plan incliné, au lieu de descendre plus bas. Il s'arrêtera, pour retomber ensuite, lorsque la verticale du centre de gravité G_1 passera par le point de contact O_1. On voit qu'en réalité, pendant l'ascension du disque, son centre de gravité est descendu de G en G_1.

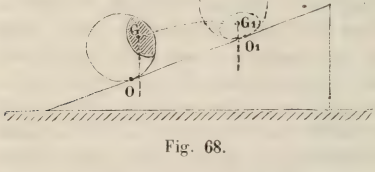


Fig. 68.

L'*équilibre instable* est l'état d'un corps qui, dévié de sa position d'équilibre, ne tend qu'à s'en écarter davantage. Cet état se présente toutes les fois que *le centre de gravité du corps est plus haut que dans toute autre position voisine.*

On voit en effet que, par un déplacement quelconque, le centre de gravité étant abaissé, la pesanteur ne tend qu'à l'abaisser davantage. Tel est le cas d'un œuf reposant sur un plan horizontal, de manière que son grand axe soit vertical, ou celui d'un bâton qu'on fait tenir en équilibre debout sur un doigt.

Enfin, on nomme *équilibre indifférent* celui qui persiste dans toutes les positions que peut prendre un corps. Ce genre d'équi-

libre se rencontre lorsque, dans les diverses positions du corps, son centre de gravité n'est ni relevé ni abaissé. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour une roue de voiture soutenue sur son essieu, ou pour une sphère reposant sur un plan horizontal.

La figure 69 représente trois cônes, A, B, C, placés respective-

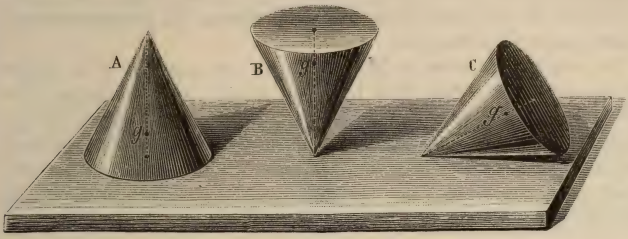


Fig. 69.

ment dans les positions d'équilibre stable, instable et indifférent : la lettre g y désigne la position du centre de gravité.

91. **Détermination empirique du centre de gravité des corps solides.** — Il résulte de ces conditions d'équilibre un procédé pra-

Fig. 70.

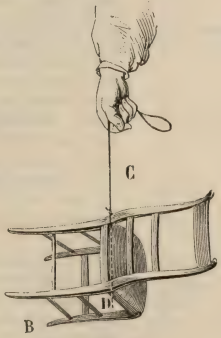


Fig. 71.

tique très simple pour déterminer approximativement le centre de gravité d'un corps solide quelconque, homogène ou hétérogène. Pour cela, on suspend le corps à un cordeau, successivement dans deux positions différentes, comme le montrent les figures 70 et

71; puis on cherche le point où le cordeau CD, dans la seconde position, va couper la direction AB, qu'avait le cordeau dans la première : ce point est le centre de gravité cherché. En effet, dans chaque position l'équilibre ne peut s'établir qu'autant que le centre de gravité vient se placer sur la verticale du point d'attache du cordeau; il en résulte que le centre de gravité doit être placé à la fois sur les deux directions du cordeau, et, par conséquent, à leur point d'intersection.

S'il s'agit d'un corps de grande masse, on cherche à le mettre en équilibre sur l'arête d'un fort couteau en acier. Lorsqu'on y est parvenu, le plan vertical passant par cette arête contient nécessairement le centre de gravité. On réalise cet équilibre pour deux autres positions du couteau. Le point unique d'intersection des trois plans verticaux qui correspondent aux trois positions de l'arête du couteau est le centre de gravité.

92. **Mouvement des projectiles dans le vide.** — Il résulte des lois de la chute des corps qu'un point matériel *pesant*, tombant librement dans le vide, prend un mouvement rectiligne et uniformément accéléré. D'autre part, en vertu de l'inertie de la matière, un point matériel *non pesant*, qui serait lancé dans le vide avec une certaine vitesse initiale, prendrait un mouvement rectiligne et uniforme. Par conséquent, un point matériel *pesant*, lancé dans le vide avec une certaine vitesse initiale, prendra un *mouvement composé*, résultant de ces deux mouvements simples. En réalité, un corps pesant ne peut être lancé que dans l'air — et c'est ce qu'on appelle un *projectile;* — mais, si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, on peut étudier le mouvement du projectile, *comme s'il était lancé dans le vide :* tel est le sens précis de l'énoncé du problème actuel. Le mouvement composé n'est pas le même, suivant que le projectile est lancé verticalement, soit de haut en bas, soit de bas en haut, ou bien lancé obliquement. Nous examinerons successivement ces trois cas.

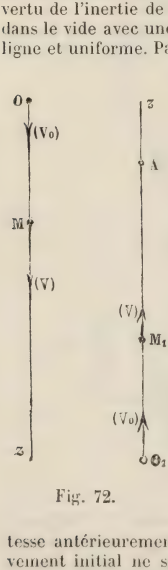


Fig. 72.

1° *Vitesse initiale dirigée verticalement et de haut en bas.* — C'est le cas le plus simple. Le mouvement composé est *rectiligne* (*vertical*) *et uniformément accéléré.*

Soit O l'origine du mouvement, Oz la direction de la vitesse initiale et V_0 sa grandeur (fig. 72). Imaginons que le projectile fasse partie d'un système de points matériels, animés d'un mouvement d'entraînement uniforme, de vitesse V_0, et que lui seul, dans le système, soit soumis à l'action de la pesanteur. En vertu du principe du mouvement relatif (59), l'effet de la pesanteur sur ce point matériel unique sera indépendant de la vitesse antérieurement acquise par le système tout entier. La direction du mouvement initial ne sera pas modifiée, puisqu'elle coïncide avec celle de la force accélératrice; mais la vitesse initiale croîtra continuellement : elle sera $V_0 + g$ au bout de la première seconde (g étant l'accélération constante due à la pe-

sauteur), $V_0 + 2g$ au bout de la deuxième seconde, etc., de sorte que, à l'instant t, elle sera donnée par l'équation

$$[1] \qquad V = V_0 + gt.$$

C'est l'*équation des vitesses* du mouvement de la chute des corps, dans le cas d'une vitesse initiale. L'équation des espaces s'appliquera de même : si l'on appelle z la distance OM, comptée positivement dans le sens du mouvement, la position du mobile à l'instant t sera déterminée par l'équation

$$[2] \qquad z = V_0 t + \frac{1}{2} gt^2.$$

Remarque. — On aurait pu trouver immédiatement ces formules en appliquant à ce cas particulier les règles générales de la composition des mouvements. En effet, d'abord pour les vitesses, la somme géométrique devient une somme arithmétique, puisqu'on doit porter les deux vitesses composantes (V_0 et gt), à la suite l'une de l'autre, dans la même direction et dans le même sens. Il en est de même pour la détermination des points de la trajectoire. La position du mobile au temps t s'obtiendra en portant à la suite l'un de l'autre, dans la même direction et dans le même sens, les deux déplacements composants $V_0 t$ et $\frac{1}{2} gt^2$. L'équation [2] exprime que le déplacement résultant est la *somme arithmétique* des déplacements composants

2° *Vitesse initiale dirigée verticalement et de bas en haut.* — C'est le cas où le projectile est lancé avec plus ou moins de force suivant la verticale du point de départ. Il prend alors un mouvement composé, qui est *rectiligne* (*vertical*) et *uniformément retardé.*

Ce mouvement présente plusieurs particularités fort intéressantes, dont nous avons déjà indiqué et interprété quelques-unes précédemment (71, 2°).

Équations du mouvement. — Soit O_1 l'origine, $O_1 z$ la direction de la vitesse initiale dont la grandeur est V_0 (fig. 72). En appliquant la règle de la composition des vitesses, on voit que la vitesse résultante au temps t est la somme algébrique des deux vitesses V_0 et $(-gt)$: elle est donc représentée par l'équation

$$[1] \qquad V = V_0 - gt.$$

En composant de même les déplacements, on voit que la position M du mobile, à l'instant t, est donnée par l'équation

$$[2] \qquad z = V_0 t - \frac{1}{2} gt^2,$$

z étant le déplacement total, compté positivement dans le sens de la vitesse initiale.

Durée du mouvement. — Dans le cas précédent, le mobile tombait indéfiniment, jusqu'à ce qu'il rencontrât le sol. Ici le mouvement d'ascension n'est pas indéfini, car la pesanteur agit sur le mobile, comme un frein, pour épuiser sa vitesse initiale. Quand celle-ci sera annulée par l'accumulation des retards successifs, le mobile s'arrêtera. La durée θ du mouvement sera évidemment donnée par l'équation [1] si l'on y fait V égal à 0,

$$0 = V_0 - g\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \theta = \frac{V_0}{g}. \qquad [3]$$

Hauteur maximum du projectile. — Au moment où le projectile s'arrête, il est arrivé à son point d'élévation maximum sur sa trajectoire. Soit A cette position et h la distance O_1 A (fig. 72). Elle sera donnée par l'équation [2], si l'on y

fait $t = \theta$. On aura ainsi

$$[4] \qquad h = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Retour du projectile. — A partir de l'instant θ, le projectile est dans le même cas qu'un corps pesant qu'on laisserait tomber de la hauteur h, sans vitesse initiale ; il prendra donc, suivant la verticale AO, un mouvement rectiligne et uniformément accéléré, dont les équations seront

$$V_1 = gt$$
$$l = \frac{1}{2} gt^2$$

(en choisissant le point A pour origine des espaces et l'instant θ pour origine des temps).

Durée de la descente. — Le mobile sera revenu au point de départ O_1 au bout d'un temps θ', qui sera donné par l'équation des espaces, si l'on y fait l égal à h; on aura

$$\theta' = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{V_0}{g} = \theta.$$

On voit que la *durée de la descente* est précisément égale à la *durée de l'ascension.*

Vitesse pendant la descente. — Au départ, en A, la vitesse est nulle. Elle croît proportionnellement aux temps, d'après la loi des vitesses. A l'arrivée, c'est-à-dire en O_1, au bout du temps θ_1, on a

$$V = g\theta' = V_0.$$

Le mobile a donc regagné, en arrivant au sol, sa vitesse initiale de projection.

Ce résultat est général, c'est-à-dire que le projectile a toujours la même vitesse quand il traverse un même niveau, soit en montant, soit en descendant. En effet, à l'instant où le mobile passe en M_1, on peut le considérer comme un projectile lancé à cet instant avec une vitesse initiale V_0', qui serait égale à $(V_0 - gt')$, t' étant déterminée par l'équation

$$O_1M_1 = V_0 t' - \frac{1}{2} gt'^2.$$

Alors la vitesse V' du retour sera égale à la vitesse V_0' du départ, comme on l'a vu précédemment.

3° *Vitesse initiale inclinée sous un angle* α. — C'est le cas ordinaire et pratique du mouvement des projectiles. Le point matériel pesant est alors animé de deux mouvements simultanés rectilignes, l'un uniforme, de vitesse V_0, dirigé suivant Oy, et l'autre uniformément accéléré, sans vitesse initiale, dirigé suivant la verticale Oz (fig. 73). Nous avons déjà vu (37) que le mouvement résultant est *un mouvement varié curviligne : la trajectoire est une parabole qui est tangente à la direction du mouvement composant uniforme et a pour diamètre la direction du mouvement accéléré.* Nous allons étudier en détail ce mouvement résultant.

Construction de la trajectoire. — L'un quelconque des points de la trajectoire s'obtient en appliquant les règles relatives à la composition des mouvements. Si l'on prend sur Oy une longueur Om égale à $V_0 t$, sur Oz' une longueur Om' égale à $\frac{1}{2} gt^2$, et qu'on construise le parallélogramme $mOm'M$,

l'extrémité M de la diagonale m'M sera la position du mobile au temps t : ce sera le point de la trajectoire correspondant à cet instant. En faisant varier t, et par suite Om et Om', on aura autant de points qu'on voudra de la parabole.

Équation de la trajectoire (en coordonnées obliques). — Si l'on pose O$m = y$ et O$m' = z$, ce qui revient à prendre pour axes de coordonnées les directions des deux mouvements composants, et pour origine le point de départ, on aura

$$y = V_0 t \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} g t^2.$$

En éliminant t entre ces deux équations, il vient l'équation

$$y^2 = 2 \frac{V_0^2}{g} z,$$

qui représente une parabole, passant par l'origine des coordonnées, tangente à l'axe Oy et ayant son axe vertical.

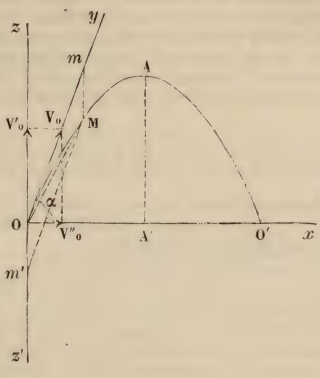


Fig. 73.

Équation de la trajectoire (en coordonnées rectangulaires). — Il est plus commode, pour étudier le mouvement parabolique, de rapporter la courbe à deux axes de coordonnées rectangulaires, qui sont la verticale Oz et l'horizontale Ox du point de départ.

Pour cela, au lieu de composer directement le mouvement accéléré avec le mouvement uniforme, on commence par décomposer ce dernier en deux mouvements uniformes, dirigés suivant les nouveaux axes de coordonnées. Les vitesses de ces mouvements seront déterminées par le parallélogramme des vitesses, lequel, dans le cas actuel, est un rectangle (fig. 73) et donne

$$V_0'' = V_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad V_0' = V_0 \sin \alpha.$$

Le mouvement composant dirigé suivant Oz et ayant pour vitesse $V_0 \sin \alpha$ se compose avec le mouvement de la chute, dirigé suivant Oz', pour donner un mouvement rectiligne et uniformément retardé, analogue à celui que nous avons étudié précédemment. Les équations de ce mouvement sont (en appelant V_1 la vitesse à l'instant t et z l'espace parcouru, compté positivement suivant Oz) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Équation des vitesses. .} & V_1 = V_0 \sin \alpha - gt, \\ \text{— \quad des espaces. .} & z = (V_0 \sin \alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2. \end{array}\right\} \quad [1]$$

Quant au mouvement uniforme suivant l'horizontale Ox, il est défini par :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Équation de la vitesse. .} & V_0'' = V_0 \cos \alpha, \\ \text{— \quad des espaces . .} & x = (V_0 \cos \alpha)\, t. \end{array}\right\} \quad [2]$$

En éliminant t entre les deux équations des espaces [1] et [2], on a une équa-

tion entre x et z, qui représente la trajectoire. Elle est

$$[3] \qquad z = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

C'est une parabole dont l'axe est vertical.

Discussion de l'équation. — Toutes les particularités du mouvement parabolique se déduiront de la discussion de cette équation, et cette discussion elle-même se fera aisément, si l'on remarque que le projectile est, en chaque point de sa trajectoire, animé d'une vitesse que l'on connaît par ses projections sur les axes des coordonnées. En effet, ces projections sont précisément les vitesses mêmes des deux mouvements composants, à savoir :

$$\text{sur l'axe des } z \ldots \quad V_1 = V_0 \sin \alpha - gt,$$
$$\text{— des } x \ldots \quad V_0'' = V_0 \cos \alpha.$$

Durée de l'ascension. — Le projectile s'élèvera évidemment aussi longtemps que sa vitesse verticale ne sera pas nulle. Or celle-ci s'annulera au bout du temps θ défini par l'équation

$$0 = V_0 \sin \alpha - g\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \theta = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Remarquons que ce temps θ est égal à la durée d'ascension d'un projectile qui serait lancé verticalement avec la vitesse $V_0 \sin \alpha$.

Sommet de la parabole. — On le déterminera aisément en faisant $t = \theta$ dans les équations qui expriment les coordonnées d'un point quelconque de la trajectoire, en fonction du temps. Soient a et c les coordonnées de ce sommet A (fig. 73) ; on aura

$$a = \frac{V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$
$$c = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Remarquons aussi que la coordonnée c, c'est-à-dire la hauteur du sommet, est précisément égale à la hauteur maximum qu'atteindrait un projectile qui serait lancé verticalement avec la vitesse $V_0 \sin \alpha$.

Symétrie de la parabole. — Une fois arrivé au sommet de sa trajectoire, notre projectile ne s'arrête pas, quoique la composante verticale de sa vitesse soit annulée ; il continue son mouvement, parce qu'il est entraîné par la composante horizontale de sa vitesse, composante constamment égale à $V_0 \cos \alpha$. Si le projectile n'était pas pesant, il prendrait alors un mouvement rectiligne et uniforme, suivant l'horizontale du sommet, laquelle est tangente à la parabole ; mais, comme il est pesant, il est immédiatement saisi par l'action accélératrice de la pesanteur, qui le fait tomber suivant une branche de parabole.

Il est facile de démontrer que cette branche descendante est symétrique de la branche ascendante, par rapport à la verticale AA′ du sommet (fig. 73). En effet, il suffit pour cela de montrer que la vitesse du projectile, pendant la descente, reprend aux mêmes distances du point A les mêmes valeurs, *changées de signe*, que pendant l'ascension. Or, d'une part, la composante horizontale de cette vitesse reste constante, comme nous l'avons déjà vu ; d'autre part, sa composante verticale varie exactement de la même manière que la vitesse initiale d'un projectile lancé verticalement, et nous avons démontré plus haut que cette vitesse a les mêmes valeurs, au signe près, quand le projectile passe, en montant ou en descendant, par les mêmes niveaux.

Portée du projectile ou amplitude du jet. — Il résulte de là que, lorsque le projectile retombe au niveau du point de départ, il possède la même vitesse, et par suite la même force vive, qu'au sortir de la bouche à feu. Il est important de connaître la distance horizontale de ce point d'arrivée O′ par rapport au point de départ O. C'est cette distance OO′ (fig. 73) qu'on appelle soit la *portée du projectile*, soit l'*amplitude du jet* de la parabole.

On voit immédiatement, à cause de la symétrie de la courbe, que la distance OO′ est égale au double de la distance OA′, laquelle est égale elle-même à la coordonnée a. En appelant A cette amplitude, on a

$$A = 2a = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Amplitude maximum. — On voit que l'amplitude A est une fonction de l'inclinaison α (lorsque la vitesse initiale est constante). Elle est maximum, lorsque $\sin 2\alpha = 1$, et par suite

$$2\alpha = 90^0 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 45^0.$$

Cela prouve qu'il faut tirer *sous l'angle de* 45° pour lancer un projectile le plus loin possible avec une même vitesse initiale, et par suite avec la même force de projection.

Parabole battante ou renversante. — *Parabole écrasante.* — On voit aussi que, pour une même valeur V_0, l'amplitude A a les mêmes valeurs lorsqu'on donne à α deux valeurs successives, l'une inférieure et l'autre supérieure à 45°, de la même quantité. En effet, pour $\alpha = 45^0 - \varphi$, $2\alpha = 90^0 - 2\varphi$, et pour $\alpha = 45_0 + \varphi$, $2\alpha = 90^0 + 2\varphi$: ces deux angles sont donc supplémentaires et leurs sinus sont égaux. Il en résulte que l'on pourra atteindre un point tel que O′, situé sur le même niveau que le point de départ, en tirant avec la même force de projection sous deux inclinaisons différentes, qui sont symétriques par rapport à l'inclinaison de 45°.

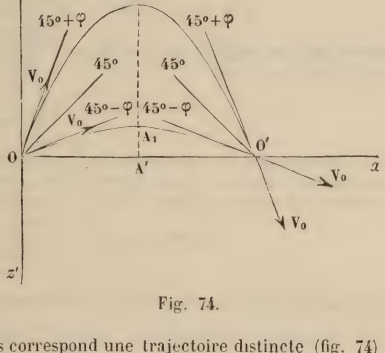


Fig. 74.

A chacune de ces inclinasons correspond une trajectoire distincte (fig. 74) : l'une a pour équation

$$[1] \qquad z = x \operatorname{tang}(45^0 - \varphi) - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2(45^0 - \varphi)} x^2,$$

et l'autre

$$[2] \qquad z = x \operatorname{tang}(45^0 + \varphi) - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2(45^0 + \varphi)} x^2.$$

Elles ont deux points communs O et O′, et leurs sommets A et A_1 sont sur la même verticale.

Quand le projectile atteindra le point O′, sur l'une ou l'autre parabole, il possédera la même vitesse, en grandeur et en direction, qu'au point de départ : sur

la parabole A_1, cette vitesse sera V_0 et fera un angle $(45^0 - \varphi)$ avec l'horizontale; sur la parabole A la vitesse sera encore V_0, mais fera un angle plus grand $(45^0 + \varphi)$. Par conséquent, dans le premier cas, la composante horizontale de cette vitesse sera plus grande que la composante verticale; donc la force vive du projectile, et par suite sa puissance de destruction, sera plus grande dans le sens horizontal que dans le sens vertical. Ce sera exactement le contraire dans le second cas. C'est pourquoi l'on appelle la première trajectoire, parabole *renversante* ou *battante*, et la seconde, parabole *écrasante*.

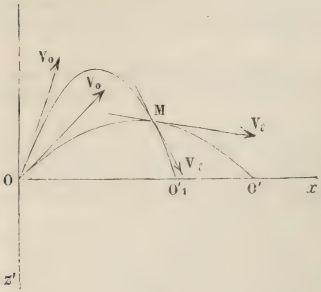


Fig. 75.

4° *Problème du tir.* — On désigne sous ce nom la question suivante : *Sous quel angle faut-il lancer un projectile, avec une vitesse initiale donnée, pour frapper un point déterminé?*

La solution de ce problème est une application immédiate des considérations précédentes sur le mouvement des projectiles dans le vide. En effet, soit O le point de départ du projectile et M le point à atteindre. Supposons ce dernier déterminé par ses deux coordonnées x' et z' prises par rapport à deux axes rectangulaires, l'horizontale Ox et la verticale Oz du point O (fig. 75). Supposons le problème résolu, et soit α l'inclinaison qu'il faut donner à la vitesse initiale V_0 dont on dispose, pour atteindre le point M. L'équation de la trajectoire du projectile est alors

$$z = x \text{ tang } \alpha - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

En écrivant que les coordonnées (x', z') du point M satisfont à cette équation, on aura une équation de condition où tang α sera l'inconnue, et qu'on pourra résoudre par rapport à tang α. Elle est

$$z' = x' \text{ tang } \alpha - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

En remplaçant $\cos^2 \alpha$ par sa valeur en fonction de tang α $\left(\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 \alpha}\right)$, et en ordonnant le polynôme par rapport à tang α, il vient

$$\text{tang}^2 \alpha - \frac{2 V_0^2}{gx'} \text{tang} \alpha + \frac{2 V_0^2 z'}{gx'^2} + 1 = 0.$$

Cette équation est du second degré en tang α, et a deux racines fournies par la formule

$$\text{tang } \alpha = \frac{V_0^2}{gx'} \pm \sqrt{\frac{V_0^4}{g^2 x'^2} - \left(\frac{2 V_0^2 z'}{gx'^2} + 1\right)}.$$

Ces deux racines seront réelles, pourvu que la quantité sous le radical soit positive; elles sont d'ailleurs positives l'une et l'autre, et fournissent pour tang α, et par suite pour α, deux solutions inégales, parfaitement admissibles.

Il y aura donc, en général, *deux inclinaisons inégales et deux paraboles différentes permettant d'atteindre un point déterminé, en tirant avec une vitesse initiale donnée.* L'une de ces trajectoires correspond à la parabole renversante définie ci-dessus, et l'autre trajectoire à la parabole écrasante : l'une et l'autre atteindront le point M avec des vitesses et sous des angles différents.

Courbe de sûreté. — Nous avons dit que les valeurs de tang α ne sont réelles que si la quantité sous le radical est positive. Cette quantité n'étant pas un carré parfait n'est pas nécessairement toujours positive. Il s'ensuit que *le problème du tir n'est pas possible dans tous les cas.* On ne pourra atteindre le point M qu'autant que ses coordonnées (x', z') satisferont à l'inégalité de condition suivante :

$$\frac{V_0^4}{g^2x'^2} - \frac{2V_0^2z'}{gx'^2} - 1 \geqq 0.$$

On peut interpréter géométriquement cette condition. En chassant les dénominateurs et faisant passer z' dans le second membre, on met l'inégalité sous la forme suivante :

$$z' \leqq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x'^2.$$

Or, si l'on considère la courbe qui aurait pour équation

$$z = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2,$$

cette courbe est une parabole, qui a son sommet H sur l'axe Oz, et cette droite même pour axe de symétrie (fig. 76).

On sait d'ailleurs qu'une courbe ayant pour équation

$$z = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2$$

possède la propriété géométrique de séparer, dans le plan xOz, tous les points pour lesquels on a

$$z < \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2$$

de ceux pour lesquels on a

$$z > \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2,$$

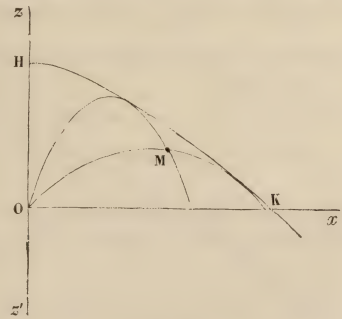


Fig. 76.

les premiers étant à l'intérieur de la courbe et les autres à l'extérieur. Donc l'inégalité de condition ne sera satisfaite que pour les points (x', z') du plan qui sont situés soit en dedans de la courbe, soit sur la courbe elle-même. Pour les premiers, la quantité sous le radical sera positive, et l'équation en tang α aura deux racines réelles : il y aura deux paraboles pouvant atteindre le point M ; c'est là le cas général que nous avons examiné ci-dessus. Pour les autres points, la quantité sous le radical sera nulle, et l'équation en tang α n'aura qu'une racine. Cela veut dire que, dans ce dernier cas, il n'y aura

qu'une seule manière d'atteindre le point $(x' y')$ avec un projectile de vitesse V_0 : il faudra le lancer sous l'inclinaison α définie par l'équation

$$\tang \alpha = \frac{V_0^2}{gx'}.$$

Enfin, pour tous les points (x', y') situés en dehors de la courbe, la quantité sous le radical sera négative, et les racines de l'équation en tang α seront imaginaires, c'est-à-dire que le problème du tir sera insoluble pour tous ces points : on ne pourra en atteindre aucun en lançant d'une manière quelconque un projectile de vitesse V_0. Par suite, la branche HK de la courbe (fig. 76) est l'extrême limite des points qu'on pourra toucher : tous les autres points du plan sont à l'abri du projectile. C'est pourquoi l'on donne à cette parabole le nom de *courbe de sûreté*.

Remarques. — 1° *Sommet de la parabole de sûreté.* — Il est à une hauteur h qu'on obtient en faisant $x = 0$ dans l'équation de la courbe. Il vient

$$h = \frac{V_0^2}{2g}.$$

On voit que c'est précisément la hauteur maximum qu'atteindrait le projectile si on le lançait verticalement suivant Oz avec la même vitesse initiale. Il est évident *à priori* que ce point d'arrêt doit être un point de la courbe de sûreté.

2° *Portée de la courbe de sûreté.* — En faisant $z = 0$, on a deux valeurs de x égales et de signe contraire. Une seule nous intéresse, c'est la racine positive, qui est située du côté où on lance le projectile. Soit A cette racine, qui représente la longueur OK (fig. 76), c'est-à-dire la *portée* de la parabole. On a

$$A = \frac{V_0^2}{g}.$$

On voit que c'est précisément l'amplitude maximum qui correspond à la para-

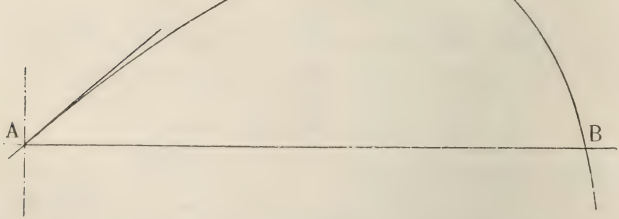


Fig. 77.

bole définie par l'inclinaison de 45°. Il est également évident *à priori* que ce point doit appartenir aussi à la courbe de sûreté.

3° *Enveloppe des paraboles de tir.* — Toutes les paraboles correspondantes à

une même vitesse initiale V_0 ont précisément pour *enveloppe géométrique* la courbe de sûreté. Cela résulte de ce que, lorsque le point M (x', y') est pris sur cette courbe, les deux paraboles de tir qui correspondent généralement à chaque point M se réduisent alors à une seule.

On sait que l'*enveloppe géométrique* d'une série de courbes a la propriété d'être tangente à toutes les courbes enveloppées.

4° *Influence de l'air.* — N'oublions pas que tous les résultats précédents sont des résultats *théoriques*, obtenus en négligeant une circonstance importante du phénomène, la résistance de l'air. L'air s'oppose au mouvement des projectiles, d'autant plus énergiquement que leur vitesse est plus grande, et il en résulte des perturbations plus ou moins grandes dans la trajectoire et dans les lois de ces mouvements. Pour n'en citer qu'un exemple, la trajectoire *dans l'air* n'a pas la forme parabolique ni l'orientation que nous lui avons assignées *dans le vide*. Les deux parties AC et CB de la courbe (fig. 77) ne sont plus symétriques par rapport à la verticale du *point culminant* ou sommet, et la branche descendante, que le projectile parcourt dans la période de chute, se rapproche rapidement de la verticale.

93. **Propriétés mécaniques du plan incliné.** — Le plan incliné de Galilée nous a servi à vérifier les lois de la chute des corps; inversement, étant données ces lois, on en déduit des propositions curieuses relatives à la chute des corps pesants sur le plan incliné. Dans ce mouvement, comme dans celui des projectiles, nous ferons abstraction de la résistance de l'air.

1° *Formules fondamentales.* — Rappelons d'abord que, si on laisse tomber, sans vitesse initiale, un point matériel de masse m et de poids p (égal à mg) sur un plan incliné, qui fait un angle α avec le plan horizontal, le mouvement est défini par les formules suivantes. On a successivement :

1° Pour la force accélératrice p'. . . . . $p' = p \sin \alpha$,
2° Pour l'accélération g' de la chute. . . . . $g' = g \sin \alpha$,
3° Entre la hauteur h et la longueur l du plan. . $\frac{h}{l} = \sin \alpha$.

2° *Vitesse acquise au bas du plan incliné. — Elle est indépendante de la longueur du plan, elle ne dépend que de sa hauteur; elle est donnée par la formule*

$$V = \sqrt{2gh}.$$

En effet, soient l la longueur du plan et θ la durée de la chute. Ces deux quantités sont liées entre elles par l'équation des espaces

$$l = \frac{1}{2} g' \theta^2$$

D'autre part, la vitesse inconnue V et la durée de la chute θ sont

liées par l'équation des vitesses

$$V = g'\theta.$$

En éliminant θ entre ces deux équations, on a

$$V^2 = 2g'l.$$

En remplaçant g' par sa valeur en fonction de g et l par sa valeur en fonction de h, il vient

$$V^2 = 2gh, \qquad \text{d'où} \qquad V = \sqrt{2gh}.$$

On reconnaît la formule qui exprime, en fonction de l'espace parcouru, la vitesse acquise par un corps qui est tombé librement dans le vide, de la hauteur h.

Corollaires. — I. Si on laisse tomber sans vitesse initiale divers points matériels sur divers plans inclinés SA, SA′, SA″... issus d'une même origine S (fig. 78), tous ces mobiles auront acquis la même vitesse en arrivant au plan horizontal. Cette vitesse sera précisément égale à celle d'un point matériel qui serait tombé librement suivant la verticale SO, d'une hauteur égale à celle de ces divers plans inclinés.

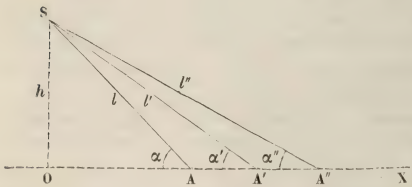


Fig. 78.

II. La vitesse acquise au bas d'un plan incliné est donc indépendante de l'inclinaison du plan (du moins en grandeur, car sa direction est celle même du plan; elle est α sur le plan SA, α' sur SA′, etc.).

3° *Durée de la chute.* — La durée de la chute sur un plan incliné dépend essentiellement de la longueur du plan.

Pour des plans de même hauteur h, *les durées de descente du mobile sont proportionnelles aux longueurs des plans* l, l′, l″... (fig. 78).

En effet, la longueur l et la durée de descente θ sont liées par l'équation

$$l = \frac{1}{2} g'\theta^2.$$

En remplaçant g' par sa valeur $g \sin \alpha$ et $\sin \alpha$ par sa valeur $\frac{g}{l}$,

il vient

$$l = \frac{1}{2}\frac{gh}{l}\theta^2, \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad \theta = l\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

4° *Lieu des positions occupées à l'instant* t *par divers mobiles lâchés simultanément sur divers plans inclinés, issus de la même origine.*

Ce lieu est la surface d'une *sphère* ayant pour *diamètre* le chemin parcouru par un mobile *qui tomberait librement suivant la verticale du point origine.*

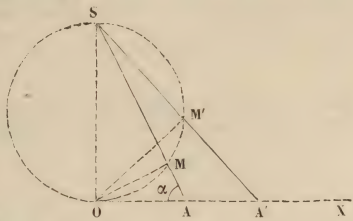


Fig. 79.

En effet, considérons d'abord le mouvement dans l'un quelconque des azimuts menés par la verticale SO (fig. 79). Soit M la position qu'occupe un des mobiles sur l'un des plans SA, au bout du temps t. Le plan SA est défini par son inclinaison α sur l'horizontale, et le temps t par la position O de celui des mobiles qui tombe librement. On a donc

$$\text{d'une part} \qquad SO = \frac{1}{2}gt^2, \qquad \text{d'autre part} \qquad SM = \frac{1}{2}g't^2.$$

Or g' est égal à $g \sin\alpha$; et comme l'angle α est complémentaire de l'angle ASO, on a

$$\sin\alpha = \cos ASO.$$

En remplaçant g' et $\sin\alpha$ par ces valeurs, il vient

$$SM = \frac{1}{2}gt^2 \cos ASO,$$

et, en remplaçant $\frac{1}{2}gt^2$ par SO,

$$SM = SO \cos ASO.$$

Cette dernière égalité prouve que la longueur SM est la projection de la longueur SO, et que, par suite, la ligne OM est perpendiculaire sur SM.

On prouverait de même que la ligne OM′ qui joint le point O à la position qu'occupe un autre mobile sur un autre plan incliné, au bout du même temps est aussi perpendiculaire à SM′. Donc les points M, M′..., sont sur une demi-circonférence ayant SO pour diamètre.

Tout étant symétrique par rapport à la verticale SO, le lieu dans l'espace est évidemment une sphère ayant comme méridienne la demi-circonférence SMO.

Corollaire. — Les cordes MO, M′O, ... SO sont des lignes *tautochrones* (de ταὐτό, le même, et χρόνος, temps).

Cela veut dire que si on lâche en même temps divers mobiles sur les plans inclinés MO, M′O,... SO, définis d'après le théorème précédent, ces mobiles arriveront en même temps au point O : ces lignes seront donc *parcourues dans le même temps* (fig. 80).

En effet, on a d'abord l'équation

$$SO = \frac{1}{2}g\theta^2,$$

qui définit la durée θ de la descente. On en tire

$$\theta^2 = \frac{2\,\mathrm{SO}}{g}.$$

Le mobile qui est lâché suivant MO parcourt un plan incliné dont l'inclinaison est $\mathrm{MOX} = \alpha_1$ (fig. 80). Appelons provisoirement θ' la durée de la descente : on a évidemment

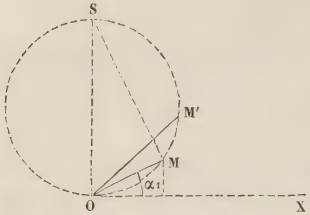


Fig. 80.

$$[1] \qquad \mathrm{MO} = \frac{1}{2} g' \theta'^2.$$

Mais, d'une part, on a

$$g' = g \sin \alpha_1 = g \sin \mathrm{MOX};$$

d'autre part, l'angle MOX étant complémentaire de SOM,

$$\mathrm{MO} = \mathrm{SO} \cos \mathrm{SOM} = \mathrm{SO} \sin \mathrm{MOX}.$$

En remplaçant MO et g' par ces valeurs dans l'équation [1], il vient

$$\mathrm{SO} \,.\, \sin \mathrm{MOX} = \frac{1}{2} g \,.\, \sin \mathrm{MOX} \,.\, \theta'^2, \qquad \text{d'où} \qquad \theta'^2 = 2\frac{\mathrm{SO}}{g} = \theta^2.$$

La durée de descente est donc la même pour le point M que pour le point lâché en S, en chute libre. Il en sera de même pour tout autre point M', lâché suivant M'O.

94. **Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe.** — 1° *Définition.* — Le point matériel, au lieu de tomber sur un plan incliné, peut être assujetti à se mouvoir sur une courbe plane et verticale, telle que AMB. La chute, dans ce cas, est produite, comme dans le cas du plan incliné, par une force accélératrice tangentielle, égale à $p \sin \alpha$ (fig. 81) ; mais ici l'angle α est variable avec le point considéré : il est α_0 au point de départ ; il est α au point M ; donc la force accélératrice est variable en grandeur comme en direction : elle est p'_0 $(= p \sin \alpha_0)$ au départ, et p' $(= p \sin \alpha)$ *à l'instant* t. Le mouvement n'est donc plus uniformément varié : c'est un mouvement varié quelconque, avec cette restriction toutefois que la cause première de la chute, c'est-à-dire le poids du mobile, *reste constamment parallèle à la verticale* A'Z.

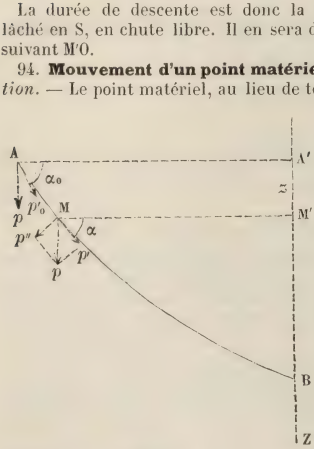


Fig. 81.

2° *Vitesse à l'instant* t. — Cette remarque va nous permettre de trouver la vitesse v du mobile à l'instant t, aussi simplement que dans le cas du plan incliné. Appliquons en effet le théorème du travail et des forces vives. En supposant que le point matériel ait été lâché sans vitesse initiale, son accroissement de force vive à l'instant t est $\frac{1}{2} mV^2$.

Quant au travail effectué par la force accélératrice variable p' pendant le même intervalle de temps, il est précisément égal au travail développé par le poids p, car ce poids est à chaque instant la résultante de deux forces, la composante normale p'', dont le travail est nul, et la composante tangentielle p'. Or on sait que le travail d'une force, telle que p, qui est constante en direction, est égal au produit de la force par le chemin parcouru, parallèlement à sa direction. Soit z la variation de niveau A'M', le travail est égal à pz ou à mgz (si l'on remplace p par sa valeur mg). L'équation du travail est donc

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgz, \qquad \text{d'où} \qquad V = \sqrt{2gz}.$$

3° *Conséquence.* — Nous retrouvons ici la même formule que dans le cas du plan incliné, et si elle nous conduit à la même conclusion, c'est que la vitesse à l'instant t, sur la courbe, ne dépend nullement du chemin réellement parcouru par le mobile, mais seulement de sa variation de niveau. Il en résulte qu'une des propriétés mécaniques du plan incliné peut se généraliser de la manière suivante : *Si l'on imagine différentes lignes, droites ou courbes*, AB, AB_1..., AC, AC_1..., *issues d'un point* A (fig. 82), *et qu'on lâche en même temps de ce point des mobiles sur toutes ces lignes, ils auront tous la même vitesse* $(V = \sqrt{2gh})$, *quand ils passeront, chacun sur sa trajectoire, par un même plan horizontal* BB'.

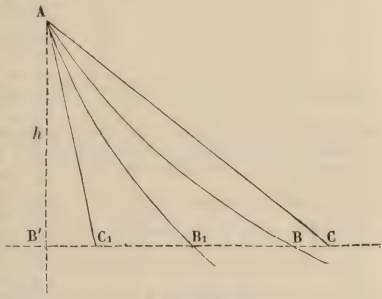


Fig. 82.

4° *Mouvement oscillatoire.* — Cette propriété est indépendante de la forme de la courbe et du chemin que le mobile a parcouru sur cette courbe : la vitesse du mobile à chaque instant est déterminée par la distance verticale de sa position actuelle à l'origine du mouvement. Par exemple, si la courbe A_0HA_1 possède une branche ascendante B_1A_1 reliée à la branche descendante A_0B_0 par un arc continu B_0HB_1 (fig. 83), le mobile, lâché au point A_0, possédera au point B et au point B_1, situés sur la même horizontale, des vitesses égales à $\sqrt{2gh}$, mais de signes contraires. Comme il était parti du point A_0 avec une vitesse nulle, il remontera jusqu'au point A_1, situé la même horizontale, avant de perdre complètement la vitesse qu'il avait acquise en tombant du point A_0 jusqu'au point H. Arrivé au point A_1, il retombera sur la courbe dans le sens A_1B_1 et remontera jusqu'en A_0, pour retomber de nouveau, et recommencer indéfiniment ce mouvement de va-et-vient, qui est le type de ce qu'on appelle le *mouvement oscillatoire*. En vertu du principe de la conser-

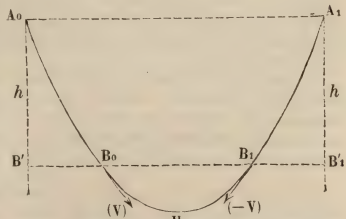


Fig. 83.

vation de l'énergie, ce mouvement oscillatoire d'un corps pesant, une fois commencé, ne devrait plus s'arrêter, à la condition qu'il eût lieu dans le vide, et à l'abri de toute action retardatrice.

95. **Mouvement pendulaire.** — 1° *Définition.* — La trajectoire d'un mouvement oscillatoire peut être un arc de courbe quelconque, orienté d'une manière quelconque par rapport à la verticale du point le plus bas. Lorsque la trajectoire est *un arc de cercle, orienté symétriquement par rapport à la verticale de son point le plus bas*, le mouvement oscillatoire est appelé *mouvement pendulaire*[1] (fig. 84).

2° *Périodicité du mouvement.* — Le point matériel pesant se trouve dans les mêmes conditions mécaniques que précédemment (94) et prend le même mouvement : c'est un *mouvement oscillatoire*, symétrique par rapport au diamètre vertical OH (fig. 84).

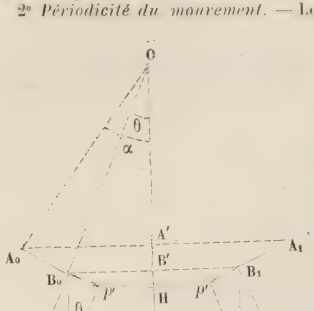


Fig. 84.

Si la position initiale est le point H, le mobile y restera indéfiniment en repos, puisqu'il n'a pas de vitesse acquise et que son poids p, seule force qui agisse sur lui, n'a pas de composante tangentielle, étant normal à la trajectoire. Si on écarte le mobile de cette position d'équilibre et qu'on le pose en un point B_0, à une distance définie par l'angle au centre $\theta (= HOB_0)$, le mobile tombera, sous l'action accélératrice de la force tangentielle $p' (= p \sin \theta)$; il passera au point le plus bas de la courbe avec une vitesse acquise V qui est égale à $\sqrt{2g.B'H}$, et remontera jusqu'en un point B_1 exactement symétrique de B par rapport à la verticale du point H (94). Du point B_1 il retombera vers le point H, puis remontera jusqu'en B_0 ; le mouvement recommencera alors dans les mêmes conditions qu'au début, et continuera indéfiniment de la même manière, en vertu du principe de la conservation de l'énergie.

Soit A_0 l'origine du mouvement oscillatoire, ce point étant défini sur le cercle par l'arc HA_0, lequel mesure l'angle au centre $HOA_0 = \alpha$. La période d'aller entre le point A_0 et le point symétrique A_1 s'appelle une *oscillation simple*, ainsi que la période de retour ; l'ensemble de ces deux périodes s'appelle une *oscillation complète ;* enfin l'arc HA_0 qui mesure l'angle au centre α, s'appelle l'*amplitude* du mouvement pendulaire. Soit l le rayon du cercle, et a l'amplitude, on a $a = l\alpha$.

3° *Équation différentielle du mouvement.* — La recherche des équations du mouvement pendulaire est un exemple du premier des problèmes fondamentaux qui sont l'objet de la dynamique : *Étant données les forces qui agissent sur un corps, déterminer le mouvement de ce corps.* Ici la force accélératrice est connue à chaque instant : elle est égale à $p \sin \theta$ (ou $mg \sin \theta$). La trajectoire est

1. Ce nom vient d'une nouvelle manière de concevoir la liaison du point matériel pesant qui est doué de ce mouvement. Au lieu de le supposer assujetti à tomber le long de l'arc de cercle vertical A_0HH_1, on peut le supposer suspendu, dans un plan vertical, à l'une des extrémités d'un fil A_0O, *inextensible et sans poids*, dont l'autre extrémité serait attachée au centre du cercle et dont la longueur serait, par suite, égale au rayon du cercle : cet appareil *idéal* s'appelle en mécanique *pendule simple* ou *pendule idéal*.

également connue : c'est l'arc de cercle A_0HA_1. Il s'agit de trouver l'équation des vitesses et l'équation des espaces, c'est-à-dire les relations qui donnent l'espace parcouru et la vitesse du mobile à un instant quelconque t, et en un point quelconque B_0 de sa trajectoire. Ces équations suffiront pour déterminer tous les éléments du mouvement. Nous en déduirons une troisième équation, particulièrement intéressante dans le cas d'un mouvement périodique, parce qu'elle donne la *durée* d'une période, c'est-à-dire d'une oscillation simple.

Comptons les espaces sur la courbe A_0H, suivant l'usage, à partir du point H, milieu de la trajectoire, et comptons les temps à partir de l'instant où le mobile tombe du point A_0, origine de la trajectoire, avec une vitesse nulle.

Soit S la distance HB_0. L'équation des espaces est de la forme

$$[1] \qquad S = f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction du temps t, qu'il s'agit de déterminer. L'équation des vitesses est aussi une fonction du temps, laquelle est, comme on sait, la dérivée de la fonction précédente. On aura donc

$$[2] \qquad V = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

(suivant la notation usitée en calcul différentiel). Il suffit donc de déterminer la fonction $S = f(t)$.

Or nous savons que, dans le mouvement curviligne varié, l'accélération tangentielle est $f''(t)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de la fonction du temps qui représente l'espace (39); or $f''(t)$ est la dérivée première de $f'(t)$, ou de $\left(\frac{ds}{dt}\right)$; elle est donc égale à $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ (suivant la notation usuelle). Nous savons, d'autre part, que la force motrice est égale au produit de la masse du mobile par l'accélération du mouvement qu'elle lui imprime (65). Elle est donc $m\frac{d^2s}{dt^2}$. Quant à la force accélératrice, on sait qu'elle est $p \sin \theta$ ou $mg \sin \theta$ en valeur absolue, et $-(mg \sin \theta)$ en tenant compte de son sens, qui est opposé à celui des espaces croissants. On peut donc écrire l'équation suivante :

$$-mg \sin \theta = m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \theta.$$

C'est ce qu'on appelle l'*équation différentielle du mouvement*. Il ne reste plus qu'à appliquer à la résolution de cette équation les règles du calcul intégral pour arriver à la solution de notre problème de dynamique.

4° *Intégration de l'équation différentielle.* — La première chose à faire, c'est de n'avoir dans l'équation différentielle qu'une seule fonction (ou S, ou θ) de la variable t. Il est facile d'en éliminer S, en faisant intervenir la relation géométrique entre S et θ, qui résulte de la forme de la trajectoire. On a, en effet (fig. 84),

$$S = l\theta,$$

d'où l'on déduit, en dérivant deux fois les deux membres de cette égalité,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Portons cette valeur dans l'équation différentielle du mouvement : elle devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

C'est sous cette forme qu'on la résout le plus commodément. Quand on connaitra θ en fonction de t, il sera facile d'en déduire la fonction

$$S = l\theta.$$

Il y a deux cas à considérer dans la résolution de cette équation :

I. Le cas particulier des *petites oscillations :* le point matériel exécute, de part et d'autre de sa position d'équilibre, des oscillations d'amplitude assez petite pour qu'on puisse substituer l'angle θ lui-même à son sinus. L'équation différentielle en est notablement simplifiée et devient alors

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.$$

II. Le cas général des *oscillations d'amplitude quelconque*, auquel correspond l'équation générale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

5° *Équations du mouvement pendulaire dans le cas des petites oscillations.* En appliquant les règles ordinaires du calcul intégral à la résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

on en déduit l'équation suivante :

$$\theta = M\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t + N\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

qu'on appelle l'*intégrale générale* de la précédente. Les coefficients M et N sont des constantes qui ont été introduites par les opérations. Si l'on multiplie les deux membres par l, on aura

$$l\theta = Ml\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + Nl\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Or $l\theta$ est précisément S; en posant $Ml = A$ et $Nl = B$, il vient l'équation

$$[1] \qquad S = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

qui est l'*équation des espaces.*

L'*équation des vitesses* s'obtiendra en dérivant par rapport à t les deux membres de celle-ci. On aura

$$[2] \qquad V = \frac{ds}{dt} = -A\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Reste à déterminer les coefficients A et B, au moyen des conditions initiales du problème. Il suffit, pour cela, d'écrire que, au temps zéro, la distance du mobile à l'origine était égale à $l\alpha = a$ et que la vitesse était nulle. On aura alors les deux égalités

$$a = A \qquad \text{et} \qquad 0 = B\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \text{d'où} \qquad B = 0.$$

En portant ces valeurs des constantes dans les équations du mouvement, on obtient

$$\text{Équation des espaces.} \ldots\ldots \quad S = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \qquad [1]$$

$$\text{Équation des vitesses} \ldots\ldots \quad V = -b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \qquad [2]$$

$\left(\text{en posant } b = a\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Ces deux équations déterminent toutes les circonstances du mouvement pendulaire.

6° *Discussion des équations.* — I. Au temps $t = 0$, on a $S = a$ et $V = 0$, c'est-à-dire que le point matériel possède son écart maximum et une vitesse nulle : il part du point A_0, extrémité de sa trajectoire.

II. Lorsque t croît, s décroît et V croît en valeur absolue, mais en restant négatif, ce qui indique simplement que, d'après le choix de l'origine des distances, la vitesse est dirigée dans le sens des espaces décroissants : le mobile décrit alors l'arc A_0H.

III. Lorsque t atteint une valeur telle que l'on ait $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = 0$, ce qui a lieu lorsque l'arc $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}$, on a en même temps

$$S = 0 \qquad \text{et} \qquad V = -b,$$

c'est-à-dire que l'écart est *nul* et la vitesse est *maximum* (en valeur absolue) : le mobile passe alors au point H. Soit T′ la durée de cette période de l'oscillation, elle est déterminée par l'égalité

$$T'\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

IV. Lorsque t dépasse la valeur T′, l'espace croît en valeur absolue, mais devient négatif, car l'arc $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ devient plus grand que $\frac{\pi}{2}$. Quant à la vitesse, elle reste négative, c'est-à-dire toujours dirigée de A_0 vers A_1, et elle décroît en valeur absolue.

V. *Durée de l'oscillation simple.* — Lorsque t atteint une valeur telle, que l'on ait $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = -1$, ce qui a lieu lorsque l'ar $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \pi$, on a en même temps

$$S = -a \qquad \text{et} \qquad V = 0,$$

c'est-à-dire que, lorsque l'écart est devenu maximum du côté HA_1, la vitesse est redevenue nulle. Le mobile est donc alors arrivé à l'autre extrémité de sa course, au point A_1. On voit que la portion HA_1, c'est-à-dire la branche ascendante de la trajectoire, est égale à la branche descendante AH. Appelons T la durée totale de l'*oscillation simple*, c'est-à-dire la période du mouvement compris entre les points A et A_1, elle est donnee par l'égalité

$$[3] \qquad T\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi, \qquad \text{d'où} \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Telle est la troisième équation fondamentale du mouvement pendulaire dans le cas particulier des petites oscillations. On voit que la durée T d'une petite oscillation est indépendante de son amplitude α.

On voit aussi que $T = 2T'$: ce qui prouve que les deux branches de la trajectoire sont non seulement *égales*, mais *tautochrones*, c'est-à-dire parcourues dans le même temps.

VI. Lorsque t dépasse la valeur T, on voit que l'arc $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ croît d'abord entre π et $3\frac{\pi}{2}$, puis entre $3\frac{\pi}{2}$ et 2π. Par suite, $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ repasse par les mêmes valeurs qu'entre 0 et π, mais en sens inverse, c'est-à-dire qu'il est d'abord négatif et décroît de -1 à 0, puis qu'il est positif et croît de 0 à $+1$; de même $\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ varie d'abord de 0 à $+1$ en restant positif, puis de -1 à 0 en restant négatif. De là il résulte que le mobile parcourt l'arc A_1HA_0 dans le même temps et avec les mêmes vitesses, changées de signe, que l'arc A_0HA_1. Le mouvement de retour est donc identique au mouvement d'aller, et l'oscillation complète se compose de deux oscillations simples parfaitement égales.

VII. Enfin, lorsque t dépasse la valeur 2T, l'arc $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ dépasse la valeur 2π, et repasse alors par les mêmes valeurs qu'à partir de 0. Le mouvement se reproduit alors, identique à lui-même, au bout de la période de temps $\tau = 2T$, qui est définie par l'égalité

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

7° *Mouvement pendulaire d'amplitude quelconque.* — Dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement est

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

On peut en déduire assez facilement l'équation des vitesses. En effet, multiplions les deux membres de l'équation par $2d\theta$; elle devient

$$2\frac{d^2\theta}{dt^2}d\theta = -2\frac{g}{l}\sin\theta\,d\theta.$$

Or on sait que le premier membre est la dérivée de la fonction $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et le second membre la dérivée de la fonction $\frac{2g}{l}\cos\theta$: on a donc pour l'intégrale de cette première équation différentielle, en appelant M une constante,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + M.$$

On déterminera la constante M à l'aide des conditions initiales du mouvement. En y faisant $t = 0$, on doit avoir $\theta = \alpha$ et la vitesse $V = 0$; or V c'est $\frac{ds}{dt}$ ou $l\frac{d\theta}{dt}$. On a donc aussi $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Portons ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + M, \qquad \text{d'où} \qquad M = -\frac{2g}{l}\cos\alpha.$$

Remplaçons M par cette valeur dans l'équation générale, elle devient

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}.$$

C'est l'*équation des vitesses* à une constante près $\left(\text{puisque } V = l\frac{d\theta}{dt}\right)$. Le signe *moins* correspond à la première phase de la période, quand la vitesse croît dans le sens des espaces décroissants, c'est-à-dire de A_0 en A_1 (fig. 84), et le signe + correspond à la seconde phase, quand la vitesse croît dans le sens des espaces croissants, c'est-à-dire de A_1 vers A_0.

Quant à l'équation des espaces, il n'est pas possible de la trouver exactement par les procédés du calcul intégral. Nous nous bornerons à donner l'équation de la durée d'une oscillation simple. Elle est constituée par un développement en série, d'un nombre illimité de termes :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Remarques. — 1° On voit que, dans le cas général, la durée d'une oscillation n'est pas indépendante de l'amplitude.

2° La formule précédente $\left(T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ n'est donc exactement *vraie* que lorsque l'amplitude des oscillations est, non pas seulement *très petite*, mais *infiniment petite*, c'est-à-dire lorsqu'elle tend vers zéro : c'est ce qu'on appelle une *formule limite*.

96. **Autre définition du mouvement pendulaire de petite amplitude.** — Il est intéressant de remarquer que ce mouvement oscillatoire *curviligne* est identique à un mouvement oscillatoire rectiligne qui serait défini de la manière suivante :

Pendant qu'un mobile M (fig. 85) parcourt, d'un mouvement uniforme, la circonférence d'un cercle, A_0MA_1, on le projette à chaque instant sur le diamètre A_0A_1 du point de départ : la projection M′ du mobile décrit alors évidemment sur ce diamètre un mouvement rectiligne oscillatoire, de A_0 en A_1 et de A_1 en A_0. *C'est ce mouvement oscillatoire qui est identique à un mouvement pendulaire de petite amplitude.*

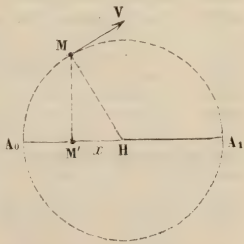


Fig. 85.

Nous allons démontrer que ces deux mouvements sont représentés par les mêmes équations.

En effet, supposons que le cercle ait pour rayon $l\alpha$, c'est-à-dire la longueur rectifiée de la trajectoire circulaire décrite dans le précédent mouvement pendulaire, et soit $V = l\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$ la vitesse du mouvement circulaire uniforme. Pre-

nons pour origine du temps l'instant où le mobile M part du point A_0 (fig. 85) sur la circonférence, pendant que le mobile M′ part du même point sur le diamètre; prenons pour origine des espaces, pour le mouvement rectiligne, le centre H de la circonférence. Soient M et M′ les positions des deux mobiles à l'instant t; désignons par x l'espace HM′. On a évidemment

$$[1] \qquad x = \mathrm{HM} \,.\, \cos \mathrm{M'HM} = l\alpha \,.\, \cos . \frac{\mathrm{V}t}{l\alpha} = l\alpha \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

(en posant $a = l\alpha$).

C'est l'*équation des espaces :* on voit qu'elle est identique à celle du mouvement pendulaire.

En dérivant les deux membres de l'équation, on obtiendra l'équation des vitesses

$$[2] \qquad \mathrm{V} = \frac{dx}{dt} = -a\sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t = -b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

$\left(\text{en posant } b = a\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Elle est identique à l'équation des vitesses du mouvement pendulaire. Enfin, la durée d'une oscillation simple est évidemment égale à celle que met le mobile M pour parcourir la demi-circonférence A_0MA_1. On a donc

$$[3] \qquad \mathrm{T} = \frac{\pi \,.\, \mathrm{HM}}{\mathrm{V}} = \frac{\pi \,.\, l\alpha}{l\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La formule est identique à la formule correspondante du mouvement pendulaire.

Remarque. — On peut se servir de cette propriété pour établir d'une manière indirecte, mais plus simple, la formule de la durée de l'oscillation simple dans le mouvement pendulaire à petites oscillations.

97. **Mouvement vibratoire.** — 1° *Définition et équations.* — Le mouvement alternatif de la projection M′ sur le diamètre $A_0 A_1$ est le type du *mouvement vibratoire.* On voit que ce mouvement vibratoire est un mouvement oscillatoire *rectiligne*, identique au mouvement pendulaire d'amplitude infiniment petite. Il est donc caractérisé par les deux équations

$$[1] \qquad x = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \quad \text{(équation des espaces)},$$

$$[2] \qquad \mathrm{V} = -b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \quad \text{(équation des vitesses)},$$

d'où l'on déduit la troisième équation

$$[3] \qquad \mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{(équation de la durée)}.$$

2° *Cause du mouvement.* — Il est facile de résoudre, dans ce cas, le second problème fondamental de la dynamique : *Étant donné le mouvement d'un corps, déterminer les forces qui agissent actuellement sur ce corps.* Nous savons en effet que les équations [1] et [2] proviennent, par intégration, de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\, x.$$

En multipliant les deux membres par m, il vient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x.$$

Or, en appelant f la force accélératrice inconnue, on a, d'après un principe de mécanique précédent,

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x.$$

Cette équation prouve que le mobile, de masse m, est sollicité à l'instant t, et en un point M de sa trajectoire (fig. 86), par une force f qui est proportionnelle à la distance OM de sa position actuelle au centre O de la trajectoire, et constamment dirigée vers ce centre, parallèlement à la droite $A_0 A_1$. Tout se passe donc *comme si le point* O *était un centre d'attraction*, c'est-à-dire le siège d'une force qui attire le point matériel M proportionnellement à la masse m et à la distance x de ce dernier. L'attraction exercée à l'unité de distance et sur l'unité de masse serait $\frac{g}{l}$: c'est le coefficient caractéristique de la force. En le posant égal à γ, les équations du mouvement prennent une forme plus simple. Elles deviennent

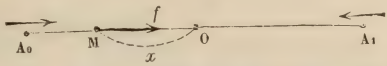


Fig. 86.

[1] $$x = a\cos t\sqrt{\gamma},$$

[2] $$V = -b\sin t\sqrt{\gamma},$$

[3] $$T = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}};$$

a représente toujours la distance maximum du mobile au centre; b représente la vitesse maximum en grandeur absolue, et s'exprime en fonction de a et de la constante par l'équation

$$b = a\sqrt{\gamma}.$$

Remarques. — *Exemples.* — C'est principalement pour définir le mouvement vibratoire que nous avons insisté sur le cas du mouvement pendulaire de petite amplitude. Car, de tous les mouvements qu'on étudie en physique, le mouvement vibratoire est le plus important, à cause de ses effets nombreux et extrêmement variés. Nous verrons en effet que le son est produit par un mouvement vibratoire des corps sonores, transmis par l'air et les milieux élastiques, et que la lumière est aussi un mouvement vibratoire des corps lumineux ou des corps éclairés, transmis par l'éther. Les vibrations sonores et les vibrations lumineuses sont caractérisées par les équations du mouvement vibratoire : la position de la molécule vibrante sur sa trajectoire, sa vitesse à l'instant t, ainsi que la durée de l'oscillation (ou, ce qui revient au même, le nombre des oscillations par seconde), sont données par les équations [1], [2] et [3].

Forme ordinaire des équations. — Il est d'usage d'écrire ces équations sous une autre forme, en éliminant la constante γ en fonction d'une autre constante τ qui est égale à 2T, c'est-à-dire à la durée d'une oscillation complète. On a

$$\tau = 2T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{\gamma} = \frac{2\pi}{\tau}$$

Portons cette valeur de $\sqrt{\gamma}$ dans les équations de la vibration : elles deviennent

[1] $$x = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \ldots \quad \text{(équation des espaces).}$$

[2] $$V = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \ldots \quad \text{(équation des vitesses).}$$

[3] $$\tau = 2T = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \ldots \quad \text{(durée de l'oscillation complète).}$$

CHAPITRE IV

DÉTERMINATION DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR. — PENDULE. EXPÉRIENCES DE BORDA. — APPLICATIONS DU PENDULE.

98. **Procédés divers de détermination de** g. — Nous avons défini précédemment (86, 4°) l'intensité de la pesanteur : *l'action que la pesanteur exerce sur l'unité de masse*, ou, autrement dit, *le poids de l'unité de masse*. Nous avons démontré qu'elle est représentée par le même nombre que l'accélération g de la chute des corps dans le vide. Par conséquent, tous les moyens qui nous ont servi à vérifier les lois de la chute des corps peuvent être utilisés pour mesurer g, et par suite l'intensité de la pesanteur.

1° *Procédé du plan incliné*. — Ainsi, dans la chute sur un plan incliné (82), si l'on néglige le frottement et la résistance de l'air, l'accélération γ est liée à l'accélération normale g par l'une des équations suivantes (qui sont équivalentes) :

[1] $$\gamma = g \cdot \frac{h}{l} \ldots \quad (h \text{ hauteur du plan, et } l \text{ longueur}),$$

[2] $$\gamma = g \sin \alpha \ldots \quad (\alpha \text{ inclinaison du plan}).$$

En prenant un plan suffisamment incliné, on ralentira assez le mouvement pour le rendre aisément observable. Supposons qu'on ait mesuré l'espace parcouru en 1 seconde par un corps pesant qui tombe sur le plan, sans vitesse initiale : soit e_1 le nombre trouvé. On a

$$e_1 = \frac{1}{2}\gamma, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 2e_1;$$

donc

$$g = 2e_1 \frac{l}{h}.$$

2° *Machine d'Atwood.* — De même, l'accélération γ de la chute dans la machine d'Atwood (83) est liée à l'accélération normale g par la relation

$$\gamma = g \cdot \frac{p}{2P + p}.$$

En mesurant e_1 comme il a été fait pour la vérification de la loi des espaces, on aura

$$\gamma = 2e_1, \quad \text{d'où} \quad g = 2e_1 \frac{2P + p}{p}.$$

3° *Appareil Morin.* — Enfin, si l'on étudie la courbe obtenue à l'aide de l'appareil Morin (fig. 61), on voit que l'une des lignes parallèles à MK, par exemple $a''c''$, donne directement l'espace e_t parcouru dans le temps t par le corps pesant.

On a donc (en négligeant toujours le frottement et la résistance de l'air)

$$a''c'' \quad \text{ou} \quad e_t = \frac{1}{2} g t^2.$$

Il suffit de connaître t, qui est proportionnel à la ligne Ma''.

Or, en appelant ω la vitesse angulaire du cylindre, supposée constante, et R le rayon du cylindre, on a

$$ma'' = \omega R t,$$

d'où l'on déduit t, après avoir déterminé ω par une expérience préalable.

4° *Procédé du pendule.* — Tous les procédés précédents sont plus théoriques que pratiques. Ces mesures comportent de nombreuses erreurs, dues aux frottements des organes et à la résistance de l'air, qui enlèvent toute précision au résultat final. Aussi a-t-on eu recours, pour mesurer g avec exactitude, à une autre méthode, déduite des lois du mouvement pendulaire et fondée sur l'emploi du pendule.

99. **Pendule.** — 1° *Définitions.* — On dit souvent qu'il y a deux sortes de *pendules :* le *pendule simple* et le *pendule composé.* En réalité, il n'existe en physique qu'un seul pendule : c'est le *pendule composé.* Tout corps pesant qui est mobile soit autour d'un point fixe, appelé *centre de suspension*, soit autour d'un axe fixe horizontal, appelé *axe de suspension*, constitue un pendule composé

D'après cette définition, le pendule peut avoir une forme quel-

conque; on lui donne habituellement celle d'une masse métallique, à surface sphérique ou lenticulaire, soutenue par un fil ou par une tige rigide également métalliques. Un fil à plomb (fig. 40) est l'exemple le plus simple de la première forme : le point d'attache de l'extrémité supérieure du fil est le centre de suspension. Les balanciers d'horloge des figures 50 et 96 représentent les types de pendule les plus usuels. L'axe de suspension est réalisé tantôt par l'arête vive, ou *couteau*, d'un prisme triangulaire en acier, qui est encastré dans la tige du pendule, perpendiculairement à sa longueur (fig. 95), tantôt par une lame d'acier, mince et flexible, qui soutient la tige du pendule et qui se courbe légèrement à chacun de ses mouvements (fig. 105). Toutes les fois qu'on parle de pendule en physique, c'est de l'un de ces appareils qu'il est question.

Quant au *pendule simple* ou *pendule idéal*, ce n'est point un pendule; c'est une conception théorique absolument irréalisable dans la pratique, puisqu'on le définit : un *point matériel pesant*, suspendu, par un fil *inextensible* et *sans poids*, à un point fixe autour duquel il peut se mouvoir librement. Nous avons dit précédemment (95) quel est le sens précis de cette conception et quelle en est l'utilité dans l'étude mathématique du mouvement pendulaire.

2° *Mouvement oscillatoire.* — Tout pendule, abandonné à lui-même, prend, comme un fil à plomb, une position d'équilibre stable : cette position est telle, que la verticale de son centre de gravité rencontre l'axe de suspension.

Imaginons qu'on coupe le pendule par un plan vertical passant par son centre de gravité G et perpendiculaire à son axe de suspension, et prenons cette section pour plan de la figure 87. Le pendule est représenté par la figure plane OG, et son axe de suspension, qui coupe le plan au point O, est représenté par ce point. Dans la position d'équilibre, la verticale du centre de gravité G va passer par le point O, et par suite le poids P du pendule, appliqué en G, et dirigé suivant la verticale, est détruit par la résistance du point fixe : il n'a pas de composante horizontale, qui puisse entraîner le pendule dans le sens où il est mobile, c'est-à-dire perpendiculairement à la verticale OG. Menons dans le plan, avec un rayon égal à OG, un arc de cercle A_0HA_1 : si nous dérangeons le pendule de sa position d'équilibre, son centre de gravité se déplacera sur cet arc de cercle, comme un point matériel pesant qui serait assujetti à s'y mouvoir.

Amenons le point G dans la position A_0, de telle manière que la tige du pendule fasse un angle α, égal à HOA_0, avec sa position

initiale. La direction du poids P ne passant plus par le point fixe, ce poids peut se décomposer en deux forces : l'une, P''_0, dirigée dans le prolongement de la tige, et l'autre P'_0, dirigée suivant la tangente à l'arc HA_0. La composante P''_0 est détruite par la résistance du point fixe; mais la composante tangentielle agit pour

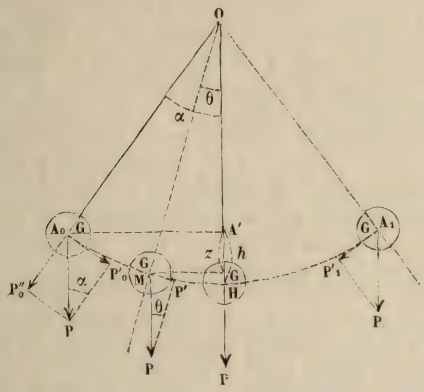


Fig. 87.

entraîner le pendule suivant l'arc A_0H et pour le ramener vers sa position initiale d'équilibre.

On voit, d'après le rectangle des forces $A_0P'_0PP''_0$ (fig. 87), que cette composante P'_0 est égale à P sin α : la force accélératrice est donc proportionnelle au sinus de l'angle d'écart, comme dans le mouvement du *pendule simple*, et elle diminue en même temps que cet angle d'écart. En M, par exemple, lorsque la tige du pendule ne fait plus qu'un angle θ avec la position initiale, on voit, d'après le rectangle des forces, que la composante tangentielle est devenue P′ et n'est plus égale qu'à P sin θ; et cette composante est complètement annulée, lorsque le pendule a atteint de nouveau sa position initiale OH.

Mais il ne s'y arrête pas et n'y reste pas en équilibre, comme précédemment, car il ne se trouve plus du tout dans les conditions initiales. En passant de la position OA_0 à la position OH, il *est tombé* d'une certaine hauteur *h*, qui est la même pour chacun de ses points, et qui est égale à la variation de niveau A′H de son centre de gravité. Il a donc acquis en tombant une certaine puis-

sance vive, qui est déterminée par le théorème des forces vives

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = Ph;$$

elle est égale au travail moteur de la pesanteur pendant la chute, c'est-à-dire à Ph. Le pendule continuera donc son mouvement et dépassera la verticale, entraîné par sa vitesse acquise.

Or, si l'on répète en un point quelconque de l'arc HA_1 la même construction qu'au point M, on constate que la composante tangentielle P'_1 du poids est dirigée en sens inverse du mouvement; la pesanteur agit donc comme une force retardatrice pendant cette deuxième phase du mouvement, et elle enlève peu à peu au pendule la vitesse qu'elle lui avait communiquée pendant la descente. Il arrivera donc un moment où la force vive acquise sera complètement annulée par le travail résistant de la pesanteur : le pendule cessera alors de monter, puis retombera immédiatement vers le point H, qu'il dépassera de nouveau, en vertu de sa vitesse acquise, et remontera vers le point A_0 jusqu'à ce que sa force vive soit anéantie. A l'instant de ce nouvel arrêt, le pendule se retrouvera dans les mêmes conditions mécaniques qu'au début, lorsqu'on l'avait écarté pour la première fois de sa position d'équilibre : il aura accompli une première période de son mouvement; et ce mouvement se continuera de la sorte, par une suite plus ou moins longue de périodes analogues qui constituent le *mouvement oscillatoire*.

On nomme *oscillation simple* le passage d'une position extrême du pendule à l'autre position extrême, de part et d'autre de la verticale. La *période* ou *oscillation complète* se compose de la succession de deux oscillations simples, de sens opposés. L'angle $HOA_0 = \alpha$ qui mesure le déplacement angulaire de chacun des points du pendule, s'appelle *amplitude* de l'oscillation.

Remarque. — Si la pesanteur était la seule cause retardatrice du mouvement, comme elle en est la seule cause accélératrice, le point d'arrêt A_1 serait exactement symétrique du point de départ A_0, comme dans le cas théorique du *pendule simple*. En effet, la force vive que le pendule a acquise en tombant de la hauteur h ne pourrait être anéantie qu'à la suite d'une ascension égale à la chute. De même, le pendule s'élèverait jusqu'au point A_0 dans son mouvement de retour, et la période oscillatoire serait constituée par deux oscillations simples, absolument identiques. Par suite, l'amplitude resterait invariable, et le mouvement du pendule, une fois commencé, durerait indéfiniment. Mais il n'en est pas ainsi, parce que deux causes, étrangères à la pesanteur, concourent sans cesse à retarder le mouvement oscillatoire pendant les phases d'ascension; ce sont : 1° la résistance de l'air, dans lequel le pendule oscille; 2° le frottement, plus ou moins atténué, mais toujours sensible, qui se produit inévitablement sur l'axe de suspension. C'est pourquoi le mouvement de va-et-

vient, périodique et régulier, du pendule composé constitue un mouvement oscillatoire analogue, mais non identique, au mouvement pendulaire (*pendule simple*) que nous avons étudié précédemment (95).

100. Lois expérimentales du pendule. — Les lois du mouvement pendulaire proprement dit, trouvées par le calcul, ne peuvent donc pas s'appliquer rigoureusement au mouvement d'un pendule ordinaire. Il a donc fallu étudier directement celui-ci par l'expérience. Cette étude, commencée et presque achevée par Galilée dès l'année 1583, fut complétée au commencement de ce siècle par Borda et par Biot. Elle a conduit aux lois suivantes :

1° Loi du décroissement des amplitudes. — *L'amplitude des oscillations décroît en progression géométrique lorsque leur nombre croît en progression arithmétique.*

Cette loi fut découverte par Borda et vérifiée ensuite par Biot et par plusieurs autres expérimentateurs. Toutes les suivantes ont été découvertes par Galilée, et sont, par conséquent, de beaucoup antérieures.

2° Loi de l'isochronisme des petites oscillations. — On peut énoncer cette loi de deux manières :

I. *Les petites oscillations d'un pendule sont isochrones* (c'est-à-dire de même durée), *quelle qu'en soit l'amplitude ;* ou bien, *la durée d'oscillation d'un pendule est indépendante de son amplitude, pourvu que celle-ci soit petite.*

L'un ou l'autre de ces énoncés a la même signification. On a vu que les amplitudes d'un pendule ordinaire, oscillant dans l'air, décroissent d'après la loi précédente. Les durées d'oscillation du pendule commencent nécessairement par décroître aussi, en même temps que ces amplitudes ; mais, à partir d'une certaine valeur de l'amplitude (environ 2° ou 3°), la diminution dans la durée n'accompagne plus la diminution dans l'amplitude : celle-ci continuant à décroître, la durée reste constante. Cette durée d'oscillation (pour les petites amplitudes) est donc un caractère spécifique d'un pendule déterminé.

3° Loi des longueurs. — *La durée d'oscillation (de faible amplitude) d'un pendule est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.*

Dans cet énoncé, l'expression *longueur du pendule* a le sens particulier, et tout expérimental, que lui donnait Galilée. Il opérait avec des pendules analogues à ceux de la figure 88, constitués tout simplement par une boule sphérique pesante, suspendue à l'aide d'un fil de poids négligeable ; la longueur de chaque pendule était la longueur totale du fil de suspension, augmentée du rayon de la boule.

4° Loi des substances. — *La durée d'oscillation (de faible amplitude) d'un pendule est indépendante de la substance dont il est fait.*

Cela veut dire que des pendules, de même longueur, constitués par des sphères égales mais de substances différentes, ont même durée d'oscillation, à partir de l'amplitude pour laquelle l'isochronisme est atteint.

101. **Vérification expérimentale des lois du pendule.** — On se sert, pour vérifier ces lois, de pendules composés qui se rapprochent autant que possible de ceux que Galilée employa pour les découvrir. Ce sont de petites sphères, de substance très dense, comme le plomb ou le platine, suspendues par des fils très flexibles et très fins dont le poids est négligeable (fig. 88). On prend pour la longueur de ces pendules, comme nous l'avons déjà dit, la distance du centre de la sphère au point de suspension.

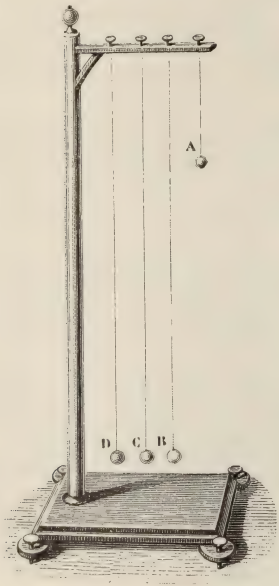


Fig. 88.

La méthode générale de vérification est la suivante : On écarte le pendule de la verticale, d'un angle déterminé A qui mesure l'amplitude initiale, et l'on compte la durée totale d'une série de 100 oscillations simples à l'aide d'un chronomètre qui marque le quart de seconde. Cet instrument est muni d'un bouton qu'il suffit de pousser dans un sens ou dans l'autre pour faire partir l'aiguille ou pour l'arrêter. Soit θ la durée totale de la série, et soit A′ l'angle d'écart final ; on prend $\frac{\theta}{100}$ pour durée de l'oscillation et $\frac{A + A'}{2}$ pour amplitude moyenne.

1° *Loi des amplitudes.* — Nous avons dit que c'est Borda qui l'a découverte. L'amplitude initiale qu'il donnait à son pendule était très petite : elle ne dépassait pas 1/3 de degré. Elle se réduisait aux 2/3 environ de sa valeur initiale, après 1800 oscillations.

Biot confirma la loi de Borda, pour des amplitudes bien plus grandes. Ainsi, dans l'une de ses expériences, l'amplitude initiale était notablement supérieure

à 1°; elle était réduite aux 0,6 environ de sa valeur après 7000 oscillations.

2° *Loi de l'isochronisme.* — On compte successivement plusieurs séries de 100 oscillations, à partir d'un angle d'écart déterminé. L'amplitude moyenne de ces oscillations décroît peu à peu. En comparant les durées moyennes successives $\frac{0}{100}$, $\frac{0_1}{100}$.... on constate qu'elles diminuent en même temps que les amplitudes moyennes $\frac{A + A'}{2}$, $\frac{A_1 + A'_1}{2}$..., tant que celles-ci sont grandes, mais qu'elles atteignent une valeur constante dès que les amplitudes ne dépassent pas 2 ou 3 degrés.

3° *Loi des longueurs.* — On fait osciller des pendules dont les longueurs sont entre elles comme les nombres 1, 4, 9.... On constate que les durées d'oscillation croissent comme les nombres 1, 2, 3..., c'est-à-dire comme les racines carrées des longueurs (fig. 88).

4° *Loi des substances.* — Cette loi n'est pas autre chose, sous une forme nouvelle, que la première loi de la chute des corps, à savoir que la pesanteur agit avec la même intensité sur toutes les substances : d'où il résulte que tous les corps tombent également vite dans le vide. Il suffit, pour la vérifier, de constater que la durée d'oscillation d'un pendule est indépendante de la substance qui le constitue. Pour cela, on suspend à un même support (fig. 88) plusieurs pendules, B, C, D, de même longueur, constitués par des sphères de même diamètre, mais de substances très différentes, par exemple en platine, en fer, ou en verre creux rempli d'eau. On écarte ces trois pendules d'un même angle et on les abandonne au même instant, et l'on voit que leurs oscillations sont indéfiniment concordantes ; ou bien, plus simplement, on mesure leurs durées d'oscillation (pour une petite amplitude) et l'on constate que ces durées sont sensiblement égales malgré l'influence perturbatrice de l'air.

102. Comparaison du pendule composé et du pendule simple. — 1° *Analogie des lois.* — Il n'y a pas d'inconvénients à employer l'expression *pendule simple*, quand on y attache le sens précis indiqué précédemment (95, 1°). Elle est même très commode pour énoncer d'une manière concrète les lois du mouvement pendulaire proprement dit, c'est-à-dire du mouvement oscillatoire d'un point matériel pesant M, assujetti à tomber sur un arc de cercle A_0HA_1 (fig. 89), situé dans un plan vertical, et orienté symétriquement par rapport à la verticale Oz du centre du cercle O. La longueur l du pendule simple, c'est le rayon OH ou OA_0 de l'arc, et le centre O du cercle devient le centre de suspension du pendule simple ou la trace de l'axe de suspension sur le plan de la trajectoire.

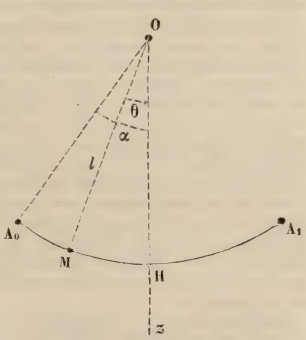


Fig. 89.

Loi de l'isochronisme. — Nous avons vu que la durée de l'oscillation simple du pendule simple est donnée, dans le cas d'une amplitude finie quelconque α, par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Si nous posons

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \ldots$$

nous pourrons écrire

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + R\right).$$

La durée d'oscillation du pendule simple, dans le cas d'une amplitude quelconque, est donc exprimée par la somme de deux termes, l'un $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ qui est constant et indépendant de l'amplitude, et l'autre qui est une fraction du précédent, représentée par une fonction de α. Donc, en réalité, pour le *pendule simple* comme pour le *pendule composé*, *la durée d'oscillation dépend de l'amplitude* et diminue en même temps que l'amplitude.

D'autre part, le terme variable R est une très petite fraction du terme constant. Il est en effet constitué par une série très convergente dont la somme tend rapidement vers zéro quand l'amplitude diminue. Par exemple, si l'on calcule R pour $\alpha = 5^0$ et $l = 1^m$, on trouve une fraction au plus égale à 0,0001 ; pour une amplitude inférieure à 2^0 le terme R serait une fraction complètement négligeable. On peut donc dire, pour le *pendule simple* comme pour le *pendule composé*, que *la durée des petites oscillations est indépendante de l'amplitude ;* et l'on peut ajouter, pour le *pendule simple*, que cette durée tend vers une valeur-limite, exprimée par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Loi des longueurs. — Il résulte en outre de cette dernière formule que, pour le *pendule simple* comme pour le *pendule composé*, la durée des *petites oscillations* est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.

Lois du décroissement des amplitudes et des substances. — Il n'y a pas lieu de chercher à étendre ces deux lois au cas du pendule simple. En effet, d'abord les pendules simples oscillent dans le vide et sont, par conséquent, à l'abri de toute diminution d'amplitude provenant de la résistance de l'air ; ensuite, comme ils sont tous constitués par des points matériels pesants qu'on peut supposer identiques, il n'y a pas lieu de considérer la variation de substance.

Identité des équations du mouvement. — Cette analogie des lois de la durée d'oscillation pour les deux sortes de pendules se poursuit-elle dans les équations de leurs mouvements? C'est ce que nous verrons en cherchant les équations du mouvement oscillatoire du pendule composé. Reportons-nous pour cela au § 99 et à la figure 87 ; nous avons invoqué le théorème des forces vives pour rendre compte du mouvement oscillatoire : écrivons l'équation qui résulte de ce théorème.

Évaluons d'abord le travail total effectué par la pesanteur pour amener le pendule de la position A_0 à une position quelconque M de sa trajectoire. D'après les définitions relatives au travail des forces constantes (67), ce travail total est égal au travail du poids P appliqué au centre de gravité G ; or le travail du poids est égal au produit de la force par le déplacement vertical de son point d'application, c'est-à-dire à Pz. Si l'on appelle a la distance GO du centre de gravité G à l'axe de suspension, on a (fig. 87)

$$z = GO - A'O = a(\cos\theta - \cos\alpha).$$

D'autre part, on a

$$P = Mg,$$

M étant la masse totale du pendule : l'expression du travail total de la pesanteur est donc

$$Mga(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Évaluons maintenant la force vive totale acquise par le pendule. Nous avons vu (69) que la force vive d'un système matériel animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe est exprimée à un instant quelconque par le produit $\omega^2 \sum mr^2$, ω étant la vitesse angulaire au même instant et $\sum mr^2$ le moment d'inertie du système pris par rapport à l'axe de rotation. Appelons I le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension ; sa vitesse angulaire à l'instant t est évidemment égale à $\frac{d\theta}{dt}$, c'est-à-dire à la dérivée, par rapport à t, de l'angle de rotation θ, prise en signe contraire, à cause du choix de l'origine des angles. On a donc pour l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = Mga(\cos\theta - \cos\alpha).$$

On en déduit, en résolvant l'équation par rapport à dt,

$$dt = \mp \sqrt{\frac{I}{2Mag}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Or nous retrouvons là précisément l'*équation différentielle* du mouvement d'un pendule simple dans le cas d'une amplitude quelconque. La seule différence, c'est que le coefficient constant l, qui exprimait la longueur du pendule simple, est remplacé ici par un autre coefficient constant, égal à $\frac{I}{Ma}$. En résolvant cette équation différentielle, nous retrouverions les mêmes équations de mouvement que dans le cas du pendule simple, à la variation près du coefficient constant l. On peut donc dire que :

Le mouvement oscillatoire d'un pendule composé est identique à celui d'un pendule simple dont la longueur serait égale à $\frac{I}{Ma}$.

103. **Formule du pendule composé. — Longueur du pendule composé, longueur du pendule simple synchrone** — Parmi les équations du mouvement oscillatoire, une seule nous intéresse au point de vue des applications : c'est celle qui donne la durée d'une oscillation simple. C'est à celle-là qu'on donne spécialement le nom de *formule du pendule*. Elle est, soit

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\ 3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right],$$

pour les oscillations d'amplitude finie ; soit

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

pour les oscillations infiniment petites.

On la prend encore sous une troisième forme, lorsque les oscillations, sans être infiniment petites, sont d'assez faible amplitude pour qu'on puisse négliger toutes les puissances du sinus supérieures à la deuxième, et remplacer le sinus par l'arc lui-même. On a alors

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right].$$

C'est sous cette dernière forme qu'elle a été utilisée par Borda pour la détermination de g.

Dans toutes ces formules, le coefficient L a la valeur indiquée ci-dessus : à savoir $\frac{I}{Ma}$, I étant le moment d'inertie du pendule, calculé par rapport à l'axe de suspension, M la masse totale du pendule et a la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension. Par analogie avec la formule du pendule simple, on donne au coefficient L le nom de *longueur du pendule composé*.

D'après la méthode qui a permis de la déterminer, on voit que cette longueur représente celle d'un pendule simple qui aurait la même durée d'oscillation que le pendule composé. C'est pourquoi on appelle encore ce coefficient *longueur du pendule simple synchrone du pendule composé* (c'est-à-dire qui a des oscillations de même durée, de σύν, avec, et χρόνος, temps).

Remarque. — On peut concevoir aisément et sans calculs l'existence nécessaire du pendule simple *synchrone* d'un pendule quelconque. En effet, si les divers points matériels qui le constituent étaient isolés, ils décriraient leurs oscillations dans des temps d'autant plus longs qu'ils sont plus éloignés du point de suspension. Or, tous ces points étant invariablement liés entre eux, les durées de leurs oscillations sont nécessairement ramenées à une valeur moyenne commune. Par suite, le mouvement des points les plus rapprochés de l'axe de suspension se trouve retardé, tandis que celui des plus éloignés est accéléré. Entre ces deux positions extrêmes, il y a donc des points qui ne sont ni accélérés, ni retardés, et qui oscillent comme s'ils n'étaient pas liés au reste du système. Ces points sont équidistants de l'axe de suspension et leur ensemble forme une ligne parallèle à celui-ci, qu'on appelle *axe d'oscillation*. L'un quelconque de ces points matériels constitue évidemment un pendule simple *synchrone* du pendule composé. Tous ces pendules simples ont une même longueur, qui est la distance de l'axe de suspension à l'axe d'oscillation, et qui est évidemment égale à la longueur du pendule simple synchrone.

104. Cinquième loi du pendule. Loi des intensités. — 1° *Énoncé.* — La formule du pendule, dans le cas des petites oscillations, indique une nouvelle loi, qui avait échappé à Galilée et qu'on ne pouvait point deviner sans calcul, ni découvrir sans se déplacer à la surface de la terre. On peut en donner deux énoncés :

I. *La durée d'oscillation est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'intensité de la pesanteur.*

En effet, soient g' et g'' les intensités de la pesanteur dans deux lieux différents où l'on fait osciller successivement le même pendule, on aura, d'après la formule, pour les durées T′ et T″ d'oscillation :

$$T' = \pi\sqrt{\frac{L}{g'}} \quad \text{et} \quad T'' = \pi\sqrt{\frac{L}{g''}}.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre et en simplifiant, on a

$$\frac{T'}{T''} = \frac{\sqrt{g''}}{\sqrt{g'}}.$$

II. On déduit de cette équation $T'\sqrt{g'} = T''\sqrt{g''} =$ constante. Cette équation signifie que, *pour un pendule de longueur donnée, le produit de la durée d'oscillation par la racine carrée de l'intensité de la pesanteur est un nombre constant.*

Ce deuxième énoncé de la loi des intensités est souvent plus commode dans les calculs.

2° *Vérification expérimentale.* — Pour vérifier cette loi, il faudrait faire osciller successivement le même pendule dans divers lieux où les valeurs de g fussent notablement différentes. On n'aurait qu'à comparer les durées T′, T″..., mesurées dans chaque cas, aux valeurs correspondantes g', g''... de l'intensité de la pesanteur. Mais, comme la seule méthode qui permette de déterminer g avec exactitude est précisément fondée sur la formule du pendule, on ne saurait, sans faire un cercle vicieux, employer ce procédé de vérification. On se sert alors d'un artifice expérimental analogue au principe de la machine d'Atwood.

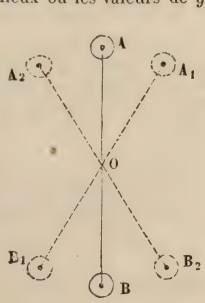


Fig. 90.

On constitue un pendule composé avec deux fortes masses en plomb, l'une A pesant P et l'autre B pesant $P + p$, fixées aux extrémités d'une règle de sapin, dont le poids est négligeable. Perpendiculairement à la règle et en son milieu O, on encastre un couteau d'acier à arête horizontale, qui sert d'axe de suspension. On a ainsi un pendule composé, de longueur sensiblement égale à OB (fig. 90), et de masse égale à $2M + m$, sollicité par le seul poids p, car la résultante des deux poids P passant par le milieu O du système est constamment annulée par la résistance

du support. Par conséquent, l'accélération sera diminuée, comme dans la machine d'Atwood (85, 1°), dans le rapport de

$$\frac{m}{2\,M + m} \qquad \text{ou de} \qquad \frac{p}{2\,P + p}.$$

En prenant P constant et égal à 1 kilogr. par exemple, et donnant à p successivement les valeurs

$$\frac{2}{5},\ \frac{2}{8},\ \frac{2}{15}\ \text{(de kilogramme)},$$

on aura pour g les valeurs correspondantes

$$\frac{1}{4}g,\ \frac{1}{9}g,\ \frac{1}{16}g.$$

En mesurant les durées T′ correspondantes à chaque cas, on constatera qu'elles sont entre elles comme les nombres 2, 3, 4.

105. **Longueur du pendule simple synchrone : autre formule.** — Nous avons vu que la longueur du pendule composé, ou, ce qui revient au même, la longueur de son pendule simple synchrone, est donnée par la formule

$$L = \frac{I}{Ma}.$$

Le moment d'inertie I du pendule, qui entre dans cette formule, est pris par rapport à l'axe de suspension. En le remplaçant par le moment d'inertie J pris par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension, mais passant par le centre de gravité G du pendule, on donne à la formule précédente une forme plus commode pour les applications.

Cherchons d'abord la relation qui existe entre I et J. Pour cela, il suffit de former l'expression $\sum mr^2$ successivement par rapport aux deux axes. Soient OX l'axe de suspension, et Gx l'axe parallèle, passant par le centre de gravité G (fig. 91). Prenons pour origine des coordonnées le point G, pour axe des x la ligne Gx, et pour axe des z la plus courte distance GO de la ligne Gx et de sa parallèle, l'axe de suspension : ce dernier se trouve alors compris dans le plan des xz ; le troisième axe, Gy, est complètement déterminé : c'est la perpendiculaire au plan des deux autres.

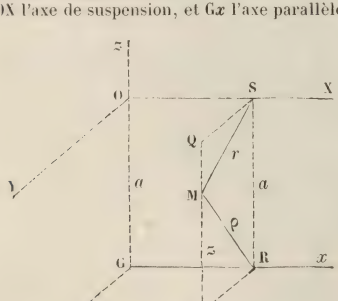


Fig. 91.

Soit M un point quelconque du pendule de masse m : menons une perpendiculaire MP au plan des xy, et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle perce, en Q, le plan XOY, mené par OX, parallèlement au plan des xy. Si nous menons les lignes PR et QS, respectivement perpendiculaires aux axes Gx et OX, et que nous joignions MR et MS, ces droites sont respectivement les distances ρ et r du point M aux deux axes des moments d'inertie (d'après le théorème des trois perpendiculaires). Pour avoir le premier moment d'inertie I, il faudra faire la somme

de termes analogues à mr^2, et pour avoir J, la somme de termes analogues à $m\rho^2$. Or les deux distances conjuguées r et ρ sont deux côtés d'un triangle tel que MSR, dont le troisième côté SR est une droite parallèle et égale à la plus courte distance GO ($= a$) des deux axes (parce que le plan de projection PQSR est parallèle au plan des yz). On a donc entre r et ρ la relation

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,a\rho \cos \mathrm{SRM}$$

ou, en remplaçant le cosinus de SRM par le sinus de l'angle complémentaire PRM,

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,a\rho \sin \mathrm{PRM}.$$

Or, dans le triangle rectangle MPR, on a entre l'hypoténuse ρ et le côté MP $= z$ la relation

$$z = \rho \sin \mathrm{PRM}.$$

En substituant cette valeur de z, il vient

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,az.$$

Si nous multiplions tous les termes de cette équation par la masse m du point M, il vient

$$mr^2 = m\rho^2 + ma^2 - 2\,amz$$

et, en faisant la somme des termes analogues,

$$\Sigma\, mr^2 = \Sigma\, m\rho^2 + \Sigma\, ma^2 - 2\,\Sigma\, amz.$$

Interprétons maintenant chacun des termes de cette somme. $\Sigma\, mr^2$ est le moment d'inertie I ; $\Sigma\, m\rho^2$ est le moment J. Dans le terme $\Sigma\, ma^2$, le coefficient a^2 est constant, on peut le faire sortir du signe Σ et écrire $a^2\,\Sigma\, m$. Or $\Sigma\, m$ est la somme des masses des points M ; c'est donc la masse totale du pendule, que nous appelons M : on a donc $\Sigma\, ma^2 = \mathrm{M}a^2$. Enfin le dernier terme peut s'écrire $a\,\Sigma\, mz$. Pour évaluer la somme $\Sigma\, mz$, multiplions d'abord chacun de ses termes par g : elle devient $\Sigma\, mgz$. Or nous avons vu (56) que, lorsqu'un corps tel que le pendule composé est rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires, si l'on cherche les coordonnées du centre des forces parallèles, on trouve que la distance c de ce centre au plan des xz est déterminée par l'équation

$$c\mathrm{R} = \Sigma\,(\mathrm{F}z).$$

Appliquons cette équation au cas du pendule, soumis aux forces parallèles de la pesanteur. F est mg, poids du point M, et R est Mg, poids total. On a donc

$$c\mathrm{M}g = \Sigma\, mgz.$$

Mais ici, à cause du choix même de l'origine des coordonnées, on a identiquement $c = 0$: donc

$$\Sigma\, mgz = 0,$$

et comme g est une constante,

$$\Sigma\, mz = 0.$$

Substituons ces valeurs respectives à chacun des termes de l'équation précédente [1], il vient

$$I = J + Ma^2$$

ou bien, en adoptant pour J la notation suivante : $J = MK^2$ (K étant une constante),

$$I = M(K^2 + a^2).$$

Portons enfin cette nouvelle valeur de I dans l'équation qui donne L, elle devient

$$L = \frac{M(K^2 + a^2)}{Ma} = \frac{Ma^2}{Ma} + \frac{MK^2}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}.$$

Telle est la formule habituelle qui sert à déterminer la longueur du pendule simple synchrone d'un pendule composé, dont le moment d'inertie est MK^2 (par rapport à Gx) et dont le centre de gravité est à une distance a de l'axe de suspension.

Remarques. — 1° La constante K, définie par l'équation $J = MK^2$, s'appelle le *rayon de gyration* du pendule. Si l'on supposait toute la masse du pendule répartie uniformément, en couche infiniment mince, à la surface d'un cylindre de révolution, de rayon égal à K, le moment d'inertie de la surface cylindrique, pris par rapport à l'axe du cylindre, serait précisément

$$\sum mK^2, \qquad \text{ou} \qquad K^2 \sum m, \qquad \text{ou} \qquad MK^2.$$

Tel est le sens mécanique de cette constante K.

2° On peut se rendre compte de l'erreur commise dans la vérification des lois expérimentales du pendule composé, lorsqu'on prend pour longueur des pendules sphériques la distance du point de suspension au centre de la sphère. En effet, soit d cette distance et r le rayon de la sphère. En calculant le rayon de gyration d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres, on le trouve égal à $\frac{2}{5}r^2$. On a donc, pour la longueur vraie du pendule, c'est-à-dire pour la longueur du pendule simple synchrone,

$$L = d + \frac{2}{5}\frac{r^2}{d}$$

(en négligeant la masse du fil qui soutient la boule). Or, au lieu de cette longueur L, on prend une longueur $l = d$. L'erreur commise est donc $(L - l)$, c'est-à-dire $\frac{2}{5}\frac{r^2}{d}$. Pour $d = 1^m$ et $r = 25^{mm}$, ce terme correctif est inférieur à $1/4^{mm}$. Il n'est donc pas étonnant que cette faible différence n'influe pas sur la vérification des lois.

106. **Théorème d'Huygens : Réciprocité de l'axe d'oscillation et de l'axe de suspension. — Pendules réversibles.** — 1° *Définitions.* — Soit XX′ l'axe de suspension d'un pendule composé (fig. 92) : lorsque le pendule est au repos, le plan vertical passant par XX′ contient le centre de gravité G ; par suite, la verticale du point G va couper l'axe XX′ en un certain point O. La longueur OG est la distance du centre de gravité à l'axe de suspension : c'est ce que nous avons appelé a. Si, à partir du point G, nous prenons sur le prolongement de OG une longueur GO_1 égale à $\frac{K^2}{a}$, la longueur OO_1 $\left(= a + \frac{K^2}{a}\right)$ est la longueur du pendule composé. Un point matériel placé en O_1 et relié au point fixe O par un fil O_1O, inextensible et sans poids, constituerait un pendule simple synchrone du pendule composé. Les points O_1 et O, qui sont conjugués, s'appel-

lent quelquefois, le premier, *centre d'oscillation*, et le deuxième, *centre de suspension*.

Menons par O_1 une droite YY′ parallèle à l'axe XX′. Un point quelconque M de cette droite, étant rejoint à l'axe XX′ par une droite MO′ parallèle à O_1O, les points conjugués M et O′ se trouvent dans les mêmes conditions que les points O_1 et O. En effet, si l'on place en M un point matériel, et qu'on le relie au point fixe O′ par un fil inextensible et sans poids, on constituera un pendule simple, ayant une longueur $MO' = O_1O = a + \frac{K^2}{a}$, qui, par suite, sera synchrone du pendule composé. Il en sera de même de tous les points de l'axe YY′. C'est pourquoi l'on appelle cette droite l'*axe d'oscillation* du pendule composé. Nous l'avions déjà définie plus haut (103) et nous en avions démontré, sans calcul, l'exis-

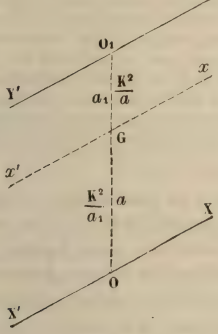


Fig. 92.

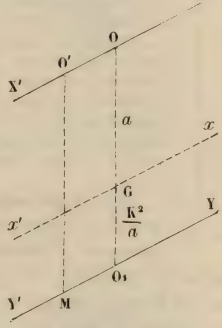


Fig. 93.

tence nécessaire. Elle jouit d'une propriété qu'a découverte Huygens et qu'on peut énoncer sous la forme suivante :

2° Théorème. — *L'axe d'oscillation d'un pendule composé est réciproque de son axe de suspension.*

Cela veut dire que, si l'on suspend le pendule par l'axe XX′, de manière que l'axe d'oscillation devienne l'axe de suspension, réciproquement l'axe de suspension primitif XX′ deviendra axe d'oscillation (fig. 93) : autrement dit, le lieu des des pendules simples synchrones du nouveau pendule composé, ainsi constitué, sera précisément l'axe XX′.

En effet, soit L_1 la longueur du nouveau pendule composé, et a_1 la distance de son centre de gravité G au nouvel axe de suspension. Le centre de gravité ne change pas de place par rapport aux autres points du pendule, par suite de cette interversion, pas plus que le rayon de gyration K ne change de valeur. On a donc

$$L_1 = a_1 + \frac{K^2}{a_1}.$$

Or on voit, en comparant les figures 92 et 93, que l'on a

$$a_1 = \frac{K^2}{a},$$

et par suite

$$\frac{K^2}{a_1} = \frac{K^2}{\frac{K^2}{a}} = a.$$

Par conséquent

$$L_1 = \frac{K^2}{a} + a = L. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3° *Pendules réversibles.* — Cette curieuse propriété peut être utilisée pour déterminer expérimentalement la longueur d'un pendule composé. Il suffit, pour cela, d'encastrer dans la tige deux couteaux (fig. 94), pouvant servir tour à tour d'axe de suspension. Tantôt l'un d'eux, O, est fixe, et l'autre, C, est mobile : on peut alors déplacer ce dernier, par tâtonnements, jusqu'à ce que la durée d'oscillation soit la même dans les deux positions du pendule. Tantôt les deux couteaux sont fixes, mais l'on peut déplacer verticalement le centre de gravité par rapport aux couteaux, jusqu'à ce que le même résultat soit obtenu. Dans l'un et l'autre cas, la distance des deux couteaux est égale à la longueur du pendule simple synchrone. Les pendules qui sont munis de l'un ou l'autre de ces dispositifs, sont appelés *pendules réversibles.* Nous verrons plus loin que le capitaine Kater en fit un appareil de voyage très commode pour la détermination de g sous diverses latitudes.

Fig. 94.

107. **Application du pendule à la mesure de g.** — Nous avons dit plus haut que la seule méthode précise pour mesurer l'intensité de la pesanteur était fondée sur l'emploi du pendule. Nous pouvons maintenant en comprendre le principe. Supposons qu'on mesure la durée T des *petites oscillations* d'un pendule. Cette durée est exprimée par la formule-limite du pendule, en fonction des éléments de l'appareil et de l'intensité de la pesanteur. On a

$$[1] \qquad T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad g = \frac{\pi^2 L}{T^2}. \qquad [2]$$

Il suffira d'évaluer L, longueur du pendule simple synchrone du pendule employé, pour que tout soit connu dans la formule [2], sauf l'accélération g. Lorsque la longueur L sera évaluée en mètres et la durée T en secondes, le nombre g sera rapporté au mètre et à la seconde. Il représentera la vitesse en mètres acquise par un corps pesant, tombant librement dans le vide, après la première seconde de chute. Nous avons démontré plus haut que le même nombre représente l'*intensité de la pesanteur*, c'est-à-dire l'action de la pesanteur sur l'unité de masse.

Cette méthode, imaginée et indiquée par Huygens, fut, pour la première fois, appliquée avec succès par Borda. Nous allons exposer les expériences de Borda, qui sont classiques, en indiquant, à l'occasion, les perfectionnements de détail apportés par les nom-

breux expérimentateurs, entre autres par Biot et Arago, qui les ont répétées après lui. Nous dirons ensuite quelques mots des expériences de Kater, faites d'après la même méthode, mais avec un appareil tout différent.

108. **Expériences de Borda.** — 1° *Méthode.* — Borda employa la méthode d'Huygens, mais non la formule-limite du pendule. Il se servit de la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)},$$

qui représente très exactement la durée d'une oscillation de très faible amplitude, mais non *infiniment petite.* Ses expériences comportaient donc plusieurs mesures de précision :

I. La mesure de T, durée d'une oscillation simple;

II. La mesure de L, longueur du pendule simple synchrone du pendule qu'il faisait osciller;

III. La mesure de α, amplitude des oscillations dont il mesurait la durée.

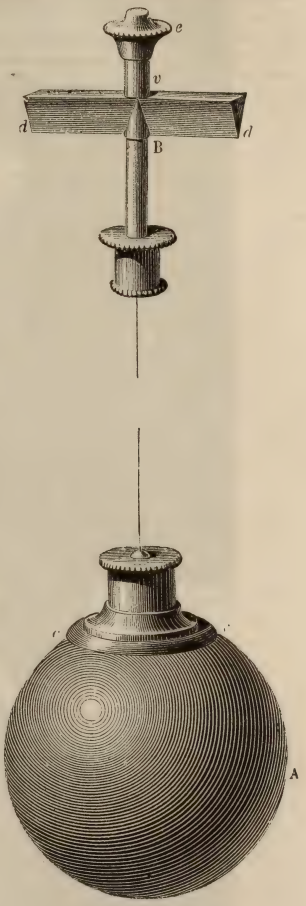


Fig. 95.

2° *Description du pendule de Borda.* — L'appareil se compose de deux parties bien distinctes : le pendule proprement dit A, et le couteau de suspension B (fig. 95).

A. Le pendule proprement dit est formé d'une lourde sphère en platine (d'environ 36 millimètres 1/2 de diamètre), soutenue par un fil métallique très fin. (Le fil de Borda était en fer; Biot y substitua un fil en cuivre, pour le soustraire à l'influence magnétique de la terre.) Le fil y était fixé par l'intermédiaire d'une calotte métallique très mince *cc*, s'adaptant exactement sur la surface sphérique : le simple contact des deux surfaces, préalablement enduites d'une mince couche de suif, suffit pour en maintenir l'adhérence, et la masse du pendule se trouve ainsi suspendue au fil.

B. L'autre extrémité du fil est attachée à un *couteau de suspension* B, pareil

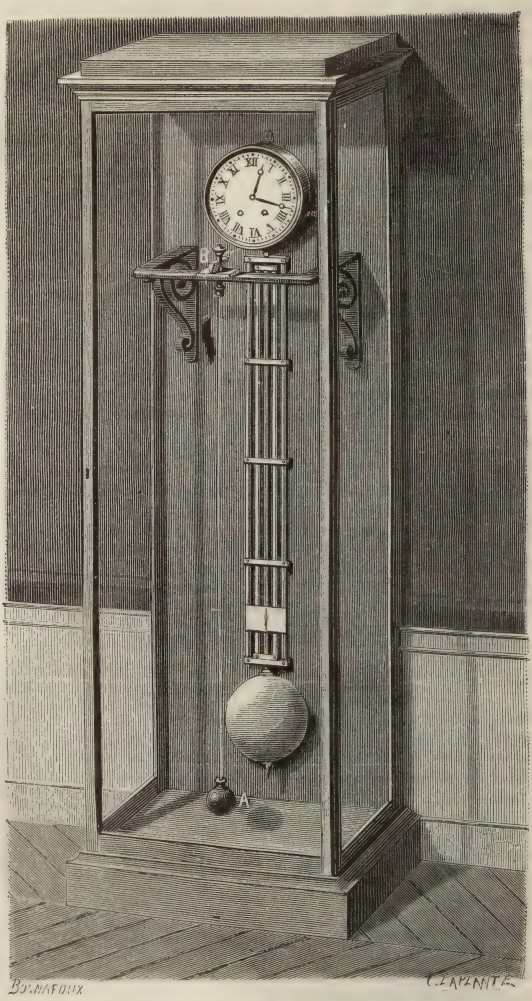


Fig. 96.

à celui des horloges. C'est une pièce cylindrique en métal, dans laquelle est

encastrée, perpendiculairement à sa longueur, un prisme triangulaire en acier. L'axe de suspension est réalisé par l'arête horizontale *dd* du prisme, reposant sur deux plans fixes, bien polis, de pierre très dure ou d'acier, et parfaitement horizontaux. Ces plans étaient eux-mêmes enchâssés dans un grand plateau de fer, attaché à des supports qu'on avait scellés dans une muraille solide (fig. 96).

3° *Mesure de la durée d'une oscillation. — Méthode des coïncidences.* — Le procédé que nous avons employé ci-dessus pour la vérification des lois du pendule est le procédé le plus naturel et, en apparence, le plus simple; mais la nécessité de compter une à une les oscillations du pendule rend ce procédé fastidieux et sujet à l'erreur. Borda en employa un autre qui paraît moins simple que le précédent, mais qui est pourtant plus commode et en même temps plus précis : c'est la *méthode des coïncidences*, imaginée par de Mairan.

Principe de la méthode. — On dispose le pendule de Borda devant le balancier d'une horloge à secondes (fig. 96), de telle manière que :

1° Pendant la marche des deux pendules, leurs plans d'oscillation soient parallèles;

2° A l'état d'équilibre, les verticales de leurs centres de gravité se trouvent dans un même plan vertical, perpendiculaire au plan d'oscillation commun.

Supposons les deux pendules réduits à ces deux verticales (fig. 97) : l'une d'elles, OP_0, représente le pendule de Borda, et l'autre, OB_0, représente le balancier. A l'état de repos, le pendule P_0 se projette exactement sur le balancier B_0, pour un observateur qui regarde dans l'azimut Oz. Il en est absolument de même lorsque, pendant leur mouvement, les deux pendules passent, au même instant, soit dans le même sens, soit en sens contraire, par l'azimut Oz : on dit qu'il se produit *une coïncidence*, lorsque les deux pendules se superposent ainsi, *en marchant dans le même sens*.

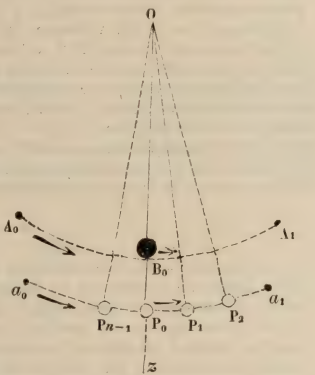


Fig. 97.

Supposons qu'on observe leurs mouvements simultanés à partir de l'instant d'une coïncidence, et que le pendule P_0 marche un peu plus vite que le balancier. Celui-ci décrit d'abord l'arc $B_0 A_1$, dans le sens indiqué par la flèche, puis l'arc $A_1 B_0$, en sens contraire, et passe par la verticale, au bout d'une seconde, avec une vitesse égale et opposée à sa vitesse de départ; puis il décrit l'arc $B_0 A_0$, revient de A_0 en B_0, et repasse par la verticale au bout de deux secondes, avec la même vitesse et dans le même sens qu'au début. Pendant le même temps, le pendule P_0 aura également décrit, deux fois en sens contraire, l'arc $P_0 a_1$, puis l'arc $P_0 a_0$; mais, comme il va *un peu plus vite* que le balancier, il aura repassé à la verticale plus tôt que celui-ci, et il sera en P_1 à l'instant précis où le balancier sera en B_0 : il aura donc exécuté deux oscillations simples, *plus* un arc $P_0 P_1$: cet arc est proportionnel à l'excès de la vitesse du pendule sur celle du balancier, et mesure l'avance du premier sur le deuxième. De même, au bout de deux autres secondes, quand le balancier passera de nouveau par sa position initiale, le pendule ne sera ni en P_0 ni en P_1, il sera arrivé en P_2, à une distance de la verticale $P_2 P_0$ qui est égale à deux fois l'avance $P_0 P_1$. Et, ainsi de suite, entre deux passages consécutifs du balancier par la verticale, le pendule exécutera deux oscillations simples, *plus une*

avance constante, qui s'ajoutera aux avances précédentes. La somme de ces avances successives (qui constitue l'écart du pendule, à l'instant du passage) s'accroîtra donc proportionnellement au temps et la coïncidence ne pourra plus se réaliser que lorsque la somme des arcs $(P_0 P_1 + P_1 P_2 + \ldots)$ sera exactement égale à $(P_0 a_1 + a_1 P_0 + P_0 a_0 + a_0 P_0)$, c'est-à-dire deux fois l'amplitude totale du pendule. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une première coïncidence est donc

$$[1] \qquad \sum (\text{arc } P_0 P_1) = 2\,(\text{arc } a_0 a_1).$$

A l'instant de cette coïncidence, le pendule P aura nécessairement exécuté *deux oscillations simples de plus que le balancier*. La conséquence de la coïncidence, c'est donc que

$$[2] \qquad n = N + 2,$$

en appelant N le nombre des secondes marquées par le balancier dans l'intervalle des deux coïncidences, et n le nombre correspondant des oscillations simples du pendule. Les équations [1] et [2] résument toute la méthode.

Remarques. — I. On voit que la coïncidence ne sera *mathématiquement* réalisable que si l'avance $P_0 P_1$ est exactement une partie aliquote de l'amplitude α ; mais, pour qu'elle se réalise pratiquement ou physiquement, il suffira que l'avance soit très petite par rapport à l'amplitude α, c'est-à-dire qu'il y ait une très faible différence, comme nous l'avons supposé ci-dessus, entre les deux durées d'oscillation.

II. Si le pendule avait un retard, au lieu d'une avance, sur le balancier, il n'y aurait rien à changer aux raisonnements précédents, si ce n'est le signe de $P_0 P_1$, et par suite la formule finale, qui deviendrait évidemment

$$n = N - 2.$$

C. Opération. — Les deux verticales étaient réalisées dans la pratique, l'une par le fil même de suspension du pendule, et l'autre par un trait noir vertical, tracé sur un carré de papier blanc, qu'on collait symétriquement à la surface du balancier (fig. 96). On observait les coïncidences à l'aide d'une lunette immobile, placée à 10 mètres de distance, et orientée de manière que le trait vertical du balancier fût exactement caché par le fil du pendule, dans la position d'équilibre. Enfin, les deux appareils étaient enfermés dans une cage vitrée, qui les préservait des agitations de l'air extérieur, ainsi que des variations de température. Plus tard, Biot entoura l'horloge elle-même d'une deuxième cage en verre, intérieure à l'autre, parce qu'il avait remarqué que le mouvement du balancier influençait le pendule par l'intermédiaire de l'air.

L'opération est des plus simples. Il suffit de lâcher le pendule à un instant, qu'on note sur l'horloge, puis d'attendre tranquillement la production de deux coïncidences successives. Soit N le nombre de secondes, marqué par l'horloge, qui s'est écoulé entre les deux instants, on a, d'après la formule précédente,

$$n = N \pm 2,$$

d'où l'on déduit, pour la durée d'une seule oscillation simple,

$$T = \frac{N}{n}.$$

Remarques. — I. On comprend sans peine que l'observateur n'ait pas besoin de laisser l'œil à la lunette pendant tout l'intervalle de temps qui sépare deux

coïncidences. La connaissance approximative de la durée d'oscillation du pendule lui permet de prévoir approximativement l'époque de la coïncidence : il n'a besoin d'observer qu'un peu auparavant.

II. Si l'on se trompe d'une oscillation sur l'instant de la coïncidence, il n'en résulte qu'une faible erreur. On peut s'en convaincre en faisant N successivement égal à 1000, puis à 1001 dans la formule précédente : on en tire pour T les valeurs 0,998014 et 0,998016, qui ne diffèrent entre elles qu'à la sixième décimale. Cet exemple numérique montre quel est le degré de précision de la méthode.

4° *Mesure des amplitudes des oscillations.* — *Méthode.* — L'opération précédente donne, non pas la durée d'une oscillation particulière, mais la *durée moyenne* correspondante à n oscillations consécutives.

Si les oscillations étaient infiniment petites, il n'y aurait pas à se préoccuper de leur amplitude, puisque leur durée en serait indépendante. Si les oscillations, sans être infiniment petites, c'est-à-dire sans tendre vers zéro, sont suffisamment petites, on peut exprimer la durée de l'une d'entre elles par la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Nous avons vu que Borda s'était mis dans ce cas. Si donc les amplitudes étaient de grandeur constante pendant la durée de l'expérience, il suffirait de mesurer l'amplitude de l'une quelconque d'entre elles et de porter cette valeur dans la formule. Mais, en réalité, les amplitudes décroissent d'une manière continue, d'après la loi découverte par Borda (précisément à cette occasion). Par conséquent, si l'on appelle $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ les amplitudes successives, elles seront liées aux durées successives correspondantes $t_1, t_2 \ldots$ par la série des équations suivantes :

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{16}\right),$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{16}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{16}\right).$$

Si l'on ajoute membre à membre ces n équations, il vient

$$\Sigma (t_1) = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[n + \frac{1}{16} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_n^2) \right];$$

or $\Sigma (t_1)$ est la somme des durées des oscillations successives, c'est-à-dire la durée totale de l'expérience : elle est égale à N secondes ; n est le nombre total des oscillations : il est égal à $(N \pm 2)$. L'équation finale devient donc

$$N = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[(N \pm 2) + \frac{1}{16} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_n^2) \right].$$

Il semble donc que, pour en dégager l'inconnue g, — but final des mesures, — il faille déterminer successivement tous les termes de la somme $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots)$. Mais, en utilisant la loi de Borda, on peut calculer cette somme en fonction

de l'amplitude initiale α_1 et de l'amplitude finale α_n. On trouve que

$$\frac{1}{16}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_n^2) = \frac{N \pm 2}{32} \frac{(\alpha_n + \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1)}{\frac{1}{M}\log\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}$$

$\left(\frac{1}{M}\right.$ étant l'inverse du module des logarithmes vulgaires$\left.\right)$; par suite, comme

$$T = \frac{N}{n} = \frac{N}{N \pm 2},$$

on a la formule finale, employée par Borda,

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{32}\frac{(\alpha_n + \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1)}{\frac{1}{M}\log\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}\right].$$

Remarque. — Si la durée totale de l'expérience est très courte, on peut admettre que les amplitudes successives $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n$ sont peu différentes chacune de l'amplitude moyenne obtenue en prenant la demi-somme des amplitudes extrêmes $\frac{\alpha_n + \alpha_1}{2}$. Il suffira donc de porter cette valeur de α dans l'équation générale, et l'on aura alors la formule simple

$$[11] \qquad T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_n)^2}{32}\right].$$

Opération. — Quelle que soit la formule qu'on emploie, l'opération se réduit à mesurer deux amplitudes. Il n'est pas absolument nécessaire de choisir la première et la dernière, ainsi que les formules l'indiquent ; la décroissance des amplitudes s'effectue par degrés si peu sensibles, qu'il suffit amplement de mesurer l'une des premières pour α_1, l'une des dernières pour α_n. Pour cela, on dispose derrière le pendule P (fig. 121) une échelle horizontale divisée en parties égales, à une distance connue du centre de suspension. On observe alors sur cette échelle les positions extrêmes du pendule à un instant donné, et l'on en déduit par un calcul très simple la valeur de l'angle α correspondante à cette oscillation. — C'est *cette valeur d'angle, et non l'amplitude elle-même*, qui entre dans les formules précédentes.

5° *Mesure de la longueur du pendule.* — Il ne reste plus qu'à mesurer la longueur du pendule composé, c'est-à-dire la longueur du pendule simple synchrone que représente le coefficient L dans la formule de T.

On a vu que cette longueur L est liée aux éléments géométriques du pendule par la formule

$$L = a + \frac{K^2}{a},$$

dans laquelle a représente la distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension et K^2 son rayon de gyration, calculé par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

Mesure de a. — Si nous supposons le pendule réduit à la partie que nous avons désignée par B, c'est-à-dire à la sphère de platine, à la calotte qui l'emboîte et au fil de suspension, la mesure de a est très simple. Le centre de gravité du système coïncidant sensiblement avec le centre de la sphère, il suffira de déterminer :

D'abord la distance verticale de l'axe de suspension à l'extrémité inférieure

du diamètre vertical de la sphère. Cette distance d est égale à la longueur λ du fil, augmentée du diamètre $2r$ de la sphère. On a

$$[1] \qquad d = \lambda + 2r;$$

puis la distance de l'axe de suspension à l'extrémité supérieure du diamètre vertical de la sphère. On a évidemment

$$[2] \qquad d' = \lambda.$$

On déduira de ces deux lectures

$$d - d' = 2r,$$

c'est-à-dire le diamètre de la sphère et

$$d - \frac{d - d'}{2} = \lambda + r = a,$$

c'est-à-dire la distance du centre de gravité à l'axe de suspension. Ces deux mesures se faisaient à l'aide d'un petit instrument de précision, ayant pour organe principal ce qu'on appelle une *vis micrométrique*. Nous le décrirons plus tard (129) comme application de la *vis micrométrique*.

Calcul du moment d'inertie. — Si l'on suppose toujours le pendule P réduit à la partie B (sphère, calotte et fil), son moment d'inertie se compose de celui de la sphère augmenté de celui de la calotte et de celui du fil.

On a vu que le carré, K^2, du rayon de gyration d'une sphère de rayon r, pris par rapport à l'un quelconque de ses diamètres, se calcule aisément, et est égal à $\frac{2}{5}r^2$. On a donc (en négligeant les rayons de gyration du fil et de la calotte),

$$MK^2 = M\frac{2}{5}r^2, \qquad \text{d'où} \qquad K^2 = \frac{2}{5}r^2.$$

Longueur du pendule simple synchrone. — On a donc enfin, en réunissant toutes les mesures précédentes,

$$L = a + \frac{K^2}{a} = \lambda + r + \frac{\frac{2}{5}r^2}{\lambda + r}.$$

6° *Justification de ces opérations.* — I. En réalité le pendule se compose non seulement de la partie B, mais aussi de la partie A qui est le couteau de suspension; mais Borda avait réussi à éliminer l'influence de cette dernière au moyen d'un procédé très ingénieux. Il réglait, en déplaçant un écrou e sur la vis verticale v (fig. 95), la position du centre de gravité du couteau, de manière que celui-ci constituât un pendule composé, *ayant la même durée d'oscillation* que le pendule complet. Dans ces conditions, *le couteau n'a pas d'influence sur le mouvement du pendule complet :* tout se passe comme si celui-ci était réduit à la partie B, c'est-à-dire à la sphère, à la calotte et au fil.

II. Borda démontra ce fait expérimentalement. Il effectuait la mesure de n en employant successivement deux couteaux de poids très différents, mais réglés de manière à osciller seuls, synchroniquement avec le pendule total : il trouvait des nombres identiques dans les deux cas.

III. On peut aussi démontrer ce fait analytiquement, en calculant, pour les deux cas, la longueur du *pendule simple synchrone*.

Soient d'abord T la durée d'oscillation du pendule, réduit à son couteau de suspension; i son moment d'inertie, *pris par rapport à l'axe de suspension*,

et b la distance de son centre de gravité au même axe; m sa masse et l la longueur du pendule simple synchrone. On a entre ces quantités la formule-limite habituelle

$$[1] \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{avec} \qquad l = \frac{i}{mb}.$$

Soient T_1, I_1, a_1, M_1 et L_1 les quantités similaires pour le pendule complet (constitué par les deux parties A et B). On a de même (la durée d'oscillation n'ayant pas varié)

$$[2] \qquad T = \pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}, \qquad \text{avec} \qquad L_1 = \frac{I_1}{M_1 a_1}.$$

Il s'agit de démontrer que le pendule composé, réduit à la partie B (sphère, calotte et fil), a aussi un pendule simple synchrone de longueur L_1 et de durée d'oscillation T. En effet, soient I le moment d'inertie de ce dernier pendule, pris par rapport à son axe de suspension, M sa masse totale et a la distance de son centre de gravité; on a, par définition,

$$[3] \qquad L = \frac{I}{Ma}.$$

D'autre part, le moment d'inertie I_1 du pendule complet est évidemment égal (par définition même) à la somme des moments I et i, et l'on a

$$[4] \qquad I_1 = I + i.$$

On a de même, pour la masse totale M_1,

$$M_1 = M + m;$$

enfin, si l'on applique au centre de gravité de la masse totale M_1 et aux deux centres des masses partielles M et m le théorème exprimé par la relation générale

$$Rc = \sum (Fz),$$

on a ici

$$M_1 g \,.\, a_1 = Mga + mgb,$$

d'où

$$[5] \qquad M_1 a_1 = Ma + mb.$$

Cela posé, à cause du synchronisme du pendule total et du pendule-couteau, on a

$$[6] \qquad L_1 = l, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{I_1}{M_1 a_1} = \frac{i}{mb}.$$

De là on déduit, en appliquant une propriété connue des proportions,

$$\frac{I_1}{M_1 a_1} = \frac{I_1 - i}{M_1 a_1 - mb}.$$

Or, d'après l'équation [4], on a

$$I_1 - i = I;$$

et, d'après l'équation [5],

$$M_1 a_1 - mb = Ma.$$

On a donc

$$\frac{I_1}{M_1 a_1} = \frac{I}{Ma}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad L_1 = L. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

7° *Causes d'erreur dans les expériences de Borda. — Corrections.* — Avant d'énoncer les résultats numériques de ces expériences, nous allons indiquer les causes d'erreur qu'elles comportent, ainsi que les corrections qu'on y a ultérieurement apportées. Parmi ces causes d'erreur, les unes sont des causes particulières, et inhérentes aux procédés employés par Borda, les autres sont générales et résultent de l'emploi même du pendule.

Celles-ci sont de beaucoup les plus importantes. Ce sont : 1° l'influence de l'air; 2° l'influence des supports. L'air agit sur le pendule de plusieurs façons : d'abord, comme l'a fait remarquer Bouguer, il lui fait éprouver une perte de poids égale au poids du volume gazeux déplacé (principe d'Archimède, 158) et Bessel a prouvé que cette perte de poids est accrue, pendant la marche du pendule, dans une forte proportion, par suite d'une sorte d'entraînement de l'air; de plus, l'air ralentit les oscillations en opposant au mouvement de progression du pendule, non seulement une résistance analogue à celle qui est utilisée dans l'appareil Morin (85), mais encore une sorte de viscosité signalée par M. Stokes. D'autre part, les supports enlèvent aussi au pendule une partie de sa force vive, par suite des vibrations que ses oscillations leur communiquent. Cet effet est d'autant plus marqué que la masse du pendule est plus lourde et que ses supports sont plus légers. C'est ce qui avait lieu surtout dans les expériences de Biot, qui avait augmenté la masse du pendule afin d'atténuer la résistance de l'air, et diminué au contraire la masse des supports afin de rendre l'appareil transportable.

La correction la plus sûre consisterait à prévenir les erreurs en opérant dans le vide, avec un pendule très léger, soutenu par des supports très massifs; c'est en se rapprochant le plus possible de ces conditions expérimentales qu'il faudrait appliquer maintenant la méthode de Borda. Mais, pour utiliser les anciennes expériences et pour en tirer des résultats plus précis, on a établi récemment[1] des formules de correction très pratiques, qui tiennent compte de la *poussée de l'air*, de *son entrainement* et de *sa viscosité*, ainsi que de l'*ébranlement des piliers*.

Quant aux causes d'erreur particulières aux procédés de Borda, nous avons déjà signalé les principales : emploi d'un fil de suspension magnétique, influence réciproque des deux pendules par l'intermédiaire de l'air de la cage, difficulté de saisir l'instant précis des coïncidences, etc. Nous n'insisterons pas davantage sur ces détails.

109. **Résultats des diverses mesures de g à Paris.** — Les résultats de toutes ces expériences se présentent habituellement sous deux formes :

1° Sous la forme directe de g, c'est-à-dire de l'accélération cherchée.

2° Sous la forme d'une quantité qui est liée à la valeur de g par une relation très simple : c'est ce qu'on appelle la *longueur du pendule qui bat la seconde* dans le lieu de l'expérience. C'est la longueur du pendule simple synchrone d'un pendule composé qui aurait précisément pour durée d'oscillation 1 *seconde;* cette grandeur est évidemment donnée par la formule du pendule, où l'on fait $T = 1^s$. On a

$$1 = \pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}, \qquad \text{d'où} \qquad L_1 = \frac{g}{\pi^2}.$$

1. MM. Célérier et Peirce, 1880.

Cette grandeur, étant proportionnelle à g, peut servir à le représenter.

Les expériences faites par Borda à l'Observatoire de Paris (incomplètement corrigées de la poussée de l'air) ont donné :

$$g = 9^m,808\,82,$$
$$L_1 = 0^m,993\,827.$$

Biot et Arago trouvèrent . $L_1 = 0^m,993\,845.$

Le capitaine Kater . . . . $L_1 = 0^m,999\,867.$

Tous ces nombres, si concordants, ne sont d'ailleurs, pas plus que celui de Borda, corrigés de l'influence de l'air. Après avoir subi la correction complète, effectuée par M. Peirce, ils sont devenus :

Nombre de Borda. . . . $L_1 = 0^m,993\,918$ à l'altitude de 67^m,
— de Biot. . . . . $L_1 = 0^m,993\,915$ — de 74^m,

et M. Peirce, en répétant lui-même les expériences de Borda, a trouvé

$$L_1 = 0^m,993\,934 \text{ à l'altitude de } 72^m.$$

En prenant la moyenne de tous ces nombres, on trouve

$$L_1 = 0^m,993\,92 \text{ à l'altitude de } 72^m.$$

Telle est la longueur du pendule qui battrait la seconde, *dans le vide*, sous la *latitude de Paris* et à l'*altitude moyenne de* 72^m. On considère cette valeur comme exacte à $\frac{1^m}{100\,000}$ près.

On en déduit pour g, dans les mêmes conditions,

$$g = 9^m,8096.$$

Cette valeur dépasse d'environ $\frac{1}{10\,000}$ la valeur ordinairement adoptée, à savoir $9^m,8088$.

Remarque. — Le nombre $9^m,8096$ ne donne l'intensité de la pesanteur que pour l'altitude et la latitude où il a été déterminé. Les expériences des divers expérimentateurs ont, en effet, prouvé que la valeur de g varie suivant les différents lieux où on l'a déterminée, et qu'elle est fonction de leurs deux coordonnées géographiques, c'est-à-dire la hauteur verticale au-dessus du niveau de la mer (*altitude*), et la distance à l'équateur, comptée sur le méridien (*latitude*).

110. **Pendule de Kater.** — Avant d'indiquer les lois de la variation de g à la surface de la terre, nous allons exposer la méthode de mesure qui a permis de les découvrir. C'est la méthode même de Borda, — caractérisée par la formule du pendule et par la méthode des coïncidences, — mais appliquée à l'aide d'un appareil portatif, le pendule du capitaine Kater. Nous avons déjà dit que cet appareil est l'une des deux formes qu'on peut donner au *pendule réversible* (106, 3°). Dans le premier type, indiqué par Bohnemberger, l'un des couteaux est mobile et permet de trouver par tâtonnements la distance pour laquelle les deux pendules inverses sont synchrones ; dans le second type, les deux couteaux sont fixes, mais on peut faire varier la distance verticale du centre de gravité de l'appareil, jusqu'à ce qu'on ait obtenu le synchronisme. C'est ce dernier type qui est réalisé dans le pendule de Kater.

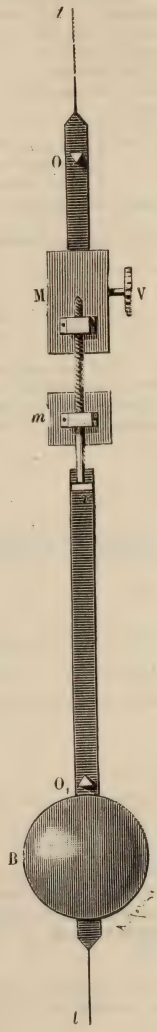


Fig. 98.

Les deux couteaux en acier, O et O_1 (fig. 98), sont implantés dans une règle de laiton OO_1, qui constitue la tige du pendule ; une lourde lentille B constitue le pendule lui-même. La distance des deux couteaux a été réglée d'avance par le constructeur, de manière que la condition de réciprocité soit réalisée à peu près. On la réalise tout à fait à l'aide d'un chariot Mm qu'on peut faire mouvoir entre les couteaux. Ce chariot mobile se compose de deux pièces M et m, de poids très inégaux ; la plus lourde, M, peut se fixer sur la tige à l'aide d'une vis de pression ; la moins lourde, m, est rattachée directement à M à l'aide d'une vis de rappel. Grâce à ce dispositif, on obtient soit de grands déplacements du centre de gravité par le mouvement d'ensemble du chariot, soit de petits déplacements de G par le mouvement relatif de m par rapport à M. Enfin le pendule est terminé, à ses deux extrémités, par deux longues aiguilles t, t, qui facilitent l'application de la méthode des coïncidences (pour la mesure de T et de α).

111. **Variations de g à la surface du globe.** — 1° *Influence de l'altitude.* — Les altitudes des divers lieux où l'on peut observer le pendule et mesurer g sont trop faibles par rapport à la grandeur du rayon terrestre pour qu'on puisse découvrir par l'expérience une relation entre les variations de g et les distances des stations au centre de la terre. Mais on peut trouver la loi de ces variations par le calcul, en admettant que *la pesanteur soit un cas particulier de l'attraction universelle.* Dans cette hypothèse (que nous légitimerons ultérieurement), la Terre doit attirer les corps qui sont extérieurs à sa surface, *comme si toute sa masse était condensée à son centre, proportionnellement à leur masse et en raison inverse du carré de leurs distances au centre terrestre.*

Soit donc g_0 la valeur de cette attraction sur l'unité de masse (c'est l'intensité de la pesanteur) à la surface du globe et au niveau de la mer ; soit g cette intensité à l'altitude z (g est le nombre trouvé par les mesures précédentes, ramené au vide et corrigé de toutes les erreurs : par exemple, ce sera $9^m,8096$ sous la latitude de Paris et à l'altitude de 72 mètres).

Les distances au centre terrestre des deux stations considérées sont R et $R + z$, en appelant R le rayon terrestre. On aura, d'après la loi de l'attraction, entre les deux quantités g et g_0, la relation

$$\frac{g_0}{g} = \frac{(R+z)^2}{R^2}, \qquad \text{d'où} \qquad g_0 = g \cdot \left(\frac{R+z}{R}\right)^2 = \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2.$$

Comme l'altitude z est une quantité très petite par rapport à R, on peut négliger dans le développement de $\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2$ les puissances de la fraction $\frac{z}{R}$ qui sont supérieures à la première, et l'on peut écrire

$$[1] \qquad g_0 = g\left(1 + 2\frac{z}{R}\right).$$

La valeur g_0 représente l'intensité de la pesanteur, *réduite au niveau de la mer*, et l'équation [1] est la *formule de réduction.*

Inversement, on peut exprimer l'accélération g, à une altitude quelconque, en fonction de l'accélération réduite g_0. On déduit de l'égalité précédente

$$g = g_0 \cdot \frac{1}{1 + 2\frac{z}{R}}.$$

En effectuant la division indiquée, et en négligeant $\frac{z^2}{R^2}$, l'égalité devient

$$[2] \qquad g = g_0\left(1 - \frac{2z}{R}\right).$$

Telle est la loi des variations de g avec l'altitude.

Remarques. — I. *Valeur numérique du coefficient* $\left(\frac{2}{R}\right)$. — Si l'on prend pour R la valeur du rayon moyen de la terre qui est 6370260 mètres, on a

$$\frac{1}{R} = 0{,}000000157.$$

En substituant cette valeur numérique dans l'équation [2], on a

$$g = g_0\,(1 - 0{,}000000314\,z).$$

II. *Correction relative à l'attraction terrestre.* — Si la station de l'expérience fait partie d'un plateau assez étendu, on doit tenir compte de l'attraction additionnelle de ce plateau : dans ce cas le coefficient de correction est plus faible ; on a

$$[3] \qquad g = g_0\,(1 - 0{,}000000196\,z)\,^{1}.$$

Cette dernière formule sert, comme on dit, *à réduire au niveau de la mer* les mesures de g effectuées à une altitude z et sur un plateau étendu.

1. Voy. *Physique de Violle*, t. I.

2° *Influence de la latitude.* — On la met en évidence et l'on peut en trouver la loi par l'expérience, en cherchant, en différents lieux, la longueur du pendule composé qui bat la seconde.

Cette longueur étant proportionnelle à g, d'après l'équation

$$L_1 = \frac{g}{\pi^2},$$

il a suffi de la mesurer expérimentalement à diverses latitudes pour en déduire des valeurs diverses de g. En comparant ces mesures, préalablement réduites au niveau de la mer, on voit tout de suite que, d'une manière générale, *l'intensité de la pesanteur va en croissant de l'équateur aux pôles.* On a vu, en outre, que si l'on représente par g l'intensité à la latitude λ (et réduite au niveau de la mer), par a et b deux quantités constantes, tous les nombres déterminés expérimentalement peuvent être reliés par la formule empirique

$$g = a + b \sin^2 \lambda.$$

On a été conduit à essayer cette forme d'équation par des considérations théoriques que nous exposerons plus loin. Si l'on faisait $\lambda = 0$ dans la formule, on aurait

$$g_0 = a$$

donc la constante a n'est pas autre chose que la valeur de g à l'équateur : on a donc

$$a = 9^m,7807.$$

Si l'on faisait $\lambda = 90^0$, on aurait

$$g_{90^0} = a + b;$$

donc la constante b représente l'accroissement que prend g lorsqu'on s'élève de l'équateur au pôle (en supposant, bien entendu, que la formule empirique soit encore applicable dans le voisinage du pôle). On a donc

$$b = 0,0508.$$

Par conséquent la formule empirique, exprimant la loi des variations de g avec la latitude, est la suivante :

[1] $$g = 9^m,7807 + 0,0508 \sin^2 \lambda$$

En combinant cette équation avec l'équation

$$L_1 = \frac{g}{\pi^2},$$

qui exprime en fonction de g la longueur du pendule à secondes, on aura une formule empirique analogue pour exprimer la loi des variations de cette longueur. Elle est

[2] $$L_1 = 0^m,90100 + 0,00514 \sin^2 \lambda.$$

Autre formule empirique de g. — On peut donner à ces équations une autre forme, en y introduisant la valeur que prend g à la latitude moyenne de 45°. Si nous faisons $\lambda = 45^0$ dans la formule générale, il vient

$$g_{45^0} = a + \frac{b}{2}$$

$$\left(\text{car } \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Retranchons membre à membre cette équation de l'équation générale, il vient

$$g - g_{45^\circ} = b \sin^2 \lambda - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\,(2 \sin^2 \lambda - 1) = -\left(\frac{b}{2} \cos 2\lambda\right),$$

d'où

$$g = g_{45^\circ} - \frac{b}{2} \cos 2\lambda,$$

ou bien, en mettant g_{45° en facteur commun, et en posant $\frac{b}{2g_{45^\circ}} = c$.

[1'] $$g = g_{45^\circ}\,(1 - c \cos 2\lambda).$$

Cette formule empirique est la plus usitée. Les coefficients constants ont les valeurs suivantes :

$$g_{45^\circ} = 9^m,8061 \qquad \text{et} \qquad c = 0,00259.$$

On a donc enfin

[1'] $$g = 9^m,8061\,(1 - 0,00259 \cos 2\lambda).$$

5° *Formules complètes de correction.* — En résumé, si l'on réunit les deux corrections précédentes, on peut calculer par une formule générale, soit l'intensité de la pesanteur, soit la longueur du pendule à secondes dans un lieu dont on connait l'altitude z et la latitude λ. On a

$$g = 9^m,8061\,(1 - 0,00259 \cos 2\lambda)\,(1 - 0,000\,000\,00314z),$$
$$L_1 = 0^m,99537\,(1 - 0,00259 \cos 2\lambda)\,(1 - 0,000\,000\,00314z).$$

Remarque. — D'après ces formules, on calcule que le *poids absolu* de 1 kilogramme augmente à peu près de 5 grammes quand on passe de l'équateur au pôle, et que la *longueur du pendule à secondes* augmente, dans les mêmes conditions, d'environ 5 millimètres.

112. **Variations de g à l'intérieur du globe.** — La loi de variation n'est plus la même lorsque, au lieu de s'élever au-dessus de la surface du globe, on pénètre dans l'intérieur. D'un côté, *en admettant* l'identité de l'attraction universelle et de la pesanteur, on trouve, *par le calcul*, que l'attraction terrestre *doit croître proportionnellement à la distance au centre :* par conséquent le nombre g, qui mesure cette attraction, doit *diminuer* à mesure qu'on pénètre à de plus grandes profondeurs. D'autre part, une expérience faite par M. Airy, avec la méthode du pendule, a prouvé que *g commence par croître* quand on s'enfonce dans la terre : ainsi, à la profondeur de 383 mètres, l'accroissement est de $\frac{1}{4920}$ de la valeur à la surface.

Il semble donc qu'il y ait contradiction entre la théorie et l'observation ; mais cette contradiction n'est qu'apparente. On sait, en effet, par les expériences de Cavendish et de Baily, que la densité moyenne de la Terre est environ 5,5, tandis que celle des couches superficielles ne dépasse pas 2,5. Il faut en conclure que la densité des couches profondes de la croûte terrestre est notablement supérieure à celle des couches voisines de la surface. Par suite, lorsqu'on pénètre dans l'intérieur du globe, si g diminue, d'une part — comme la théorie l'indique — parce que les couches superficielles deviennent inefficaces dès qu'on les a traversées, d'autre part g peut s'accroître à cause du rapprochement de couches terrestres beaucoup plus denses et plus attractives. Si ce dernier effet l'emporte sur le précédent, on devra constater un accroissement de g ; c'est ce qui résulte des observations de M. Airy. On peut prévoir que, à mesure qu'on s'enfoncera, l'effet soustractif augmentant toujours compensera l'effet additif, puis le dépassera : g diminuera donc de nouveau, jusqu'à reprendre la même valeur qu'à la surface du sol, puis décroître d'une manière continue.

Remarque. — Ces considérations sont précisées par un calcul de M. Roche. En admettant que la croûte terrestre soit constituée par des couches concentriques homogènes, mais de densités croissantes, et que l'accroissement de densité soit proportionnel au carré de la distance au centre, M. Roche trouve que :

1° La pesanteur doit croître dans l'intérieur du globe jusqu'à une profondeur égale à 1/6 du rayon terrestre et qu'on a à cette profondeur

$$g' = \frac{16}{15} g.$$

2° La pesanteur doit, à partir de cette profondeur, décroître d'une manière continue. C'est à la profondeur de 1/3 du rayon terrestre que son intensité reprend la même valeur qu'à la surface.

Comme les mines les plus profondes ne descendent guère au delà de 1 kilomètre, les résultats de ce calcul ne sont pas susceptibles d'une vérification directe. Il faut donc se contenter des expériences de M. Airy, dont les résultats sont d'ailleurs en parfaite concordance avec les calculs de M. Roche.

113. **Origine de la pesanteur. — Attraction universelle.** — Avant de rechercher les causes des variations de la pesanteur à la surface du globe, il convient de remonter aux origines de cette force et d'en déterminer la nature d'après ses caractères physiques. Nous avons supposé précédemment que la force qui fait tomber les corps à la surface du globe a la même origine que la force qui fait circuler les planètes autour du Soleil, *autrement dit*, que la pesanteur n'est qu'une des formes de l'attraction universelle. C'est cette hypothèse qu'il s'agit de justifier. Rappelons tout d'abord la définition et précisons les caractères de la force cosmique qui est connue sous le nom d'*attraction universelle*.

1° Lois de Képler. — L'astronome Képler, mettant à profit les nombreuses observations de l'astronome Tycho-Brahé, en déduisit trois lois empiriques, qui représentent exactement, — à quelques perturbations près, — tous les mouvements du système solaire.

I. *Loi des aires. — Chaque planète tourne autour du Soleil, d'un mouvement varié*, de telle manière que *son centre décrive une courbe plane* et que *son rayon vecteur engendre des aires proportionnelles aux temps.*

On appelle *rayon vecteur* la ligne idéale qui joint le centre du Soleil au centre de la planète, dans l'une quelconque de ses positions sur son orbite. On appelle *orbite* (de *orbis*, roue, cercle) la courbe décrite par le centre de la planète. Supposons que la courbe plane AP (fig. 99) soit l'orbite d'une planète, et que le centre du Soleil soit en F. Si les arcs A*f*, a*P*, *bc*, *de* représentent les chemins parcourus par la planète dans des temps égaux, les secteurs FA*f*, F*a*P, F*bc*, F*de* représentent les aires engendrées par le rayon vecteur pendant les mêmes intervalles de temps : d'après la loi, ces aires doivent être égales, et, comme les côtés de ces secteurs sont très *inégaux*, il s'ensuit que leurs bases curvilignes A*f*, a*P*, *bc* et *de* sont *inégales :* le mouvement curviligne de la planète n'est donc pas *uniforme*, c'est un mouvement *varié*, défini par la loi des aires.

II. *Loi des orbites. — Les orbites des planètes sont des ellipses dont un foyer est occupé par le Soleil.*

Il s'agit, bien entendu, dans cet énoncé, du *centre* du Soleil et des *centres* des planètes. Le centre du Soleil étant, par exemple, en S (fig. 100), une planète quelconque dont le centre est en M, à un instant donné, décrit l'ellipse MPM'A dont l'un des foyers coïncide avec le point S. Elle se trouve donc, pendant le cours d'une révolution complète, à des distances variables du Soleil. La distance minimum PS (*périhélie*) et la distance maximum AS (*aphélie*) correspondent aux deux extrémités du grand axe AP de l'orbite ; les distances MS et M'S (*moyenne distance*), qui correspondent aux deux extrémités du petit axe, sont

égales. Nous avons d'ailleurs exagéré sur la figure les rapports de ces distances, car les ellipses planétaires ont toutes des excentricités très faibles, qui varient entre 0,007 (pour l'orbite de Vénus, qui est presque circulaire) jusqu'à 0,205 (pour l'orbite de Mercure, qui est la plus allongée, du moins parmi celles des huit grandes planètes); l'excentricité de l'orbite terrestre ou écliptique n'est que 0,016.

III. *Loi des durées.* — *Les carrés des temps des révolutions* des différentes planètes *sont proportionnels aux cubes des grands axes* de leurs orbites.

Les deux premières lois définissent le mouvement individuel de chaque planète; la troisième loi rattache par un lien commun tous les mouvements du

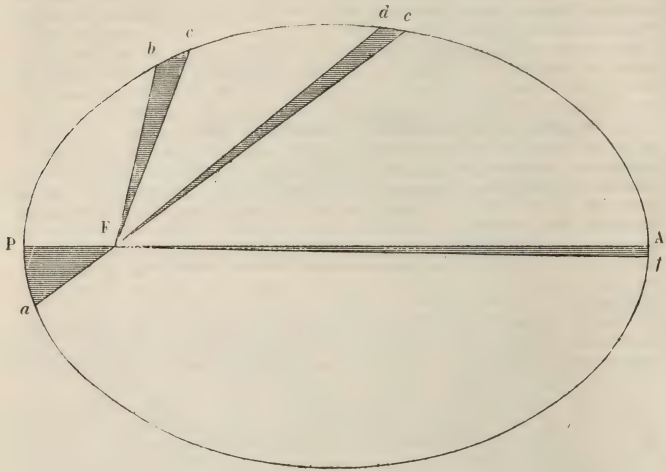


Fig. 99.

système solaire. En effet, si l'on appelle a le demi grand axe de l'orbite et T la durée de révolution annuelle pour une planète, a' et T' les deux mêmes éléments pour une deuxième planète, a'' et T'' pour une troisième, etc., on aura la suite de rapports égaux

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a''^3}{T''^2} = \ldots = \text{constante}.$$

2° Interprétation des lois de Képler. — C'est en partant de ces lois empiriques que Newton a pu résoudre, pour tous les mouvements du système solaire, ce problème fondamental de la dynamique : Étant donné le mouvement d'un système matériel, déterminer la force qui le produit.

De la loi des aires il déduisit la *direction* de la force qui sollicite une planète en chaque point de sa trajectoire : cette force est *constamment dirigée suivant le rayon vecteur* de la planète et *vers le centre* du Soleil. Cette première conséquence était d'ailleurs déjà connue de Képler.

De la loi des orbites Newton déduisit la *grandeur* de la force qui sollicite

une planète en chaque point de sa trajectoire. Il démontra que l'accélération γ du mouvement elliptique est donnée à chaque instant par la formule

$$\gamma = \frac{k^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

où k représente le double de l'aire décrite pendant l'unité de temps par le rayon vecteur de la planète, a et b le demi grand axe et le demi petit axe

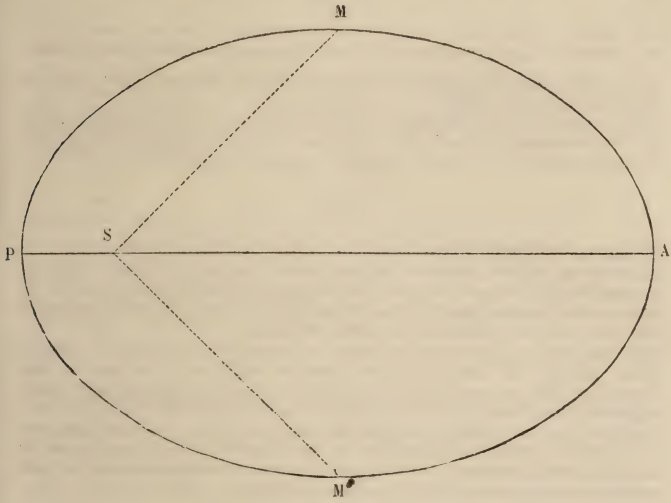


Fig. 100.

de son orbite, et r la longueur actuelle du rayon vecteur. En appelant m la masse de la planète et F la force émanée du Soleil, on a en général

$$F = m\gamma.$$

En remplaçant γ par la valeur précédente, et en posant $\frac{k^2 a}{b^2} = \mu$, il vient

$$F = m\frac{\mu}{r^2}.$$

La force qui sollicite la planète est donc, à chaque instant, *en raison inverse du carré de la distance de la planète au Soleil* (distance comptée à partir des centres).

Enfin, dans la formule précédente, la quantité μ représente la force qui sollicite l'unité de masse d'une planète, située à la distance r : il résulte de la troisième loi de Képler que *cette quantité μ est une constante*. En effet, nous avons posé $\mu = \frac{k^2 a}{b^2}$; or nous avons représenté par $\frac{k}{2}$ l'aire décrite pendant l'u-

nité de temps par le rayon vecteur de la planète ; et comme ce rayon vecteur décrit l'aire de l'ellipse tout entière πab pendant la durée T d'une révolution, on a évidemment

$$\frac{k}{2} = \frac{\pi ab}{T}, \qquad \text{d'où} \qquad k^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}.$$

En substituant cette valeur à k^2 dans l'équation qui définit μ, il vient

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

et, comme on a $\frac{a^3}{T^2} =$ constante, il s'ensuit que $\mu =$ constante : donc *la force qui sollicite l'unité de masse est la même, à la même distance, pour toutes les planètes du système solaire.*

3° Loi de l'attraction solaire ou loi de Newton. — Il résulte de cette analyse que le mouvement de chaque planète sur son orbite peut être expliqué par l'attraction d'une force F, émanée du Soleil, ayant pour expression

$$F = \frac{\mu m}{r^2},$$

μ étant une constante qui a la même valeur pour toutes les planètes, m la masse de la planète considérée et r sa distance variable au Soleil. C'est cette conclusion que Newton a exprimée en disant que : *Tout se passe comme si le Soleil attirait chaque planète proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de sa distance au centre du Soleil.*

4° Hypothèse de l'attraction universelle ou hypothèse de Newton. — Newton ayant expliqué les mouvements des planètes par l'attraction solaire, dont l'existence n'est pas une hypothèse, mais un résultat expérimental, voulut expliquer l'attraction solaire elle-même en imaginant une force plus générale. Il supposa que *deux points matériels, de masses* m *et* m', *s'attirent l'un l'autre, proportionnellement au produit de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance* r. La force f qui s'exerce sur chacun d'eux est dirigée suivant la droite qui les joint et a pour expression

$$f = \varphi \cdot \frac{mm'}{r^2},$$

φ étant l'attraction qui s'exercerait entre deux points de masses égales chacune à l'unité de masse et distants de l'unité de longueur : φ est ce qu'on appelle la *constante de l'attraction universelle.*

114. **Explication de l'attraction solaire.** — En partant de cette hypothèse, il est facile de démontrer que *l'attraction solaire est un cas particulier de l'attraction universelle.* En effet, on déduit immédiatement de l'hypothèse de Newton les théorèmes suivants :

I. *Action d'une sphère homogène sur un point extérieur. — Une sphère homogène (ou formée de couches concentriques homogènes) attire un point matériel extérieur comme si la masse totale de la sphère était condensée en son centre.*

Soit M la masse totale de la sphère, m' la masse du point et d sa distance au centre : l'attraction mutuelle qui s'exerce entre la sphère et le point sera exprimée par l'équation

$$f = \varphi \cdot \frac{Mm'}{d^2}.$$

II. *Action réciproque de deux sphères homogènes. — Deux sphères homogènes (ou formées chacune de couches concentriques homogènes) s'attirent mu-*

tuellement comme si leurs masses totales étaient respectivement condensées en leurs centres.

Ce théorème est un corollaire du précédent. Soit M la masse totale de l'une des sphères, m celle de l'autre, et r la distance de leurs centres. Ces deux sphères s'attirent exactement de la même manière que deux points matériels de masses M et m, séparés par la distance r. Cette attraction F sera donc exprimée par la formule

$$F = \varphi \cdot \frac{Mm}{r^2}.$$

Ce dernier cas est précisément celui de l'attraction solaire. Il suffit d'admettre que le Soleil et les planètes soient constitués par des couches sphériques concentriques homogènes, pour en déduire qu'il s'exerce entre le Soleil et chaque planète une attraction réciproque représentée par la formule précédente. Si l'on remarque que le produit φM est constant, quand il s'agit de l'action du Soleil sur toutes les planètes, et qu'on pose $\varphi M = \mu$, la formule précédente deviendra

$$F = \frac{\mu m}{r^2}.$$

C'est la formule qui exprime la loi de Newton.

Or, si l'on part de l'hypothèse d'une attraction solaire, représentée par cette formule, pour résoudre le problème inverse de celui de Newton, on trouve par le calcul que les planètes exécutent autour du Soleil, considéré comme fixe, des mouvements déterminés par des lois identiques aux lois de Képler.

Remarque. — En réalité, le Soleil n'est pas fixe par rapport aux planètes, puisque l'attraction est mutuelle. Cette force ayant pour expression $\varphi \frac{Mm}{r^2}$, si l'accélération du mouvement de la planète vers le Soleil est $\frac{\varphi M}{r^2}$, inversement l'accélération du mouvement du Soleil vers la planète est $\varphi \frac{m}{r^2}$. Si l'on recommence le calcul précédent, en tenant compte de cette dernière accélération, on arrive à cette conclusion que la troisième loi de Képler n'est pas exacte : c'est-à-dire que le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ n'est pas une constante pour toutes les planètes du système ; il varie d'ailleurs extrêmement peu, à cause de l'énorme différence qui existe entre la masse du Soleil et celle d'une planète quelconque.

115. **Explication de la pesanteur : elle est un cas particulier de l'attraction universelle.** — Nous pouvons maintenant étendre à la pesanteur l'assimilation que nous avons démontrée pour l'attraction solaire. En effet, si la pesanteur n'est pas autre chose que l'attraction planétaire exercée par l'ensemble des points de la Terre sur les corps de petites dimensions placés à sa surface, elle doit suivre les mêmes lois que cette attraction. Or nous savons que cette dernière force est la même que si toute la masse de la Terre — supposée sphérique et homogène ou formée de couches concentriques homogènes — était condensée en son centre. En appelant f son action totale sur un corps de masse m, M la masse totale de la Terre, R son rayon et z l'altitude du corps, on a

$$[1] \qquad f = \varphi \cdot \frac{Mm}{(R+z)^2}$$

et pour l'accélération de cette force

$$[2] \qquad \gamma = \frac{f}{m} = \varphi \frac{M}{(R+z)^2}.$$

Comparons ces deux quantités f et γ, qui caractérisent l'attraction terrestre au poids P du corps et à l'accélération g qui caractérisent la pesanteur.

I. *Direction des deux forces.* — La force f est dirigée vers le centre du sphéroïde terrestre. Or nous avons démontré que la direction de la pesanteur, autrement dit *la verticale*, étant normale à la surface des eaux tranquilles, va sensiblement passer au centre de la Terre : donc la direction de l'attraction est la même que celle du poids.

II. *Intensité des deux forces.* — L'intensité de l'*attraction terrestre* est représentée, comme pour la pesanteur, par l'accélération du mouvement qu'elle imprime aux corps attirés. On voit d'abord que cette accélération, donnée par la formule [2], est indépendante de la masse m du corps attiré. Or nous avons démontré qu'il en est de même pour l'accélération de la pesanteur, puisque ***tous les corps tombent, dans le vide, avec la même rapidité.***

La formule [2] prouve en outre que l'intensité de l'attraction terrestre varie en raison inverse du carré de la distance du corps attiré au centre de la Terre. Or les altitudes dont on dispose à la surface du globe sont trop petites, par rapport au rayon terrestre, pour qu'on ait pu vérifier directement, même par

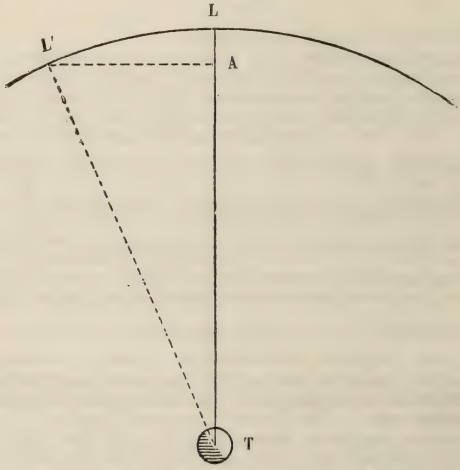


Fig. 101.

l'excellente méthode du pendule, si l'intensité de la pesanteur, c'est-à-dire g, varie d'après la même loi. Mais si, comme l'a fait Newton, on considère la révolution mensuelle de la Lune autour de la Terre comme le mouvement d'un corps pesant qui tombe vers la Terre par l'effet de la pesanteur, il sera possible de faire cette vérification.

Si L est la position de la Lune sur son orbite au temps t (fig. 101) et L' sa position au temps t', on peut admettre que le satellite est tombé vers la Terre de la hauteur LA pendant l'intervalle de temps $(t' - t)$. L'accélération γ de cette chute, c'est précisément la valeur que prend l'intensité g de la pesanteur à la distance où est la Lune. Si la loi de l'attraction s'applique à la pesanteur, on

doit avoir

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{R^2}{(R+z)^2}.$$

Ici $R + z$ est égal à la distance des centres de la Lune et de la Terre, c'est-à-dire à 60 rayons terrestres. On a donc

$$\left(\frac{R}{R+z}\right)^2 = \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \frac{1}{3600},$$

et par suite

$$\gamma = \frac{1}{3600} g = \frac{9^m,8}{3600} = 0^m,00272.$$

Or on peut calculer directement γ en fonction des éléments du mouvement de la Lune sur son orbite. En effet, si nous supposons, comme l'a fait Newton, que ce mouvement est circulaire et uniforme, l'accélération γ n'est pas autre chose que l'accélération centripète (39) définie par la formule $\frac{V^2}{\rho}$, V étant la vitesse du mouvement circulaire et ρ le rayon de l'orbite. Or, d'une part, ρ est égal à la distance de la Lune à la Terre, c'est-à-dire à 60 R ou $60 \times 6\,360\,000$ mètres. D'autre part, on peut calculer aisément V en divisant la circonférence que décrit le centre de la Lune par la durée d'une révolution : on a

$$V = \frac{2\pi\rho}{T} = \frac{2\pi . 6\,360\,000^m \times 60}{27^j\ 7^h\ 43^m\ 4^s}.$$

En convertissant T en secondes, on trouve environ $V = 1020$ mètres. On a donc enfin

$$\gamma = \frac{1020^2}{60 \times 6\,360\,000} = 0,00272.$$

On voit qu'on trouve pour γ le même nombre que précédemment, jusqu'à la cinquième décimale. La pesanteur suit donc la même loi de variation avec la distance que l'attraction terrestre : d'où il résulte que ces deux forces sont identiques en intensité comme en direction, et, par suite, que la pesanteur n'est pas autre chose que l'*attraction planétaire* de la Terre, c'est-à-dire un cas particulier de l'*attraction universelle.*

116. **Causes des variations de g à la surface du globe.** — Il nous est facile maintenant de nous rendre compte des variations que subit la pesanteur dans les différents lieux du globe terrestre.

1° *Variation avec l'altitude.* — Cette variation est une conséquence directe de la loi de Newton; c'est de cette dernière loi que nous avions déduit par le calcul la loi de cette variation : nous venons de justifier cette méthode *à priori* en démontrant l'identité de la pesanteur et de l'attraction newtonienne.

2° *Variation avec la latitude.* — Cette variation, dont nous avons déterminé la loi empiriquement, est due à deux causes d'inégale importance. La cause principale est le mouvement de rotation diurne de la Terre, d'où résulte une diminution du poids des corps, variable elle-même avec la latitude; l'autre cause est la forme même du globe terrestre, lequel n'est pas une sphère, mais un ellipsoïde aplati aux pôles de rotation. Nous allons en examiner successivement les effets sur l'intensité de la pesanteur.

I. *Conséquences immédiates du mouvement de rotation de la Terre : force centripète et force centrifuge.* — On sait que la Terre, indépendamment de son mouvement planétaire autour du Soleil, est animée d'un mouvement de rotation sur elle-même, parfaitement uniforme et s'accomplissant en *un jour si-*

déral, ou bien en 86 104 *secondes de temps moyen*. L'axe de rotation est déterminé par deux points fixes, les pôles terrestres, dont la fixité est démontrée par l'invariabilité des latitudes géographiques.

Force centripète. — Soit un point quelconque A de la surface terrestre : il décrit, en vertu du mouvement diurne, autour de la ligne des pôles PP′ (fig. 102), une circonférence de rayon r qui est un *cercle parallèle* du globe. Nous avons vu (40) que le point A est animé d'une vitesse tangentielle V, constante en grandeur, mais continuellement modifiée en direction par une accélération centripète N, qui est toujours dirigée vers le centre C du cercle (de là son nom), et qui est constamment égale à $\frac{V^2}{r}$. Quelle que soit l'origine de la force F qui produit le mouvement du point A, elle peut être exprimée en fonction de son accélération N et de la masse du point (d'après la formule générale $F = m\gamma$) ; elle est donc égale à $m\frac{V^2}{r}$, et elle est dirigée à chaque instant dans le même sens que l'accélération N : on l'appelle, pour cette raison, *force centripète*. Pour le point A que nous avons considéré en particulier, cette force centripète résulte évidemment des liaisons matérielles qui rattachent ce point à la croûte terrestre.

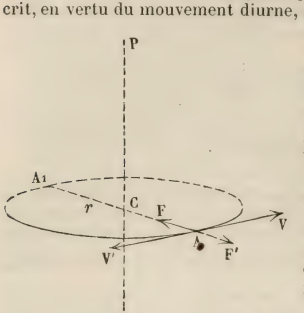


Fig. 102.

Force centrifuge. — Supposons maintenant qu'on pose en A, à un instant donné, un point matériel de masse m, parfaitement libre, et nullement lié à la croûte terrestre. Ce point matériel ne restera évidemment pas superposé au point mobile A : en vertu de son inertie, il *résistera* au mouvement de A, et restera en arrière, sur la tangente au cercle en A, dans le sens AV′. *Tout se passera*, pour un observateur placé en A, *comme si le point matériel était lancé* dans le sens AV′ avec une vitesse tangentielle égale à (— V), et, par conséquent, comme si le point matériel était soumis à l'action d'une force F′ (fig. 102), égale et contraire à celle qui produit la vitesse V. Or, cette dernière étant appelée *force centripète*, on a appelé l'autre *force centrifuge*. Mais, tout en acceptant ce nom, *parce qu'il est consacré par l'usage*, il faut bien remarquer :

1° Que la force centrifuge n'est pas une force physique, ayant une existence propre, mais simplement une force *fictive*, servant à désigner commodément un effet de l'inertie des corps;

2° Que cet effet d'inertie n'est même pas *centrifuge*, puisqu'il consiste en un mouvement tangentiel.

Remarque. — En résumé, on peut définir *au point de vue physique* la force centrifuge de la manière suivante : C'est une force égale et opposée à la *force centripète* qu'il faudrait appliquer à un point matériel libre, pour qu'il restât en repos relatif par rapport à un système animé d'un mouvement de rotation. On peut dire aussi que c'est la force qu'il faudrait imaginer pour définir le mouvement relatif qu'un point matériel libre prendrait, en vertu de son inertie, par rapport au système tournant. A ce dernier point de vue, la force centrifuge peut être envisagée comme la *réaction* de la force centripète. Car si un point matériel est entraîné dans le mouvement de rotation du système, en vertu de liaisons matérielles qui réalisent la force centripète, on peut dire que, inversement, le point matériel réagit sur ces liaisons, pendant toute la

durée du mouvement, en vertu de son inertie propre : c'est cette réaction qui réalise la *force centrifuge*.

La force centripète provenant des liaisons est appliquée au point matériel, et la force centrifuge, provenant de l'inertie du point matériel, est appliquée aux liaisons. Cela est évident pour une fronde, qu'on fait tourner avec la main. La force centripète, nécessaire au mouvement de rotation, émane de la main et est transmise à la fronde par la corde tendue ; la force centrifuge, réaction de la fronde, est appliquée à la main, par l'intermédiaire du cordon.

II. *Calcul des effets de la rotation terrestre sur les corps pesants.* — Ainsi, un corps de masse m, placé en un point A de la surface terrestre, tend à s'en échapper, par suite de son inertie : et l'effet de cette inertie est identique à celui que produirait une force dite centrifuge, appliquée au corps, et égale et contraire à la force centripète qui produit la rotation du point A. Si donc les corps n'étaient pas *pesants*, ils seraient tous lancés dans l'espace, par suite de leur inertie ; aucun d'eux ne resterait à la surface de la terre. C'est la pesanteur qui les y retient. Inversement, tous les corps réagissent sur la pesanteur, avec une force précisément égale à la force centrifuge. Il résulte nécessairement de cette réaction, non seulement une diminution dans l'intensité de la pesanteur, mais encore un changement dans sa direction : on peut en calculer les effets.

Points situés sur l'équateur terrestre. — Le cas le plus simple est celui d'un corps pesant, de masse m, situé sur l'équateur (fig. 103), en un lieu figuré par le point A_0. La masse, posée en A_0, est soumise à deux forces : son poids p qui résulte de l'action de la pesanteur, et la force centrifuge F_0 qui représente l'effet de la rotation ; celle-ci est toujours perpendiculaire à l'axe PP', elle est donc dirigée suivant A_0F_0 ; le poids p, étant toujours dirigé vers le centre C de la terre, se trouve ici perpendiculaire à l'axe PP' : donc, à l'équateur, *la force centrifuge est directement opposée au poids du corps.* Ce n'est donc pas le poids p qu'on observera à l'équateur, mais un poids apparent p_0 donné par l'équation

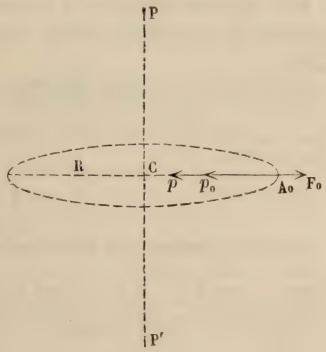


Fig. 103.

$$[1] \qquad p_0 = p - F_0.$$

Ce n'est pas davantage l'accélération vraie g qu'on mesurera à l'équateur, mais une accélération apparente g_0, donnée par l'équation

$$[2] \qquad g_0 = g - \frac{V_0^2}{R},$$

qu'on déduit de la précédente en remplaçant p_0, p et F_0 par leurs valeurs respectives mg_0, mg et $m\frac{V_0^2}{R}$.

Or V_0 est la vitesse de rotation à l'équateur, elle est égale à $\frac{2\pi R}{T}$ (T étant la durée du jour sidéral) ; par conséquent

$$\frac{V_0^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

En remplaçant $2\pi R$ par sa valeur en mètres ($40\,000\,000^m$) et T par sa valeur en secondes de temps moyen ($86\,464^s$), il vient

$$\frac{V_0^2}{R} = 0{,}03368.$$

D'un autre côté, on a mesuré g_0 à l'équateur à l'aide du pendule, et l'on a trouvé

$$g_0 = 9^m{,}7807.$$

En substituant ces valeurs numériques dans l'équation [2], et en la résolvant par rapport à g, on a

$$[3] \qquad g = 9^m{,}7807 + 0^m{,}03368.$$

Remarques. — 1° Si l'on prend le rapport $\frac{0{,}03368}{9{,}7807}$, on le trouve sensiblement égal à $\frac{1}{289}$. On peut donc écrire l'équation [3] sous la forme suivante :

$$[3\ bis] \qquad g = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\right).$$

Cette équation signifie que la diminution subie par l'accélération g à l'équateur, par suite de la rotation terrestre, est égale à $\frac{1}{289}$ de la valeur *observée*.

2° Si l'on prend le rapport $\frac{0{,}03368}{g}$, on trouve $\frac{1}{290}$ au lieu de $\frac{1}{289}$. En négligeant la différence entre ces deux fractions, on peut aussi écrire l'équation [2] sous la forme

$$[2\ bis] \qquad g_0 = g\left(1 - \frac{1}{289}\right).$$

qui permet d'énoncer une remarque curieuse. Le terme correctif $\frac{1}{289}$ étant proportionnel à $\frac{V_0^2}{R}$, si V_0 devenait 17 fois plus grand, le terme correctif deviendrait lui-même 17^2 fois plus grand. Or $17^2 = 289$; on aurait donc

$$\frac{1}{289} \times 17^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad g_0 = \text{zéro}.$$

Donc, si la Terre tournait 17 fois plus vite, la pesanteur serait complètement annulée à l'équateur : les corps n'y seraient plus *pesants*, et, pour une vitesse tant soit peu plus grande, ils seraient lancés dans l'espace.

Points situés sur un parallèle quelconque. — Considérons maintenant un point A_1 situé sur un parallèle $A_1A'_1$, déterminé en position par l'angle λ que fait le rayon CA_1 avec l'équateur : cet angle λ est la *latitude géographique*, commune à tous les points du parallèle (fig. 104). Prenons pour plan de la figure le plan passant par le point A_1 et par la ligne des pôles PP' : c'est ce qu'on appelle un *méridien ;* ce méridien coupe la Terre suivant un grand cercle PAP', en admettant que la Terre soit sphérique (mais nous n'avons pas besoin de cette hypothèse pour le moment).

La masse m posée au point A_1 est soumise à deux forces : son poids p, dirigé suivant A_1C, et la force centrifuge F_1, dirigée suivant AF_1, perpendiculairement

à PP'. Ces deux forces ont une résultante, qui est déterminée par la diagonale A_1B_1 du parallélogramme des forces. C'est cette diagonale, $A_1B_1 = p_1$, qui représente le *poids sensible*, c'est-à-dire le poids de la masse m, *observé* sous la latitude λ.

On voit tout d'abord que ce poids sensible p_1 est plus petit que le poids réel p donc la pesanteur est diminuée par l'effet de la rotation; mais ici la diminution est plus faible que sous l'équateur, pour deux raisons : la première, c'est que la force centrifuge, étant proportionnelle au carré de la vitesse de rotation, diminue en même temps que celle-ci, à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur; la deuxième raison, c'est que cette force centrifuge n'est plus directement opposée au poids, mais fait avec lui un angle précisément égal à l'angle λ; par suite, au lieu d'agir tout entière, comme sous l'équateur, elle n'agit que par sa composante $F \cos\lambda$, laquelle diminue aussi à mesure que λ augmente, c'est-à-dire qu'on s'éloigne de l'équateur.

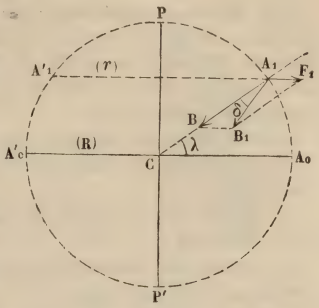


Fig. 104.

Déviation de la verticale. — On voit en outre que la direction du *poids sensible*, c'est-à-dire la *verticale du lieu*, ne va pas passer par le centre de la Terre, car elle fait avec la direction A_1C du rayon terrestre un angle δ, égal à CA_1B_1, qui dépend de la latitude λ. On trouve par le calcul que cette déviation δ est représentée par la formule

$$\delta = \frac{1}{578} \sin 2\lambda$$

elle est donc *nulle* à l'équateur ainsi qu'au pôle, et elle est maximum à la latitude 45° : elle est alors égale à 0° 11′ 30″.

III. *Influence de l'aplatissement terrestre.* — Enfin nous avons dit que la Terre n'est pas sphérique : c'est un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles et renflé à l'équateur. Cet aplatissement s'évalue par l'excentricité $\frac{a-b}{a}$ de l'ellipse méridienne; d'après l'ensemble des mesures géodésiques, il est très voisin de $\frac{1}{300}$. Il paraît dû précisément à la force centrifuge qui a transporté vers l'équateur une partie de la masse terrestre avant que celle-ci se fût solifiée. Par suite de cet aplatissement, les points voisins des pôles sont plus rapprochés du centre terrestre que les points voisins de l'équateur. Il est donc naturel, d'après la loi générale de la gravitation, que l'attraction terrestre soit plus forte sur les premiers que sur les derniers.

IV. *Conclusion générale.* — Ainsi, pour ces deux motifs, parce que la force centrifuge décroît et parce que l'attraction augmente, g doit croître quand on s'éloigne de l'équateur pour marcher vers l'un ou l'autre pôle terrestre. C'est précisément ce qui résultait de la formule empirique

$$g = a + b \sin^2 \lambda.$$

Remarque. — En résumé, il résulte de la variation de latitude trois causes de diminution pour g : la diminution de la force centrifuge, l'inclinaison de la

force centrifuge et l'aplatissement de la surface terrestre. Or, si l'on calcule les trois effets correspondants à ces trois causes, on trouve que chacun d'eux est représenté par un terme en $\sin^2 \lambda$. Par suite, l'effet total, dû à la variation de latitude, peut s'exprimer par un terme en $\sin^2 \lambda$. C'est pourquoi l'on a essayé la forme $a + b \sin^2 \lambda$ quand on a cherché à représenter par une formule empirique les variations de g, mesurées à l'aide du pendule.

117. **Diverses applications du pendule composé.** — La détermination de g, à diverses latitudes, est la principale des applications du pendule. On a fait plusieurs autres applications intéressantes du pendule, les unes pratiques, les autres théoriques, parmi lesquelles nous citerons :

La régulation des horloges, par Huygens;

La détermination indirecte de la densité moyenne de la Terre, par Airy;

La manifestation sensible du mouvement diurne de la Terre, par Léon Foucault;

La mesure de l'intensité d'une force quelconque, constante en grandeur et en direction.

Nous nous contenterons de parler de la première et de la dernière de ces applications [1].

1° *Régulation des horloges.* — C'est Huygens qui eut le premier l'idée d'appliquer l'isochronisme des petites oscillations du pendule à la régulation du mouvement des horloges [2].

La figure 105 montre le mécanisme de cette application.

La tige du pendule régulateur s'engage dans une fourchette *a* destinée à transmettre le mouvement à une seconde tige *b*, laquelle est liée à un axe horizontal O. A cet axe est fixée une pièce *mn*, qu'on nomme *échappement à ancre* à cause de sa forme, et qui se termine à ses extrémités par deux palettes alternativement en prise avec les dents d'une roue R, qui est dite la *roue de rencontre*, ou encore *roue à rochet*, ou *roue d'échappement*. Cette roue, sollicitée par le moteur qui fait marcher l'horloge, tend à prendre un mouvement de rotation continu dans le sens marqué par la flèche. Si le pendule est au repos, la roue est arrêtée par la palette *m*, et, avec elle, tout le mouvement d'horlogerie. Au contraire, si le pendule oscille et prend la position indiquée en ligne ponctuée, la dent qui butait contre la palette *échappe*, et la roue tourne, mais d'une demi-dent seulement, parce que, l'arc *mn* inclinant en sens contraire, la palette *n* vient à son tour arrêter une

1. Voir les autres applications du pendule dans le *Cours de physique* de M. Violle, t. Ier, et dans le grand Traité de MM. Jamin et Bouty.

2. En 1657; quelques années plus tard, en 1665, il appliqua le *ressort spiral* à la régulation des montres.

dent. Puis, à l'oscillation suivante, cette dent échappe, et c'est la palette *m* qui arrête alors la dent qui vient après celle qu'elle arrêtait d'abord, et ainsi de suite : en sorte qu'à chaque oscillation double du pendule, la roue de rencontre avance d'une dent. Or les oscillations du pendule ont une faible amplitude et sont isochrones : par suite, la roue de rencontre et le mécanisme de l'horloge, qui en est solidaire, marchent et s'arrêtent à des intervalles égaux, et marquent des divisions égales du temps.

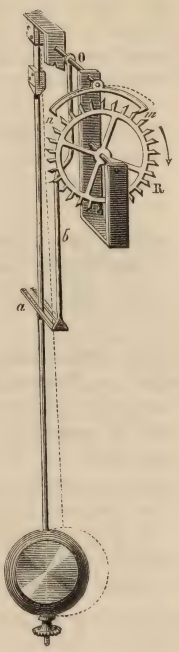


Fig. 105.

2° *Méthode des oscillations.* — On a utilisé, dans certains cas, la formule du pendule pour mesurer l'intensité des forces constantes en grandeur et en direction. Imaginons, en effet, un corps mobile autour d'un axe, mais soustrait à l'action de la pesanteur : tel serait un corps pesant assujetti à tourner autour d'un axe *vertical.* Supposons qu'on soumette ce corps à l'action d'un système de forces parallèles (F, F′ F″), de grandeur constante, toutes perpendiculaires à l'axe de rotation; par rapport à ces forces, le corps est dans la même situation qu'un pendule composé par rapport aux forces de la pesanteur; en un mot, le corps est un *pendule composé* par rapport au système de forces parallèles. Et, en effet, on pourrait répéter, dans ce cas, tout ce que nous avons dit précédemment au sujet du pendule composé. Le système (F, F′, F″,...) a une résultante R égale à la somme (F + F′...) et appliquée au centre des forces parallèles; si le corps est orienté de manière que la résultante R aille rencontrer l'axe, le corps *restera en équilibre;* si le corps est écarté de cette position d'équilibre, il prendra immédiatement un mouvement pendulaire, identique à celui du pendule composé, et représenté par les mêmes équations. La durée des petites oscillations sera donnée par la même formule-limite

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{M\gamma a}},$$

dans laquelle I représentera le moment d'inertie du corps (calculé par rapport à l'axe de rotation), M la masse totale du corps, γ l'accélération due à la force constante et a la distance de son point d'application (centre des forces parallèles) à l'axe de rotation. En posant $M\gamma = R$, on a

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{Ra}}.$$

C'est la formule générale de la méthode des oscillations. Elle permet de déterminer l'intensité R d'une force constante, en grandeur et en direction, en faisant osciller, sous l'action de cette force, un pendule composé, *non pesant* (c'est-à-dire soustrait à l'action de la pesanteur), et dont l'axe de suspension est perpendiculaire à la direction de la force constante.

Remarque. — Si la force constante n'était pas perpendiculaire à l'axe de suspension, on pourrait la décomposer en deux autres forces R et R'', l'une perpendiculaire à l'axe, et l'autre parallèle à l'axe : cette dernière n'ayant aucun effet sur le mouvement oscillatoire, c'est l'intensité R' de l'autre composante qui entrerait seule dans la formule précédente. On aurait

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{R'a}} \qquad \text{et} \qquad R' = R \sin \beta,$$

β étant l'angle de la direction de la force constante avec la direction de l'axe de rotation.

CHAPITRE V

MESURE DES GRANDEURS MÉCANIQUES ET PHYSIQUES. — SYSTÈME DES UNITÉS ABSOLUES OU SYSTÈME C. G. S. — INSTRUMENTS DE PRÉCISION.

118. **Définitions générales.** — 1° *Unités de mesure, valeur numérique. — Mesurer une grandeur* ou une *quantité concrète*, c'est la comparer à une certaine grandeur de même espèce, qu'on appelle *unité de mesure*. Le résultat de cette opération se nomme la *valeur numérique* ou, simplement, la *valeur* de la grandeur mesurée : c'est un *nombre abstrait* qui exprime combien de fois cette grandeur contient l'unité ou une partie aliquote de l'unité.

2° *Relation entre la valeur numérique et l'unité.* — Soit A une quantité concrète (longueur, superficie, volume ou poids) et soit a l'unité de mesure adoptée (mètre, are, litre ou kilogramme) : la valeur n de A sera, par définition, le quotient $\frac{A}{a}$. On a donc

$$n = \frac{A}{a}.$$

Il résulte de cette formule que la valeur d'une grandeur varie *en raison directe* de cette grandeur elle-même et *en raison inverse* de l'unité de mesure. Ainsi la distance de Paris à Vierzon (sur la voie ferrée), mesurée en kilomètres, a pour valeur le nombre 200; la distance de Paris à Limoges, qui est exactement double de la précédente, a pour valeur le nombre 400. Et si l'on évaluait ces deux distances à l'aide de la lieue (unité itinéraire *quadruple* du kilomètre), leurs valeurs numériques seraient représentées par 50 et par 100, nombres *quatre fois plus petits*.

3° *Unités arbitraires, système de mesures rationnelles : unités fondamentales et unités dérivées.* — Dans le choix des unités de mesure, on peut ne tenir aucun compte des relations physiques qui existent, ou des relations mathématiques qu'on peut établir, entre les diverses grandeurs à mesurer. On a alors un ensemble d'unités de mesure complètement indépendantes les unes des autres : ce sont des *unités arbitraires*. L'usage de pareilles unités a prévalu en France jusqu'en 1795, et il se perpétue de nos jours dans la plupart des pays étrangers. On peut, au contraire, profiter de ces relations, naturelles ou artificielles, entre les grandeurs d'espèces différentes, pour exprimer toutes les unités de mesure en fonction d'un petit nombre d'entre elles, convenablement choisies. Celles-ci restent seules des unités arbitraires : on les appelle *unités fondamentales;* toutes les autres s'en déduisent au moyen de *relations* ou de *définitions* aussi simples que possible : on les appelle *unités dérivées*. Ce ne sont donc plus des unités indépendantes, puisqu'elles se rattachent les unes aux autres d'une manière rationnelle. Leur ensemble constitue un système qu'on peut appeler *système de mesures rationnelles*. Tel est le *système des poids et mesures métriques* ou *système métrique* établi en France par la Convention nationale en 1795[1]. Tel est aussi le *système des mesures absolues* ou *système des unités C. G. S.*, introduit dans les sciences physiques, en 1881, par le Congrès international des électriciens.

119. **Avantages généraux d'un système de mesures rationnelles.** — Il suffit de comparer les unités métriques aux anciennes unités françaises ou bien aux unités étrangères actuelles pour faire ressortir la supériorité des mesures rationnelles sur les mesures arbitraires. Dans le système métrique, qui ne comporte que les mesures d'étendue et de forces, il n'y a qu'une unité fondamentale, le *mètre*. Cette seule unité, avec ses multiples et ses sous-multiples décimaux (décamètre, hectomètre, etc. ; décimètre, centimètre, etc.), permet d'évaluer toute espèce de longueurs, depuis les distances microscopiques des cellules jusqu'aux énormes distances des planètes. Toutes les autres unités sont des *unités dérivées*. Leurs valeurs, et leurs noms mêmes, se déduisent du mètre, soit par des définitions géométriques (mètre carré, mètre cube), soit par des définitions arbitraires, mais très simples (gramme). Et, comme celles-ci comportent les mêmes multiples et sous-multiples décimaux que l'unité fondamentale, elles suffisent amplement pour toutes les mesures d'étendue à deux dimensions

1. Loi du 18 germinal an III.

(surfaces, superficies), d'étendue à trois dimensions (volumes, capacités, solidités), ainsi que de poids et de forces. Le système métrique a donc remplacé par deux mots nouveaux et quelques mots composés, qui dérivent simplement et logiquement de ceux-ci, la terminologie prolixe, confuse et incohérente des anciennes mesures françaises (toise, pied, pouce, ligne, perche, arpent, boisseau, setier, livre, grain, etc., etc.), ainsi que des mesures étrangères (pouce, pied, yard, fathom, mille, acre, pinte, gallon, grain, once, livre, etc., etc.). C'est un perfectionnement comparable à ceux qui furent introduits dans l'arithmétique par la numération décimale, et dans la chimie moderne par la nomenclature de Lavoisier.

Ce n'est pas le seul avantage des systèmes de mesures rationnelles, dont le système métrique nous sert de type. En effet, la réduction des unités de mesure en fractions d'unité et la réduction inverse sont des opérations assez compliquées, lorsqu'il s'agit de mesures arbitraires. Elles nécessitent des calculs analogues à ceux de la conversion des degrés en minutes et secondes d'arc. Rien de plus simple, au contraire, avec les unités métriques, puisque toutes les mesures sont exprimées par des nombres entiers ou par des nombres décimaux qu'on peut soumettre directement aux opérations de l'arithmétique.

On peut enfin, par un choix convenable des *unités dérivées*, introduire dans les formules principales de la science les mêmes simplifications que dans les calculs. Empruntons encore un exemple au système métrique.

On sait, d'après un théorème de géométrie bien connu, que *le rapport des aires de deux rectangles est égal au produit des rapports de leurs côtés*. Si donc on désigne par S, a et b l'aire et les côtés du premier rectangle, par σ, α et β ceux du second, le théorème sera exprimé par l'égalité

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta}.$$

Supposons que σ soit précisément l'unité de surface, mais une *unité arbitraire*, par exemple un rectangle ayant 7 mètres sur 5 mètres. (On aurait alors $\sigma = 35^{mq}$, ce qui est à très peu de chose près la surface d'une ancienne mesure agraire, la *perche de Paris*[1]). Si les côtés sont exprimés en mètres, la formule qui

1. La *perche de Paris* valait exactement 324 pieds carrés, qui équivalent à $34^{mq},19$.

exprimera l'aire d'un rectangle ayant pour côtés a et b sera

$$S = \sigma . \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta}.$$

Mais si l'on adopte l'unité métrique de surface, c'est-à-dire le carré de 1 mètre de côté, on aura alors

$$\sigma = 1, \qquad \alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = 1,$$

et

$$S = ab,$$

formule simple, qu'on pourra énoncer simplement en disant que *l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

120. **Insuffisance du système métrique. Nécessité d'un système de mesures absolues : système de Gauss et système C. G. S.** — Nous savons que le système métrique ne comporte que des unités d'étendue et des unités de poids : il ne peut donc pas suffire à l'évaluation de toutes les grandeurs que l'on considère en mécanique et en physique. Il présente un inconvénient encore plus grave : c'est de n'avoir pas été universellement adopté par toutes les nations civilisées. Aussi les savants étrangers ont-ils employé dans leurs travaux des unités de mesure différentes des unités métriques et différentes entre elles. C'était tantôt, comme en France, le mètre pour l'étendue, le gramme pour les forces et la seconde pour le temps; tantôt le millimètre, le milligramme et la seconde ; tantôt le centimètre, le gramme et la seconde; tantôt le pied, le grain et la seconde ; tantôt le centimètre, le gramme et la minute. Quelquefois même on a mêlé ces unités : ainsi l'on a exprimé l'aire d'un plateau en mètres carrés et son épaisseur en millimètres [1]. Il est résulté de cette multiplicité de mesures que les mêmes formules ont été écrites, en divers pays, avec des coefficients différents, et que des résultats d'expériences identiques ont été exprimés par des nombres bien distincts. Pour n'en citer qu'un exemple, la même valeur de g qui est représentée en France par le nombre 9,80 (unités métriques) était représentée en Angleterre par le nombre 32,2 (pied anglais et seconde). Par suite, la lecture des mémoires scientifiques, rendue déjà si difficile par l'usage des langues étrangères, s'est déplorablement compliquée par l'emploi de ces unités différentes et par la nécessité de réduire tous les résultats numériques à une échelle commune.

1. Everett, *Unités et constantes physiques.*

Ce fut Gauss qui proposa le premier d'établir un système de mesures rationnelles, qui, à défaut de langue scientifique universelle, deviendrait un système de mesures universel et supprimerait tous les inconvénients des systèmes arbitraires ou nationaux. Le système de Gauss était fondé sur trois *unités fondamentales*, indépendantes :

1° Une *unité de temps*, la seconde;

2° Une *unité d'étendue*, le millimètre;

3° Une *unité de masse*, la masse du milligramme, c'est-à-dire la masse d'un corps qui pèserait dans le vide un milligramme.

Toutes les autres grandeurs de la mécanique et de la physique étaient mesurées à l'aide d'*unités dérivées*, rationnellement déduites des précédentes. L'ensemble de ces unités rationnelles fut appelé par Gauss *système d'unités absolues*, parce que les mesures faites à l'aide de ces unités ne dépendaient plus des unités arbitraires particulières à chaque pays.

Gauss n'avait eu en vue, en proposant son système, que le développement et la généralisation des observations magnétiques dans tous les pays civilisés. L'Association Britannique pour l'avancement des sciences reprit l'idée de Gauss pour l'étendre à la mesure de toutes les constantes de la physique, et en particulier aux constantes de l'électricité. Elle proposa, dès 1852, un *système d'unités absolues*, peu différent de celui de Gauss, qui fut adopté en 1865 par la Société royale de Londres. C'est le même système qui fut discuté et précisé en 1881 par le Congrès des électriciens, et définitivement consacré sous le nom de *système des unités absolues* ou système C. G. S. Cette dernière appellation est une abréviation des mots *Centimètre-Gramme-Seconde*, noms des trois unités fondamentales adoptées dans ce système.

Il convient d'adopter ce système de mesures, malgré les nombreuses imperfections de détail qu'il comporte, et que nous signalerons au fur et à mesure des définitions. En conséquence, nous indiquerons désormais les valeurs de toutes les constantes de la physique, d'abord en unités vulgaires du système métrique, et puis en unités scientifiques du système C. G. S.

121. **Exposé du système C. G. S.** — On appelle *système C. G. S.* l'ensemble des unités de mesure rationnelles, dites *unités absolues* ou *unités C. G. S.* On peut les subdiviser en trois catégories : les *unités fondamentales*, les *unités dérivées* et les *unités secondaires*.

I. Unités fondamentales. — Ce sont les unités de mesure arbitraires et indépendantes d'où l'on peut dériver toutes les autres, et qui sont, par conséquent, comme les *fondements* du système

tout entier. Trois unités suffisent pour exprimer toutes les autres. Ce sont :

Une longueur définie, le *centimètre*,
Une masse définie, la *masse du gramme*,
Un intervalle de temps défini, la *seconde*[1].

C'est avec les premières lettres C, G et S de ces trois unités qu'on a formé le symbole caractéristique de ce système.

1° *Unité de longueur C. G. S. : centimètre.* — Le centimètre se définit *théoriquement :* la centième partie du *mètre théorique*, c'est-à-dire de la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. Mais, comme il existe une petite différence entre le mètre théorique et la règle en platine déposée aux Archives sous le nom de *mètre-étalon*, c'est la *centième partie* de ce *mètre-étalon* qui a été prise pour unité de longueur dans le système C. G. S.

2° *Unité de masse C. G. S. : gramme-masse.* — Un poids défini ne pouvait servir d'unité fondamentale de force pour un système de mesures international, parce que, comme nous l'avons vu précédemment, le poids d'une masse déterminée est variable avec la latitude (en vertu de la formule $p = mg$). Cet inconvénient, signalé par Gauss, le conduisit à prendre pour unité fondamentale une *masse définie*, qui est une grandeur invariable, indépendante de la latitude, *absolue*, comme il disait : il choisit la *masse du gramme*, c'est-à-dire la masse d'un corps qui pesait 1 gramme dans le vide sous la latitude de Heidelberg. C'est cette même unité qui a été adoptée dans le système C. G. S. Les Anglais l'appellent *gramme* tout court ; mais en France nous sommes obligés de la nommer *masse du gramme* ou *gramme-masse*, à cause du sens spécial que possède le mot *gramme* dans notre système métrique[2].

1. Ce choix particulier est une affaire de convenance plutôt que de nécessité ; car trois unités indépendantes suffisent en théorie pour fonder tout le système. Par exemple, on aurait pu prendre :

Une masse définie,
Une quantité d'énergie définie,
Une densité définie.

(Everett, *Unités et constantes physiques.*)

2. Cette obligation est une objection grave contre le choix du mot *gramme* pour désigner l'unité de masse dans un système de mesures *international*. En effet, ce mot ayant déjà en France un sens précis et usuel, il est impossible de l'adopter tel quel, sous peine de confusion et d'obscurité. On est donc amené à employer le mot barbare de *gramme-masse* pour désigner le *gramme C. G. S.* et le mot *gramme-poids*, qui est un pléonasme, pour désigner l'unité de poids du système métrique. Le même inconvénient ne s'est pas produit dans la langue anglaise, puisque le mot *gramme* y était complètement étranger.

Le *gramme-masse* se définit théoriquement : la *millième partie* de la masse de 1 *kilogramme théorique*, le kilogramme théorique étant lui-même le poids de 1 décimètre cube d'eau pure à 4°, pesé dans le vide, à Paris. Mais le lingot de platine qui a été fondu pour réaliser le kilogramme théorique et qui est déposé aux Archives sous le nom de *kilogramme-étalon*, a une masse un peu inférieure à la masse théorique[1] : c'est donc *la millième partie de la masse du kilogramme-étalon* qui a été prise pour unité de masse C. G. S.

3° *Unité de temps C. G. S. : seconde.* — On a adopté l'unité de temps la plus généralement employée jusqu'alors, c'est-à-dire la *seconde* de temps moyen. On définit la *seconde :* la quatre-vingt-six mille quatre centième partie ($\frac{1}{86400}$) du *jour solaire moyen.*

II. Unités dérivées. — Toutes les grandeurs mécaniques et physiques peuvent être mesurées à l'aide d'unités *dérivées* des précédentes. Nous ne définirons actuellement que les unités des grandeurs déjà étudiées précédemment; nous définirons les autres au fur et à mesure qu'elles se présenteront dans le développement de cet ouvrage.

1° *Unité de surface C. G. S. : centimètre carré.* — Il se définit, comme dans le système métrique, *le carré de 1 centimètre de côté.* C'est donc le carré qui a pour côté l'unité de longueur C. G. S.

2° *Unité de volume C. G. S. : centimètre cube.* — C'est *le cube ayant pour côté 1 centimètre*[2], c'est-à-dire l'unité de longueur C. G. S.

3° *Unité de vitesse C. G. S.* — C'est *la vitesse d'un mobile, animé d'un mouvement uniforme, qui parcourt 1 centimètre en 1 seconde* (c'est-à-dire l'unité de longueur dans l'unité de temps).

L'unité de vitesse n'a pas reçu de nom particulier : on l'appelle simplement *unité de vitesse C. G. S.*, pour la distinguer des unités de vitesse qu'on a définies à l'aide d'autres unités de longueur et de temps.

4° *Unité d'accélération C. G. S.* — C'est *un accroissement de vitesse de 1 centimètre par seconde* (c'est-à-dire de l'unité de

1. D'après des recherches récentes, 1 centimètre cube d'eau pure à 4° a pour masse 1,0000013 (C. G. S.). C'est à la température de 2°,85 ou à celle de 5°,15 que sa masse devient égale à l'unité G. G. S.

2. Grâce au choix du centimètre comme unité C. G. S., il se trouve que la *densité C. G. S.* de l'eau pure (c'est-à-dire la masse du centimètre cube) est égale à l'*unité*, tandis que, dans le système métrique, où l'unité de volume est le décimètre cube, cette densité est égale à 1000000. C'est pour cela qu'on a adopté le centimètre et le gramme, plutôt que le mètre et le gramme

vitesse C. G. S. par unité de temps C. G. S.), dans un mouvement uniformément accéléré.

Cette unité n'a pas reçu de nom particulier : on l'appelle simplement *unité d'accélération C. G. S.*

Ainsi l'accélération de la pesanteur à Paris, qui est représentée par le nombre 9,8096 en unités métriques, est égale à 980,96 en unités d'accélération C. G. S. Les formules qui donnent l'accélération et la longueur du pendule à secondes, à la latitude λ et à l'altitude z, deviennent, dans le système C. G. S. :

$$G_{\lambda,z} = 980,61 - 2,539 \cos 2\lambda - 0,000003\, z,$$
$$L_{\lambda,z} = 99,357 - 0,2573 \cos 2\lambda - 0,0000003\, z.$$

5° *Unité de force C. G. S. : dyne.* — C'est *la force* (constante en grandeur et en direction) *qui, en agissant sur l'unité de masse C. G. S., lui imprime l'unité d'accélération C. G. S.* Cette unité de force C. G. S. a reçu le nom particulier de *dyne* (de δύναμις, puissance, force).

A Paris le *gramme-poids* (c'est-à-dire le poids de 1 gramme métrique) imprime à l'unité de masse C. G. S. (c'est-à-dire à sa propre masse) une accélération égale à 980,96 ; donc, en vertu du principe de la proportionnalité des forces aux accélérations, on a

$$\frac{1\ \text{(gramme-poids)}}{1\ \text{(dyne)}} = \frac{980,96}{1} = 980,96.$$

Le gramme-poids vaut donc 980,96 dynes.

Par suite, la dyne vaut, en unités métriques, $\frac{1}{980,96}$ de gramme-poids, c'est-à-dire environ 1 *milligramme-poids*. L'unité de force C. G. S. est donc une force assez faible.

La valeur du gramme-poids (en dynes) varie avec la latitude, tandis que la dyne a une valeur constante. Ainsi le gramme-poids vaut $980^d,61$ à la latitude de 45°, et $978^d,10$ sous l'équateur.

6° *Unité de travail C. G. S. : erg.* — C'est *le travail effectué par une dyne qui déplace son point d'application de 1 centimètre dans sa propre direction.* On lui a donné le nom particulier de *erg* (de ἔργον, travail) [1].

1. En introduisant ce mot dans la langue française, on aurait dû en modifier l'orthographe et la prononciation, qui sont antifrançaises. L'un des mots *ergie*, *ergone* ou *ergue* eût été préférable au point de vue de la correction et de l'euphonie. Une bonne raison aurait pu faire adopter ce dernier : c'est qu'il existe déjà dans la langue, puisque le mot français *exergue* vient également de ἐξ et ἔργον.

L'erg est aussi une unité très petite par rapport au kilogrammètre. En effet, la force de 1 kilogramme-poids valant 1000 grammes-poids, c'est-à-dire 980 960 dynes, et 1 mètre valant 100 centimètres, le produit de ces deux nombres, qui représente le travail de 1 kilogrammètre, est égal à $980\,960 \times 100$ ergs. Par conséquent un *erg* vaut $\frac{1^{\text{kgm}}}{98\,096\,000}$, environ *un cent-millionième* de kilogrammètre.

On peut encore mieux se rendre compte de la petitesse de l'erg, en remarquant que c'est le travail effectué par une force à peu près égale à 1 milligramme qui déplace son point d'application de 1 centimètre.

Remarque. — L'unité de travail est en même temps l'*unité d'énergie*, soit que l'on considère l'énergie à l'état potentiel, soit qu'on la considère à l'état cinétique (principe de l'équivalence du travail et de l'énergie).

7° *Unité de puissance C. G. S.* — Nous avons vu précédemment (74, 3°) que l'unité industrielle de travail ou unité de Watt, c'est-à-dire le *cheval-vapeur*, s'appelait encore *unité de puissance*. On appelle puissance d'une machine ou d'un moteur la quantité de travail qu'il peut fournir dans l'unité de temps [1].

L'unité de puissance C. G. S. est *la puissance d'un moteur qui fournit un erg par seconde*. Cette unité n'a pas reçu de nom particulier : on l'appelle simplement *unité de puissance C. G. S.*

Cette unité, de même que l'erg, est d'une petitesse extrême par rapport à l'unité métrique. Pour s'en rendre compte, il suffit de calculer la valeur du cheval-vapeur en unités C. G. S. Nous avons vu précédemment que 1 kilogrammètre vaut 98 096 000 ergs; par suite, 1 cheval-vapeur vaut $75 \times 98\,096\,000$ ergs, ce qui fait 7 357 200 000 ergs : par conséquent, un moteur qui fournit 75 kilogrammètres par seconde fournit 7 357 200 000 ergs par seconde; il a donc une puissance de 7 357 200 000 unités C. G. S. Inversement, l'unité de puissance C. G. S. est égale à

$$\frac{1 \text{ cheval-vapeur}}{7\,357\,200\,000},$$

environ *un sept-milliardième* de cheval-vapeur [2].

1. Cette grandeur caractérise une source de travail ou d'énergie par son débit; elle a une grande importance au point de vue du prix de revient du travail effectué : c'est donc un coefficient *industriel* plutôt que *scientifique*.

2. Évaluée avec cette unité, la puissance d'une *mouche* vaudrait *plusieurs unités*, celle d'un homme de peine en vaudrait *plus d'un milliard* et celle d'un cheval de trait près de *deux milliards et demi*.

III. Inconvénient pratique des systèmes d'unités absolues : unités secondaires. — La comparaison des unités C. G. S. aux unités ordinaires du système métrique met en lumière un inconvénient commun à tous les systèmes d'unités absolues : c'est que l'emploi de ces unités conduit souvent, dans la pratique, à des nombres extrêmement grands ou extrêmement petits, qui sont aussi incommodes à écrire qu'à énoncer.

Le système métrique n'était pas exempt de ce défaut. Le mètre, qui est d'un usage commode pour mesurer les longueurs usuelles, telles que la taille d'un homme, la largeur d'une place, la hauteur d'un édifice, ne convient plus ni pour les grandeurs astronomiques ni pour les grandeurs microscopiques. Ainsi la distance moyenne des centres de gravité de la Terre et de la Lune est égale environ à 60 rayons terrestres moyens [1], et le diamètre moyen des molécules a été évalué approximativement à $0^{\text{micron}},005$. Mesurées en mètres, ces grandeurs seraient représentées, l'une par le nombre 382 254 000, et l'autre par le nombre 0,000000005.

Mais cet inconvénient n'avait pas échappé aux fondateurs du système métrique, et ils avaient donné le moyen d'y remédier par la création des multiples et sous-multiples de l'unité fondamentale et des unités dérivées. Le kilomètre et le myriamètre, l'hectogramme et le kilogramme, etc. servent à exprimer commodément les grandes distances ou les poids considérables; le millimètre et le dix-millimètre, le centigramme et le milligramme, etc. servent pour les faibles longueurs ou les petits poids. Ces unités auxiliaires, qui remplacent l'unité fondamentale ou les unités dérivées dans l'évaluation de certaines grandeurs, s'appellent des *unités secondaires*. Le kilogramme, le myriamètre, le milligramme et le millimètre sont des unités secondaires métriques, dont les noms sont formés d'après une règle simple et générale, qui consiste à placer devant le nom de l'unité principale, soit les préfixes d'origine grecque : *déca*, dix; *hecto*, cent; *kilo*, mille, et *myria*, dix mille, soit les préfixes d'origine latine : *déci*, dixième; *centi*, centième et *milli*, millième. Parmi ces unités secondaires, quelques-unes étant exclusivement employées pour la mesure de grandeurs spéciales, l'usage leur a imposé des noms vulgaires spéciaux, plus courts et par suite plus commodes à prononcer que les noms réguliers. C'est ainsi que les unités usuelles de superficie (mesures agraires), de capacité (liquides) et de solidité (bois de chauffage), qui sont le *décamètre carré*, le *décimètre cube* et le *mètre cube*, ont pris les noms d'*are*, de *litre* et de *stère*. On a même adopté certains multi-

1. Exactement 60,2734 rayons équatoriaux.

ples ou sous-multiples réguliers de ces unités secondaires, par exemple : l'*hectare*, le *décalitre*, le *décistère*.

Les fondateurs du système C. G. S. ont emprunté au système métrique l'emploi des unités secondaires, ainsi que la règle de leur formation ; ils ont simplement ajouté aux préfixes métriques deux préfixes nouveaux : *méga* (de μέγας, grand), qui veut dire un million, et *micron* (de μικρός, petit), un millionième. Ainsi un *mégamètre* désigne une unité secondaire de longueur valant 1 million de mètres et le *micromètre* une unité secondaire valant un millionième de mètre [1].

De même, la dyne et l'erg, qui sont des unités dérivées trop petites pour la pratique, seront avantageusement remplacés par des unités secondaires, soit la *kilodyne* ou la *mégadyne*, qui valent à peu près 1 gramme ou 1 kilogramme, soit le *mégerg*, qui vaut à peu près 1 centième de kilogrammètre [2]. On voit que si l'on donnait un nom spécial à la *centaine de mégergs*, on aurait une unité secondaire convenable pour évaluer, dans l'industrie, la puissance des machines.

Remarque. — *Notation du système C. G. S.* — La commission des unités C. G. S. a aussi prévu le cas où, malgré l'emploi d'unités secondaires, on serait conduit à des nombres trop grands ou trop petits et elle a indiqué un moyen simple et commode de les écrire. On met chaque nombre sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un est une puissance de 10 choisie de telle manière que l'autre facteur soit inférieur à 10. On aura en général $N = K.10^n$. On écrira, par exemple, que

1 kilogrammètre vaut $0^{erg},98096 \times 10^8$,
1 cheval-vapeur -- $0,75572 \times 10^{10}$ *unités de puissance C. G. S.*

Cette notation est avantageuse pour les calculs logarithmiques, car l'exposant de la puissance de 10 est précisément égal à la caractéristique, positive ou négative, du logarithme du nombre N.

122. **Conversion des mesures rationnelles en mesures absolues : dimensions et équations de dimensions.** — Étant donnée une grandeur exprimée en unités rationnelles quelconques, métriques ou étrangères, on peut avoir besoin de la convertir en unités C. G. S. Le problème consiste à passer de la première valeur numérique à la seconde, et l'on aura à le résoudre aussi longtemps que le système des unités C. G. S. ne sera pas entré dans les habi-

1. A cause du sens spécial que le mot micromètre possédait antérieurement, les micrographes qui se servent de cette unité secondaire l'appellent ordinairement *micron*.

2. Cette règle s'applique naturellement à l'unité de masse C. G. S., le gramme-masse; mais elle ne s'applique pas à l'unité de longueur, le centimètre, dont les unités secondaires (le déca-centimètre, l'hecto-centimètre, etc.) avaient déjà les noms spéciaux et usuels de décimètre, mètre, etc., ni à l'unité de temps C. G. S., la seconde, dont les multiples usuels (minute, heure, jour, mois, année) sont d'un usage si répandu et si commode, qu'on ne pouvait songer à les supprimer.

tudes scientifiques de tous les pays. La solution est fondée sur la définition même des valeurs numériques. En effet, la formule

$$[1] \qquad n = \frac{A}{a}$$

donne la valeur numérique d'une grandeur A évaluée à l'aide d'une première unité a. Si l'on évalue la même grandeur avec une autre unité a', on aura évidemment une nouvelle valeur numérique n', donnée par la formule

$$[2] \qquad n' = \frac{A}{a'}.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{n}{n'} = \frac{\frac{A}{a}}{\frac{A}{a'}} = \frac{a'}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad n = n'\frac{a'}{a}.$$

Ainsi, *la nouvelle valeur numérique* n *est égale au produit de l'ancienne valeur* n' *par le rapport inverse des deux unités successivement employées.*

Le problème est donc ramené à trouver, dans chaque cas, le rapport $\frac{a'}{a}$, c'est-à-dire le rapport de l'unité vulgaire, employée dans la première mesure, à l'unité C. G. S. correspondante. Ce rapport se calculera aisément si l'on connaît l'*équation des dimensions* des unités dérivées employées.

Dimensions d'une unité dérivée. — On considère, en géométrie, trois catégories de grandeurs : les grandeurs à *une* dimension (lignes), les grandeurs à *deux* dimensions (surfaces) et les grandeurs à *trois* dimensions (solides). On a vu, par exemple, que l'aire d'une surface s'exprime en fonction du produit de ses deux dimensions, et le volume d'un solide en fonction du produit de ses trois dimensions. On a pour l'aire d'un rectangle, $S = ab$; pour un carré, $S = a^2$; pour un cercle, $S = \pi R^2$; on a de même, pour le volume d'un parallélipipède rectangle, $V = abc$; pour un prisme droit à base carrée, $V = a^2c$; pour un cube, $V = a^3$; pour une sphère, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Si l'on choisit les plus simples de ces équations pour définir soit l'unité de surface, soit l'unité de volume, on pourra écrire les *équations de définition* suivantes :

$$\text{unité de surface} = (\text{unité de longueur})^2,$$
$$\text{unité de volume} = (\text{unité de longueur})^3,$$

ou bien, en désignant par A, par U et par L les unités

$$A = L^2 \qquad \text{et} \qquad U = L^3.$$

Ces équations montrent que 1° l'unité de surface *varie proportionnellement au carré* de l'unité de longueur, et que 2° l'unité de volume *varie proportionnellement au cube* de l'unité de longueur.

Ainsi l'unité de la grandeur à deux dimensions est une *unité dérivée*, du 2e degré par rapport à l'*unité fondamentale* de longueur, et l'unité de la grandeur à trois dimensions est une *unité dérivée*, du 3e degré par rapport à l'unité fondamentale de longueur. C'est de là qu'on est parti pour définir ce qu'on a appelé les *dimensions* dans le système C. G. S.

On *a cru commode* de dire que toute unité dérivée *qui est du 2e degré* par

rapport à l'unité fondamentale, c'est-à-dire *qui varie proportionnellement à la 2e puissance* de cette unité fondamentale, a *deux dimensions* (ou que sa dimension est 2) par rapport à l'unité fondamentale ; et, en général, que toute unité dérivée qui est du degré *n* par rapport à l'unité fondamentale, *a* n *dimensions* (ou que sa dimension est *n*) par rapport à l'unité fondamentale.

Par exemple, une vitesse v s'obtient, dans un mouvement uniforme, en divisant l'espace parcouru l par le temps θ employé à le parcourir, de sorte qu'on a $v = \frac{l}{\theta}$. C'est cette relation qui sert à définir l'unité de vitesse C. G. S. : on dit que l'unité de vitesse V est celle du mobile qui parcourt uniformément l'unité de longueur L dans l'unité de temps T. On a donc entre ces trois unités la relation $V = \frac{L}{T}$, qu'on peut écrire aussi, d'après une notation usitée en algèbre, $V = L.T^{-1}$. D'après cette équation, on dira que la vitesse est de la dimension 1 par rapport à l'unité de longueur et de la dimension (—1) par rapport à l'unité de temps.

Formules de définition. — Équations des dimensions. — L'équation $v = \frac{l}{\theta}$, qui nous a servi à trouver les *dimensions* de l'unité de vitesse, est ce qu'on appelle la *formule de définition* de l'unité de vitesse. Chaque unité dérivée, dans un système d'unités absolues, se rattache aux unités fondamentales au moyen d'une relation analogue. Tantôt cette relation exprime analytiquement une définition, tantôt elle exprime quelque propriété géométrique ou mécanique, ou bien encore une loi physique.

L'équation $v = \frac{l}{\theta}$ convient à l'unité de vitesse comme à toute vitesse : nous en avons conclu que l'unité de vitesse varie proportionnellement à l'espace parcouru, c'est-à-dire à l'unité de longueur, et en raison inverse de l'unité de temps, c'est-à-dire de la seconde. On exprime habituellement ce rapport des unités par l'équation

$$\text{unité de vitesse} = \frac{\text{unité de longueur}}{\text{unité de temps}},$$

qu'on écrit encore, par abréviation,

$$\text{vitesse} = \frac{\text{longueur}}{\text{temps}},$$

ou encore

$$V = \frac{L}{T} = LT^{(-1)},$$

en désignant par V, L et T les trois unités.

Sous cette dernière forme, la formule de définition est appelée l'*équation des dimensions* de la vitesse.

Nous avons conclu de cette relation que l'unité de vitesse est de la dimension 1 par rapport à l'unité de longueur et de la dimension (—1) par rapport à l'unité de temps. Les dimensions de chaque unité dérivée sont déterminées au moyen d'une équation analogue, qu'on déduit, de la même manière, de sa formule de définition.

Exemple d'une conversion d'unités. — *Soit, par exemple, une vitesse* V' *exprimée à l'aide d'une unité de vitesse* V' *dans un système d'unités rationnelles dont les unités fondamentales sont une longueur* L' *et une unité de temps* T', *différentes des unités fondamentales C. G. S. ; on demande d'exprimer cette vitesse en unités C. G. S.*

Soit v la valeur numérique C. G. S. On a, d'après ce que nous avons dit ci-dessus (121),

$$v = v' \cdot \frac{V'}{V}.$$

On connaît v', reste à trouver le rapport $\frac{V'}{V}$. Or on a, d'après l'équation des dimensions de l'unité de vitesse,

$$V = \frac{L}{T} \qquad \text{et} \qquad V' = \frac{L'}{T'}.$$

En divisant membre à membre, il vient

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{L'}{T'}}{\frac{L}{T}} = \frac{L'}{L} \times \frac{T}{T'},$$

d'où enfin

$$v = v' \cdot \frac{L'}{L} \frac{T}{T'}.$$

Exemple numérique. — Supposons que v' soit la vitesse d'un train de chemin de fer qui fait 60 kilomètres à l'heure, uniformément. Soit à évaluer sa vitesse en unités C. G. S. On aura, d'après la formule précédente,

$$v = 60 \times \frac{L'}{L} \times \frac{T}{T'}.$$

Or

$$\frac{L'}{L} \quad \text{c'est} \quad \frac{60^{\text{kil}}}{1^{\text{cm}}} = \frac{60\,000\,00^{\text{cm}}}{1^{\text{cm}}} = 60\,000\,00$$

et

$$\frac{T}{T'} \quad \text{c'est} \quad \frac{1^{\text{s}}}{1^{\text{h}}} = \frac{1^{\text{s}}}{3600^{\text{s}}} = \frac{1}{3600}.$$

En substituant ces valeurs numériques, il vient

$$v = 60 \times 60\,000\,00 \times \frac{1}{3600} = 100\,000.$$

Remarque. — Le problème réciproque se résoudrait de la même manière. On convertirait une valeur numérique, obtenue dans un certain système d'unités absolues, en la valeur numérique correspondante dans un autre système quelconque d'unités absolues (*en supposant que les deux systèmes ne diffèrent entre eux que par la grandeur des unités fondamentales*).

123. **Dimensions et équations des dimensions des principales unités mécaniques dérivées.** — On pourra résoudre tous les problèmes de ce genre, quelle que soit l'unité dérivée en jeu, pourvu qu'on en connaisse les dimensions. Voici donc les équations correspondantes à toutes les unités mécaniques ci-dessus définies.

1° Unité de surface C. G. S. (unité dérivée).

Formule de définition : $\frac{s}{s'} = \frac{a^2}{a'^2}.$

Pour $a' = 1$, on a $s' = 1$; donc *l'unité de surface C. G. S. est le carré de 1 centimètre de côté.*

Équation des dimensions — L'aire est égale au carré de l'une de ses dimensions, c'est-à-dire au carré d'une longueur. On a donc

$$\text{unité d'aire} = (\text{unité de longueur})^2$$

ou bien

$$A = L^2.$$

Dimensions : L'unité de surface est donc de la dimension 2 par rapport à la longueur et de la dimension 0 par rapport aux deux autres unités.

2° Unité de volume C. G. S.

Formule de définition :

$$\frac{V}{V'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

Pour $a' = 1$, on a $V' = 1$: donc *l'unité de volume est le cube de* 1 *centimètre de côté.*

Équation des dimensions. — L'unité de volume est égale au cube de l'une de ses dimensions, c'est-à-dire au cube de l'unité de longueur. On a donc

$$\text{unité de volume} = (\text{unité de longueur})^3,$$

ou bien

$$V = L^3.$$

Dimensions : Elles sont : 3 par rapport à la longueur, 0 par rapport aux deux autres unités fondamentales.

3° Unité de vitesse C. G. S.

Formule de définition :

$$v = \frac{e}{\theta}.$$

Équation des dimensions :

$$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

Dimensions : 1 par rapport à la longueur, — 1 par rapport au temps, 0 par rapport à la masse.

4° Unité d'accélération C. G. S.

Formule de définition : $v - v_0 = \gamma\theta$, d'où $\gamma = \frac{v - v_0}{\theta}$.

Équation des dimensions : On voit, d'après la formule, que l'accélération est proportionnelle à une différence de vitesse, c'est-à-dire à une vitesse ou à $\frac{L}{T}$, et inversement proportionnelle à un temps, c'est-à-dire à T. On a donc

$$G = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}.$$

Dimensions : 1 (longueur), — 2 (temps), 0 (masse).

5° Dyne.

Formule de définition :

$$f = m\gamma.$$

Équation des dimensions : La force est proportionnelle à une masse et à une accélération. On a donc

$$F = MG = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}.$$

Dimensions : 1 (longueur), — 2 (temps) et 1 (masse).

6° Erg.

Formule de définition :

$$w = fe.$$

Équation des dimensions : Le travail est proportionnel à une force et à un chemin parcouru. On a donc

$$W = FL = \frac{ML}{T^2} \cdot L = \frac{ML^2}{T^2} = ML^2 T^{-2}.$$

Dimensions : 2 (longueur), — 2 (temps), 1 (masse).

7° Unité de puissance C. G. S.

Formule de définition : $p = \frac{w}{t}$.

Équation des dimensions : On voit que la puissance varie en raison directe du travail et en raison inverse du temps. On a donc

$$P = \frac{W}{T} = \frac{ML^2}{T^3} = ML^2T^{-3}.$$

Dimensions : 2 (longueur), — 3 (temps), 1 (masse).

MESURE DES GRANDEURS FONDAMENTALES.

124. **Généralités sur les mesures et les instruments de précision.** — Presque toutes les mesures qu'on a à effectuer en physique peuvent se ramener à des mesures de longueur, de masse et de temps, grandeurs fondamentales du système C. G. S. Ainsi les mesures d'étendue se réduisent à des mesures de lignes, puisque la surface et le volume d'un solide quelconque peuvent s'exprimer géométriquement en fonction de ses dimensions linéaires[1]. De même les mesures de forces se réduisent à des mesures de masses, puisque les forces se comparent aux poids et que ceux-ci s'expriment en fonction des masses et de l'accélération de la pesanteur ($P = Mg$). Comme les mesures scientifiques exigent une grande exactitude, on a dû construire des instruments spéciaux pour les effectuer : c'est ce qu'on appelle les *instruments de précision*. Ces instruments se rapportent donc à trois types principaux.

I. *Instruments de mesure* pour les *dimensions linéaires* (longueurs, largeurs, épaisseurs, hauteurs). Ce sont :

1° La *règle divisée*, vulgairement appelée *mètre*;
2° Le *vernier* rectiligne et le *vernier* circulaire;
3° Le *comparateur;*
4° Le *sphéromètre;*
5° Le *cathétomètre;*

1. Dans certains cas, il est nécessaire de mesurer directement soit la surface, soit le volume des corps. On emploie alors des instruments spéciaux, le *planimètre*, dont nous ne parlerons pas, et la *balance*, que nous étudierons plus loin.

6° Le *levier à réflexion;*

7° Le *micromètre oculaire;*

8° La *machine à diviser.*

Nous n'étudierons que la règle divisée, les verniers, le sphéromètre, le cathétomètre et la machine à diviser.

II. *Instruments de mesure* pour les *masses*, les *poids* et les *forces.*

Les masses se mesurent à l'aide de la *balance*, qui est l'instrument de précision par excellence. Il peut servir indirectement à la mesure des poids et des forces, puisqu'on peut déduire ces grandeurs de la mesure des masses. Mais on peut les mesurer directement avec des instruments spéciaux, appelés *dynamomètres*, qui ne sont pas des *instruments de précision.*

III. *Instruments de mesure* pour le *temps.*

Le temps est une grandeur qu'on peut aussi mesurer directement avec une grande précision. Les instruments de mesure sont les *horloges* et les *chronomètres.* La marche des horloges est rendue régulière au moyen des oscillations isochrones d'un pendule (117), et celle des chronomètres à l'aide d'un ressort métallique : les uns et les autres sont réglés, d'après des observations astronomiques et spécialement sur les passages des étoiles, de manière à donner une subdivision du temps exactement égale à la *seconde de temps moyen,* unité de temps C.G.S. Nous n'insisterons pas davantage sur ces instruments; on en trouvera la description détaillée dans les ouvrages d'astronomie, les chronomètres étant, avec les lunettes, les outils par excellence de l'astronome.

125. **Règles divisées. Mètre-étalon.** — Les *règles divisées,* qui servent dans les mesures ordinaires, sont généralement des lames plates en laiton, graduées en millimètres. La distance des deux traits extrêmes est exactement de 1 mètre, à la température 0° : on la vérifie par comparaison avec un mètre-étalon, à l'aide de l'instrument de précision appelé *comparateur.* Les traits intermédiaires sont distants deux à deux de 1 millimètre; on les trace à l'aide de l'instrument de précision appelé *machine à diviser.*

Lorsqu'on mesure une longueur à l'aide d'une règle divisée, on trouve en général un certain nombre de divisions, c'est-à-dire de millimètres, *plus* un reste. On ne peut songer à évaluer ce reste au moyen d'une nouvelle subdivision de la règle, car le 1/2 millimètre se lit déjà péniblement; il faut savoir évaluer cette

1. Voir les autres instruments dans les ouvrages de MM. Jamin et Bouty, Violle, Pellat.

fraction à l'œil, *par estime*[1], ou bien recourir à un instrument de précision.

Les mètres-étalons qui servent à la vérification des règles divisées sont des copies exactes de l'*étalon international*, construit récemment par la Commission internationale du mètre. Cet étalon

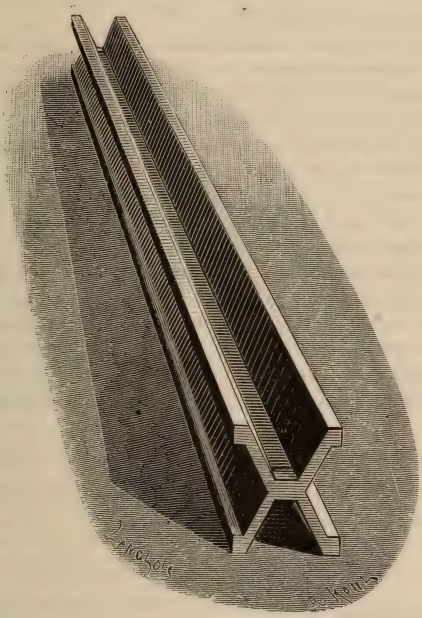


Fig. 106.

international est lui-même une copie exacte du mètre normal déposé aux Archives. Mais, tandis que ce dernier est un *mètre à bouts*, c'est-à-dire une barre qui a 1 mètre de longueur d'une extrémité à l'autre, l'étalon international est un *mètre à traits*, qui représente le mètre par la distance de deux traits, placés à 1 centimètre environ de ses extrémités. Ce dispositif permet plus facilement que l'autre de prendre des copies rigoureusement exactes. Le mètre international n'a pas été fondu en platine,

1. Après un long exercice, le physicien parvient à évaluer à l'œil le dixième de millimètre, comme l'astronome apprécie à l'oreille le dixième de seconde.

mais en un alliage de platine et d'iridium (platine iridié), qui est plus résistant et plus inaltérable encore que le platine pur. Enfin on lui a donné la forme d'un solide symétrique à quatre rainures (fig. 106), qui paraît, d'après les travaux de Tresca, présenter le maximum de résistance à la flexion. Les deux traits qui définissent la longueur du mètre sont tracés sur le plan qui contient le centre de gravité du solide.

Les copies du mètre international sont en tout semblables à l'étalon et fondues également en platine iridié.

126. **Vernier.** — 1° *Définition.* — Le vernier est un instrument de précision qui permet d'évaluer des longueurs plus petites que les dernières divisions d'une règle divisée ou d'un cercle divisé, tout en n'offrant lui-même que des divisions à peu près égales à celles-ci et aussi faciles à lire. Suivant que le vernier est adapté à une règle droite ou à un limbe circulaire, on l'appelle *vernier rectiligne* ou *vernier circulaire* [1].

2° *Description du vernier rectiligne.* — Cet instrument n'est jamais seul; il est toujours adapté à une règle divisée, tantôt indépendante, tantôt fixée elle-même à un autre instrument de précision tel que le *cathétomètre*, ou à un appareil de physique tel que le *baromètre de Fortin.* Il se compose, dans tous les cas, d'une réglette divisée *ab* qui peut glisser le long de la grande règle AB,

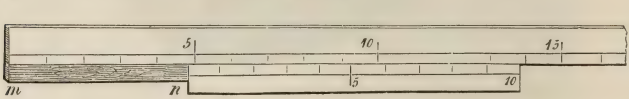


Fig. 107 et 108.

de manière que les deux graduations se touchent (fig. 107). On lui donne, le plus souvent, une longueur égale à 9 divisions de la grande règle, soit 9 millimètres, puis on la divise en 10 parties égales. Il en résulte que chaque division du vernier *ab* est d'un dixième de millimètre plus petite que celles de la règle AB. On a alors un *vernier au dixième :* c'est le vernier le plus employé; il

1. L'invention du vernier rectiligne est due au géomètre français Pierre Vernier, qui a donné son nom à l'instrument. Le vernier circulaire paraît avoir été inventé antérieurement, par le géomètre portugais Nuñez ou Nonius (1542).

peut servir à évaluer des longueurs à moins d'un dixième de millimètre.

3° *Usage du vernier rectiligne.* — Soit à mesurer la longueur d'un objet *mn* (fig. 108). On place celui-ci le long de la grande règle, et l'on trouve ainsi qu'il a, par exemple, une longueur de 4 divisions plus une fraction. C'est cette fraction qu'on va mesurer avec le vernier. Pour cela, on le fait glisser sur la règle fixe jusqu'à ce qu'il vienne se placer à l'extrémité de l'objet *mn*, puis on cherche où se fait sensiblement la coïncidence entre les traits des deux échelles. On a supposé (fig. 108) qu'elle a lieu à la huitième division du vernier, à partir du point *n*. Cela indique que la fraction à mesurer est égale à 8 dixièmes d'une division de la grande règle, soit 8 dixièmes de millimètre.

En effet, les divisions du vernier étant plus petites d'un dixième que celles de la règle, on voit qu'à partir du point de coïncidence, en allant de droite à gauche, elles sont successivement en retard sur celles de la règle de 1, de 2, de 3 dixièmes. De l'extrémité *n* du vernier à la 4e division de la règle, il y a donc 8 dixièmes : donc *mn* égale $4^{mm},8$.

4° *Verniers rectilignes au vingtième, au cinquantième, etc.* — Pour obtenir cette longueur à un vingtième ou à un trentième de millimètre, il suffirait de donner au vernier une longueur de 19 ou 20 millimètres, puis de diviser celui-ci en 20 ou 30 parties égales : on aurait alors un vernier *au vingtième* ou *au trentième.* Nous verrons que le cathétomètre est muni d'un vernier *au cinquantième.* En diminuant de plus en plus la largeur des traits, on pourrait pousser jusqu'*au centième ;* mais alors, pour distinguer avec netteté le point où se ferait la coïncidence, il faudrait faire usage d'une loupe, et encore y parviendrait-on difficilement.

5° *Vernier circulaire.* — Le vernier peut servir aussi à la mesure des arcs de cercle ; ce fut même là son premier usage. Il se compose alors d'un petit arc de cercle divisé, porté à l'extrémité d'une alidade (fig. 109). Il est aussi mobile sur le grand cercle divisé, comme la réglette sur la grande règle de l'instrument précédent. La théorie et l'usage du vernier circulaire sont les mêmes que pour le vernier rectiligne.

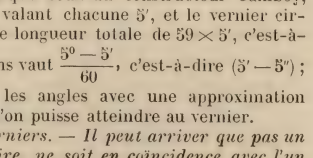


Fig. 109.

Suivant que le grand cercle est divisé en degrés ou en minutes, le vernier circulaire *au soixantième* donne les minutes ou les secondes. Si le limbe est divisé en demi-degrés, il suffit d'un vernier *au trentième* pour mesurer les minutes. Dans les cercles très précis, tels que ceux du constructeur Gambey, le degré est divisé en 12 parties égales, valant chacune 5′, et le vernier circulaire est *au soixantième :* il a donc une longueur totale de $59 \times 5'$, c'est-à-dire de $5^0 - 5'$, et chacune de ses divisions vaut $\frac{5^0 - 5'}{60}$, c'est-à-dire $(5' - 5'')$; cet instrument permet donc d'évaluer les angles avec une approximation de 5″ ; c'est le maximum de précision qu'on puisse atteindre au vernier.

6° *Cas particulier dans l'usage des verniers. — Il peut arriver que pas un trait du vernier, rectiligne ou circulaire, ne soit en coïncidence avec l'un des traits de la règle.*

Dans ce cas, on trouve nécessairement deux traits consécutifs du vernier entièrement compris entre deux traits consécutifs de la règle. Supposons, dans le vernier rectiligne de la figure 110, que ce soient les traits 7 et 8. La distance de chacun de ces traits au trait voisin de la règle est une longueur $< \frac{1}{10}$ de

millimètre, puisque la somme de ces deux distances est précisément égale à $\frac{1}{10}$ de millimètre. Si donc on fait la mesure comme si l'un ou l'autre coïncidait, on commettra une erreur moindre que $\frac{1}{10}$ de millimètre. En admettant la coïncidence du trait inférieur 7, on réduit la longueur à mesurer, et l'erreur

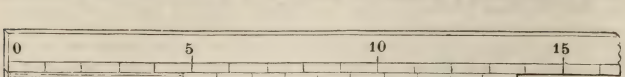


Fig. 110.

est commise par défaut; en prenant le trait 8, l'erreur est par excès. On uara donc dans ce cas

$$mn = 4^{mm},7 \text{ à } \frac{1}{10} \text{ de millimètre près, par excès,}$$

ou bien $$mn = 4^{mm},8 \text{ à } \frac{1}{10} \text{ de millimètre près, par défaut.}$$

On voit même que si l'on peut distinguer, soit à l'œil nu, soit à la loupe, celui des deux intervalles qui est le plus petit, en choisissant le trait correspondant à celui-ci, on commettra une erreur moindre que $\frac{1}{20}$ de millimètre (par excès ou par défaut).

Reste à démontrer qu'il y a toujours une division du vernier entièrement comprise entre deux traits consécutifs de la règle. En effet, la fraction de mn, qui dépasse le trait 4 de la règle, est égale à $\frac{n^{mm}}{10} + \varepsilon$, n étant un nombre entier au plus égal à 9 et ε une fraction $< \frac{1}{10}$. La distance du trait 0 du vernier au trait précédent de la règle est précisément égale à $\left(\frac{n}{10} + \varepsilon\right)^{mm}$; la distance du trait précédent de la règle sera donc $\left(\frac{n-1}{10} + \varepsilon\right)$, et ainsi de suite. En continuant ainsi, on trouvera de 0 à 10 un trait du vernier dont la distance au trait précédent de la grande règle ne sera plus que ε; par suite, en allant toujours vers la droite, on trouvera d'abord un trait du vernier à la distance $\frac{1}{10}$

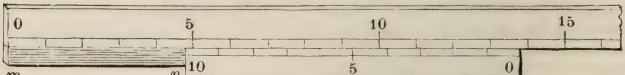


Fig. 111.

de millimètre, puis un trait de la règle à la distance $\left(\frac{9}{10} + \varepsilon'\right)$, ε' étant $< \frac{1}{10}$: ce dernier et le précédent trait de la règle comprennent donc entre eux toute une division du vernier.

7° *Cas particulier dans la construction des verniers.* — Il peut arriver dans certains instruments, que *le numérotage du vernier coure en sens inverse de celui de la règle*[1].

1. C'est le cas général dans les instruments des constructeurs anglais; mais, comme de plus les verniers anglais comprennent $(n+1)$ divisions de la grande règle et qu'ils sont divisés en n parties égales, la lecture se fait comme dans les verniers précédents. La remarque actuelle ne s'applique donc pas aux verniers anglais.

Dans ce cas, c'est le trait 10 du vernier qu'on applique contre l'extrémité droite de la longueur à mesurer (fig. 111). Supposons qu'il y ait une coïncidence, et qu'elle ait lieu pour le trait 2 du vernier. On voit, en allant de droite à gauche, que le trait 3 est en avance de $\frac{1}{10}$ de millimètre, et que le trait 4 est en avance de $\frac{2}{10}$ de millimètre ; en continuant de proche en proche, on voit que le trait 10 est en avance de $\frac{8}{10}$ de millimètre : donc la fraction à mesurer est égale à $\frac{8}{10}$ de millimètre, c'est-à-dire à $\frac{(10-2)}{10}$. Si le trait en coïncidence avait été n, la fraction à mesurer eût été égale à $\frac{10-n}{10}$, c'est-à-dire à un nombre de dixièmes de millimètre égal au *complément à* 10 du trait en coïncidence.

127. **Vis micrométrique.** — 1° *Définition.* — On nomme *vis micrométrique* toute vis qui peut servir à produire des déplacements très lents et très réguliers susceptibles d'être utilisés de diverses manières dans les mesures de précision. La *vis micrométrique* n'est pas, à proprement parler, un instrument de précision, mais elle sert d'organe essentiel à plusieurs instruments de précision, entre autres la machine à diviser et le sphéromètre. Il y en a une également dans le cathétomètre, où elle est employée comme vis de rappel.

Nous ne pouvons pas décrire la vis micrométrique sans en indiquer les principaux usages, ni rappeler préalablement le mode de génération d'une vis quelconque et sa propriété mécanique essentielle.

2° **Génération et propriétés de l'hélice.** — Rappelons d'abord que l'hélice est une courbe, telle que AMNB, tracée à la surface d'un cylindre de révolution et caractérisée par la propriété géométrique suivante (fig. 112) :

Les ordonnées MP, NQ *sont proportionnelles aux abscisses curvilignes, telles que l'arc* AP *et l'arc* AQ.

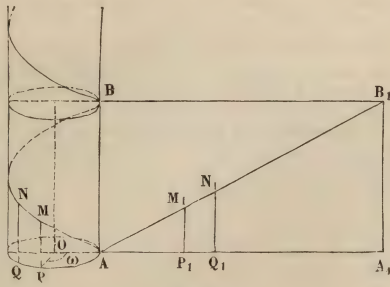


Fig. 112.

C'est une conséquence immédiate du mode de génération de la courbe. En effet, si l'on suppose la surface cylindrique développée sur le plan de la figure, suivant le rectangle ABA_1B_1, qu'on y trace la diagonale AB_1 et qu'on enroule de nouveau le rectangle autour du cylindre, l'*hélice* est engendrée par la diagonale AB_1, s'appliquant à la surface directrice du cylindre. Si donc on prend sur le côté AA_1 les longueurs AP_1 et AQ_1, respectivement égales aux arcs AP et AQ développés, les ordonnées P_1M_1 et Q_1N_1 seront respectivement égales aux ordonnées MP et QN. Or on a, dans les triangles semblables AM_1P_1

et AB_1A_1,

$$\frac{P_1M_1}{AP_1} = \frac{A_1B_1}{AA_1},$$

et, dans les triangles semblables AN_1Q_1 et AB_1A_1,

$$\frac{Q_1N_1}{AQ_1} = \frac{A_1B_1}{AA_1};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{P_1M_1 \text{ ou } MP}{AP_1 \text{ ou arc } AP} = \frac{N_1Q_1 \text{ ou } NQ}{AQ_1 \text{ ou arc } AQ}.$$

La courbe peut se reproduire indéfiniment de la même manière, au-dessus de l'arc ANB, sur la surface du cylindre. L'arc ANB, compris entre deux points consécutifs d'une même génératrice la détermine complètement : il s'appelle une *spire* de l'hélice. La spire est elle-même complètement déterminée par les dimensions du rectangle générateur, c'est-à-dire par la base AA_1, qui est égale à la circonférence de la section droite du cylindre, et par la hauteur A_1B_1 ou AB, qu'on appelle le *pas* de l'hélice.

Soit h la longueur du pas, et R le rayon de la section droite du cylindre directeur : la relation précédente peut servir à définir un point quelconque M de la courbe. Soit z l'ordonnée du point et x son abscisse curviligne, on aura

$$[1] \qquad \frac{z}{x} = \frac{h}{2\pi R}.$$

On peut exprimer x en fonction de l'angle ω dont il faudrait tourner sur le cylindre pour passer du point A au point M, en suivant l'hélice. On a en effet

$$x = \text{arc } AP = R\omega.$$

En portant cette valeur dans l'équation [1], elle devient

$$[2] \qquad z = \frac{h}{2\pi}\omega.$$

Cette équation définit l'hélice aussi bien que l'équation [1]. Sous cette forme elle montre nettement que, si un mobile parcourt une spire d'hélice, *son déplacement rectiligne z, parallèlement à l'axe du cylindre est proportionnel à son déplacement angulaire* ω.

3° **Génération et propriétés de la vis.** — Soit une hélice à spires nombreuses et serrées, tracée sur un long cylindre directeur (fig. 113). Imaginons qu'un petit rectangle *abcd* se meuve à la surface du cylindre, en étant assujetti aux conditions géométriques suivantes :

1° Son plan est constamment normal au cylindre, c'est-à-dire que les côtés *ac* et *bd* prolongés vont couper l'axe du cylindre dans toutes les positions du rectangle (fig. 114) et qu'une droite quelconque, tracée dans le plan du rectangle, va toujours couper une génératrice du cylindre ;

2° Le sommet *c* du rectangle décrit l'hélice directrice.

Dans ce mouvement tous les points du rectangle décrivent évidemment des hélices de même pas que l'hélice directrice. Le lieu de toutes ces hélices est un volume de forme hélicoïdale, qu'on appelle *filet* de la vis, et la *vis* elle-même est constituée par l'ensemble du filet et du cylindre directeur. On appelle *pas* de la vis le pas de l'une quelconque des hélices décrites par les divers points du rectangle générateur.

Le plan normal à la surface cylindrique, qui contient le rectangle générateur, est ce qu'on appelle un *plan de profil* ou simplement un *profil*. De la figure du profil dépend la forme du filet. Dans le cas de la figure, la vis est *à filet rectangulaire*. Le profil pourrait être un triangle ou un carré, et la vis serait *à filet triangulaire* ou bien *à filet carré*.

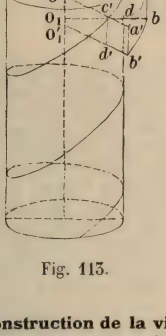


Fig. 113.

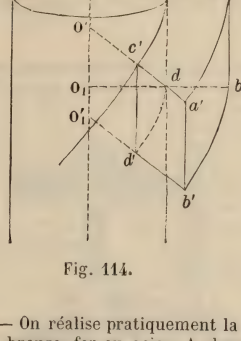


Fig. 114.

4° **Construction de la vis ordinaire.** — On réalise pratiquement la vis en taillant le filet sur un cylindre de métal, bronze, fer ou acier. A chaque vis est joint un écrou, sans lequel elle ne peut fonctionner. L'écrou est une pièce métallique qui présente en creux le relief du filet. Lorsqu'on engage la vis dans l'écrou, si celui-ci est fixe, en imprimant un mouvement de rotation à l'extrémité antérieure de la vis, appelée *tête de vis*, la vis avance dans son écrou parallèlement à l'axe du cylindre directeur : c'est celui-ci qui se déplace quand on fait tourner la tête de vis ; ce mouvement est parallèle à l'axe du cylindre, mais en sens inverse de la rotation. La loi de ce déplacement, dans l'un et l'autre cas, est une conséquence de la propriété fondamentale de l'hélice : si l'on suppose que l'écrou soit mobile, l'un quelconque de ses points s'avance sur la vis en décrivant l'une des hélices qui constituent le filet. Le déplacement longitudinal de ce point, et par suite de l'écrou tout entier est proportionnel à l'angle de rotation de la tête de vis.

5° **Construction de la vis micrométrique.** — La *vis micrométrique* est une vis travaillée avec beaucoup de soin et dont le pas est très petit, égal à un demi-millimètre ou à 1 millimètre au plus, et très régulier. On la taille sur le contour d'un cylindre bien homogène de bronze ou d'acier fondu, au moyen de procédés mécaniques fort perfectionnés. On voit, d'après ce qui précède, que si la vis tourne dans un écrou fixe, elle avance, à chaque tour, d'une longueur égale à celle du pas ; pour une fraction de tour, $\frac{1}{10}$ par exemple, elle n'avance que de $\frac{1}{10}$ du pas. Par conséquent, si le pas est de 1 millimètre, et si la tête de la vis porte un cercle gradué en 360 degrés et tournant avec elle, en ne faisant marcher ce cercle que d'une division, on fera avancer la vis de $\frac{1}{360}$ de millimètre. Le plus souvent le pas est de $\frac{1}{2}$ millimètre et le limbe porte 500 divisions : à un mouvement angulaire de 1 division correspond alors un déplacement longitudinal de $\frac{1}{1000}$ de millimètre.

Dans la plupart des vis des instruments de précision, le filet est triangulaire ; il est engendré par un *profil* qui est un triangle à peu près isocèle, dont la base est précisément égale au pas de l'hélice : il en résulte que la surface du cylindre directeur est complètement couverte par le filet (fig. 115).

128. **Sphéromètre.** — 1° *Définition.* — Le sphéromètre (de σφαῖρα, sphère, et μέτρον, mesure) est un instrument de précision qui peut servir aux usages suivants :

Mesure des faibles épaisseurs.

Vérification de la courbure des surfaces sphériques et mesure de leur rayon.

C'est de ce dernier usage que lui vient son nom.

2° *Description.* — L'instrument se compose essentiellement d'une vis micrométrique mobile dans un écrou fixe (fig. 115). L'écrou est fixé verticalement au centre d'un trépied, qui repose, par trois pointes fines en acier trempé, sur un plan de verre soigneusement doucі à l'émeri. Les extrémités des pointes forment les sommets d'un triangle équilatéral, et la verticale du centre de ce triangle coïncide avec l'axe de l'écrou et celui de la vis. Celle-ci a un pas très régulier, égal $\frac{1}{2}$ millimètre. Elle se termine inférieurement par une pointe mousse, et supérieurement par une tête en forme de bouton fileté, par où l'on peut la manœuvrer aisément. En tournant dans le sens convenable, on peut amener la pointe de la vis dans le plan du support; en tournant en sens contraire, on relève la vis.

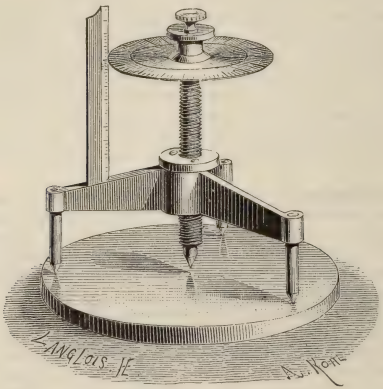


Fig. 115.

Ces déplacements verticaux sont toujours proportionnels aux angles de rotation. On les mesure avec facilité et précision au moyen du dispositif suivant : Sur l'une des branches du trépied est fixée verticalement une règle métallique, dont le bord mince est divisé en demi-millimètres. D'autre part, un disque mince, dont le limbe porte 500 divisions, est fixé horizontalement par son centre au-dessus de la tête de vis : il est entraîné avec elle dans son mouvement de rotation, et toutes ses divisions défilent successivement devant le bord de la règle fixe, lequel sert d'index.

Lorsqu'une seule division du limbe a passé devant l'index, la vis s'est déplacée de $\frac{1}{500}$ de la hauteur de son pas, c'est-à-dire de $\frac{1}{1000}$ de millimètre; lorsque le disque a fait un tour complet, la vis s'est déplacée de la hauteur du pas, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}$ millimètre, et alors le disque ne se trouve plus en face de la même division de la règle, mais en face de la division suivante.

3° *Usages. — Mesure d'une épaisseur.* — Soit à mesurer, par exemple, l'épaisseur d'une glace à faces parallèles. On amène la pointe de la vis dans le plan du plateau de verre, et l'on note la division du limbe et la division du couteau, qui sont en face l'une de l'autre; soit n_0 la première et h_0 la deuxième.

On soulève ensuite la vis d'une hauteur suffisante pour intercaler la glace

entre le plan et la pointe, puis on abaisse celle-ci jusqu'à la faire coïncider exactement avec la face supérieure de la glace; soient n_1 et h_1 les deux divisions en regard, dans la deuxième position.

L'épaisseur de la glace est évidemment mesurée par la course verticale de la pointe; or celle-ci est égale à un nombre de demi-millimètres marqué par les divisions du couteau, *plus* une fraction du pas marquée par les divisions du disque. On aura donc, en appelant e l'épaisseur,

$$e = \left(\frac{h_1 - h_0}{2} + \frac{n_1 - n_0}{1000}\right)^{mm}.$$

Remarque. — La difficulté de l'opération consiste dans les coïncidences successives de la pointe mousse avec les deux plans horizontaux du support et de la glace. Ce résultat ne peut s'obtenir que par des tâtonnements successifs, plus ou moins longs, suivant l'habileté de l'opérateur. On abaisse d'abord la pointe centrale un peu plus qu'il ne faut : comme il n'y a d'abord que trois pointes sur quatre dans le plan du support, si l'on pose le doigt sur le disque, il suffira du plus léger effort pour imprimer à l'appareil un mouvement d'oscillation qui est caractérisé par un bruit particulier. On relèvera ensuite la vis jusqu'à ce que cette trépidation ait complètement disparu : à ce moment la quatrième pointe sera dans le plan des trois autres.

Mesure d'un rayon de courbure. — Soit à vérifier la sphéricité d'une surface convexe, par exemple d'un verre de lunette, et à en mesurer le rayon de courbure.

On place les trois pointes A, B, C de l'instrument sur la surface, et l'on amène la pointe centrale O en coïncidence (fig. 116). Les quatre points O, A, B, C dé-

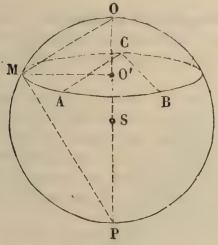


Fig. 116.

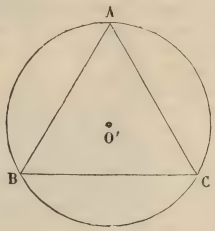


Fig. 117.

terminent une surface sphérique. En déplaçant l'instrument sur le verre, si celui-ci est sphérique, la coïncidence ne cessera pas. Elle cessera au contraire si la surface n'a pas un même rayon de courbure en tous ses points.

Supposons qu'elle soit parfaitement sphérique et cherchons à en mesurer le rayon R. Dans l'une quelconque des positions de l'instrument, le plan des trois pointes inférieures coupe la sphère suivant un petit cercle, AMBC. Ce cercle est précisément égal au cercle circonscrit au triangle équilatéral qui a ces trois pointes pour sommets. Il suffira de construire le triangle ABC, dont on connaît les trois côtés, puis le cercle circonscrit, pour en avoir le rayon r (fig. 117).

On mesure ensuite la distance $OO' = e$ de la pointe mousse au centre du cercle. Pour cela, il suffit de replacer l'instrument tel quel sur son plan de verre, de noter les deux divisions h, n en regard, puis d'amener la pointe de la

vis dans le plan du support, et de noter les nouvelles divisions n_0, h_0 en regard. On a alors, d'après la formule ci-dessus,

$$e = \left(\frac{h_1 - h_0}{2} + \frac{n_1 - n_0}{1000}\right)^{mm}.$$

Connaissant r et e, on obtient R par la formule $2R = e + \frac{r^2}{e}$.

En effet, soit une section de la sphère par un méridien quelconque, tel que le plan de la figure 116. Menons les lignes OM, MP et MO'. Le triangle OMP est rectangle en M, et la ligne MO' est perpendiculaire à l'hypoténuse OP. On a donc, d'après un théorème connu de géométrie,

$$MO'^2 = OO' \times O'P.$$

En remplaçant ces lignes par leurs valeurs ($MO' = r$, $OO' = e$, $O'P = 2R - e$), on obtient

$$r^2 = e \times (2R - e), \qquad \text{d'où} \qquad 2R = e + \frac{r^2}{e}.$$

Remarques. — 1° Le même procédé s'appliquerait au cas d'une surface sphérique concave.

2° Si l'on voulait mesurer l'épaisseur d'un corps filiforme, tel qu'un cheveu, ne pouvant se mettre directement sous la vis, on n'aurait qu'à le placer entre le support et une lame à faces parallèles d'épaisseur connue e. On mesurerait l'épaisseur totale e' du système par le procédé ci-dessus indiqué, et l'on aurait $x = e' - e$.

129. **Application de la vis micrométrique : appareil de Borda.** — L'appareil qu'avait imaginé Borda pour mesurer avec précision la longueur de son pendule était analogue à un sphéromètre : c'est pourquoi nous le décrirons à cette place.

1° *Description.* — Il se compose d'une vis micrométrique V mobile dans un écrou fixe E (fig. 118), qui est solidement attaché, à l'aide d'un trépied à vis (v, v, v), sur un support horizontal HH. La vis porte à son extrémité un petit plan d'acier *mm* bien perpendiculaire à l'axe du cylindre, et un peu plus bas un cercle divisé CC, dont le limbe se déplace en tournant devant un couteau divisé. La règle horizontale LL, qui est placée derrière le pendule B, servait à mesurer les amplitudes des oscillations.

2° *Opération.* — Il s'agissait de déterminer a, c'est-à-dire la distance de l'axe de suspension au centre de la sphère B. On disposait l'appareil sous cette sphère, et, en tournant la vis, on soulevait lentement le plan *mn*, jusqu'à ce qu'il vînt toucher la sphère en son point le plus bas. Le contact était obtenu au moment où l'on voyait disparaître la flamme d'une bougie qu'on avait préalablement disposée derrière le pendule, à une certaine distance. On s'assurait que le contact n'était pas dépassé, en faisant alors osciller le pendule : on ne devait entendre qu'un léger frôlement contre le plan.

Cela fait, on enlevait le pendule et on lui substituait une règle divisée, munie d'un couteau de suspension à sa partie supérieure, et d'une languette mobile faisant vernier à sa partie inférieure. On n'avait plus qu'à amener la pointe de la languette au contact du plan *mn*, et à lire directement la distance du plan à l'axe de suspension : c'est la longueur que nous avons appelée λ précédemment (108) : on avait $\lambda = a + r$.

Pour mesurer r, on posait la boule du pendule sur le plan *mn*, et l'on manœuvrait la vis jusqu'à ce que la languette-vernier vînt toucher la sphère et, cette fois-ci, en son point le plus haut. La distance λ', qu'on lisait alors sur la règle,

était égale à $a - r$. En prenant la demi-somme des deux lectures $\frac{\lambda + \lambda'}{2}$, on avait a; en prenant la demi-différence $\frac{\lambda - \lambda'}{2}$, on avait r.

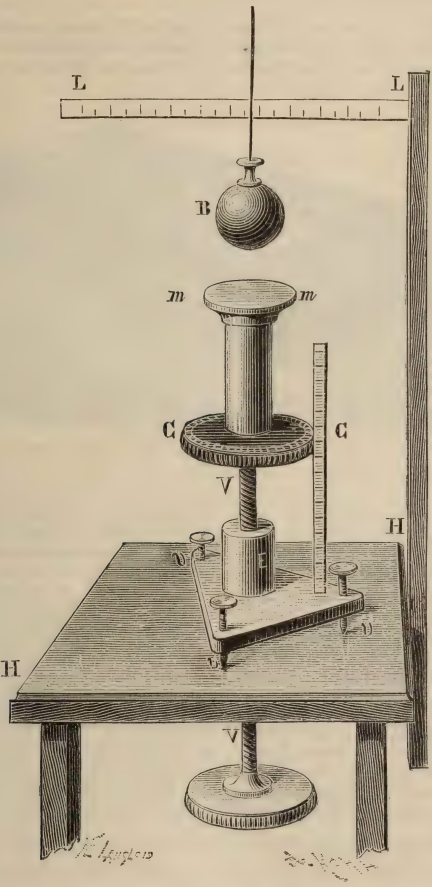


Fig. 118.

130. **Machine à diviser.** — 1° *Définition.* — C'est un instrument de précision qui peut servir aux usages suivants :

Diviser une longueur donnée en un nombre déterminé de parties égales.

Tracer des divisions d'une longueur déterminée.

Mesurer exactement une longueur.

2° *Description.* — Nous ne décrirons la machine à diviser que sous sa forme primitive la plus simple [1]. Elle se compose essentiellement d'une vis micrométrique fixe qui mène un écrou mobile. Le cylindre de la vis est saisi vers ses deux extrémités entre deux colliers C et C′ (fig. 119), dans lesquels il peut

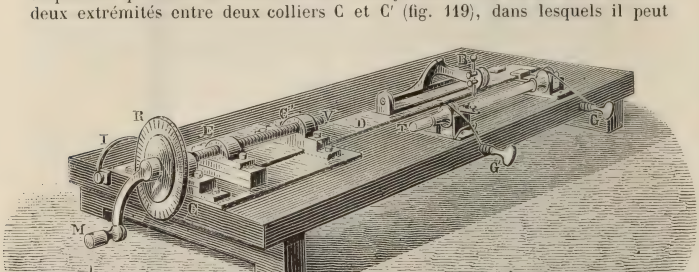


Fig. 119.

tourner sur place à frottement doux. On effectue la rotation à l'aide d'une manivelle M, qui est reliée à la tête de vis; on apprécie les angles de rotation à l'aide d'un disque à limbe divisé R, fixé par son centre près de la tête de la vis, comme celui du sphéromètre, et tournant avec elle devant un index fixe I. L'écrou E embrasse la vis et ne peut tourner avec elle. Il est forcé d'avancer ou de reculer, suivant le sens de la rotation. Comme le pas est de 1 millimètre et que le cercle est divisé en 100 parties, on peut déplacer l'écrou de $\frac{1}{100}$ de millimètre. A l'écrou est fixée une règle d'acier D qui se meut avec lui, et c'est cette règle qui porte le burin B, c'est-à-dire l'outil à pointe d'acier ou de diamant qui sert à tracer des divisions sur les métaux ou sur le verre.

3° *Usages. — Soit à tracer* n *divisions égales sur un tube de verre.*

On dispose le tube T, parallèlement à la règle D, dans des coussinets où il est fixé par deux cordes à boyau G et G′, qui l'empêchent de se déplacer, mais non de tourner sur place. La longueur à mesurer se trouve comprise entre les deux points du tube fixés sur les coussinets. Dans une opération préliminaire, on compte les nombres de tours et de centièmes de tour nécessaires pour faire marcher la pointe du burin entre les points extrêmes K : soient $p + \frac{q}{100}$ ces nombres. Il est évident que pour avoir n divisions égales il faudra buriner un trait chaque fois qu'on aura fait $\frac{1}{n}\left(p + \frac{q}{100}\right)$ tours à partir du point O.

1. Voir la machine perfectionnée dans le *Cours de physique* de MM. Jamin et Bouty.

Remarque. — L'opération préliminaire ci-dessus montre comment on se sert de la machine pour mesurer avec précision une longueur quelconque K. On a en millimètres..... $K = p + \frac{q}{100}$.

Soit à tracer des divisions de longueur déterminée.

On fixe la longueur à diviser, tube de verre ou règle métallique, comme précédemment. Soit l la longueur en millimètres du degré de l'échelle qu'on veut tracer. Le nombre de tours et de centièmes de tour correspondant à cette longueur est donné par l'équation précédente

$$p + \frac{q}{100} = l.$$

Il suffira donc d'arrêter le chariot et de buriner une division chaque fois qu'on aura avancé de $\left(p + \frac{9}{100}\right)$ tours de la vis.

131. **Cathétomètre.** — 1° *Définition.* — C'est un instrument de précision qui *sert à mesurer la distance verticale de deux points donnés*, par exemple la différence de niveau de deux colonnes liquides, la hauteur d'une colonne barométrique. C'est de cet usage que lui vient son nom (de καθέτος, ligne verticale, et μέτρον, mesure).

2° *Principe de l'instrument.* — Réduit à sa forme primitive, il consiste en une tige verticale divisée, le long de laquelle peut glisser une lunette horizontale avec laquelle on vise successivement les deux points : leur distance verticale est donnée par la course de la lunette sur son support. La figure 120 donne une vue d'ensemble du cathétomètre, et les figures 121, 122 et 123 en donnent les détails, dessinés à une plus grande échelle.

3° *Description.* — Une colonne d'acier de $1^m,20$ de hauteur, montée sur un trépied à vis calantes, porte le *corps* du cathétomètre. On nomme ainsi un tube creux de laiton PQ, qui s'engage comme un manchon sur la colonne d'acier, et tourne librement autour d'elle. Le tube PQ est en effet surmonté d'un chapeau de cuivre z (fig. 121) dont la tête est traversée par une vis d'acier x. La pointe de celle-ci porte sur l'extrémité axiale de la colonne, de manière que lorsqu'on tourne la vis, on soulève tout le tube PQ, qui se trouve ainsi suspendu sur pivot ; il est guidé à sa partie inférieure par un collier qui embrasse un tourillon conique réservé à la base de la colonne.

Le long du tube PQ glissent deux chariots AB et DC, reliés entre eux par une vis de rappel t, qui est micrométrique (fig. 122). Le premier porte une lunette LL' et un niveau à bulle d'air mn, montés sur une fourchette mobile autour d'un axe c fixé sur le corps du cathétomètre. A la fourchette est fixé un levier i, qu'on incline plus ou moins à l'aide d'une vis de rappel p, pour obtenir l'horizontalité du niveau et de la lunette.

Le bouton K, qui fait marcher la vis t, porte sur sa circonférence une division en 100 parties ; un repère o, fixé à la pièce DC, permet d'évaluer avec précision les angles de rotation. Le pas de la vis t étant de $\frac{1}{2}$ millimètre, il s'ensuit que, lorsqu'on tourne le bouton K de 1 division, le chariot AB et la lunette se déplacent de $\frac{1}{100}$ de millimètre. Enfin, sur toute la longueur du tube PQ est

une échelle en millimètres, représentée sur la droite de la figure 123; un vernier *vv'*, lié au chariot A, glisse le long de l'échelle.

4° *Opération.* — Pour déterminer la position d'un point, on abaisse ou l'on élève les deux chariots et avec eux la lunette, jusqu'à ce que celle-ci soit à la hauteur du point à observer; puis, fixant le chariot DC au moyen d'une vis de

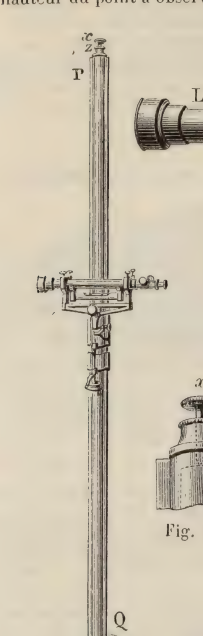


Fig. 120.

Fig. 121.

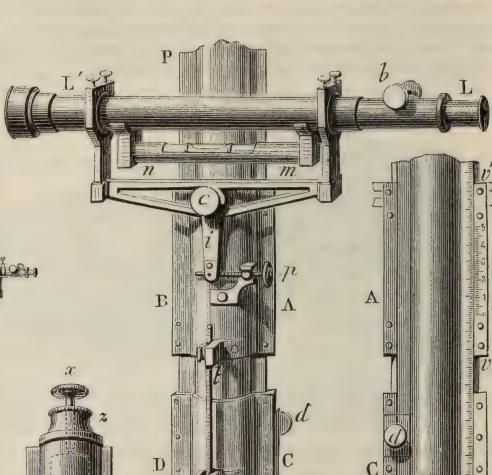


Fig. 122.

Fig. 123.

pression *d*, on tourne lentement le bouton K en visant le point en question à l'aide de la lunette. On arrête le mouvement au moment précis où l'image du point vient coïncider avec le point de croisement des fils du réticule. On connaît alors une horizontale sur laquelle se trouve le point visé : cette ligne est l'axe optique de la lunette. Pour en avoir exactement la hauteur au-dessus du zéro de l'échelle, on n'a qu'à lire l'indication du vernier sur celle-ci. On opère de la même manière pour déterminer la hauteur du second point donné. La différence entre les deux nombres obtenus est égale à la distance verticale des deux points.

5° *Réglage.* — Les indications du cathétomètre ne sont exactes que si l'instrument est bien réglé. Le réglage consiste dans la réalisation des conditions suivantes :

1. *L'axe optique de la lunette doit être parallèle à la ligne des repères du niveau.*

II. *L'axe optique de la lunette doit être perpendiculaire à l'axe de rotation.*

III. *L'axe de rotation de l'instrument doit être vertical.*

Remarque. — Le réglage du cathétomètre est une opération fort délicate, dont le développement nécessite la connaissance de la théorie du niveau et de celle des lunettes, et l'emploi de termes nouveaux, tels que axe optique, réticule, ligne des repères, etc., qui n'ont pas encore été définis. Nous exposerons plus loin ce réglage parmi les applications des lunettes.

MESURE DES MASSES, DES POIDS ET DES FORCES.

132. **Définitions et généralités.** — Les masses et les poids peuvent être mesurés à l'aide d'un même instrument de précision, la *balance*, et par une même opération, la *pesée*. On sait, en effet, qu'il existe entre la masse M d'un corps et son poids P la relation générale $P = Mg$. Comme on connaît la valeur de g, avec une grande approximation, dans les différents lieux du globe, il suffira de mesurer *directement* l'une des grandeurs P et M; la valeur de l'autre s'en déduira par la formule précédente.

Ce sont les poids qu'on a commencé à mesurer directement. On a d'abord choisi une unité de poids, le *gramme*, unité dérivée du mètre. La méthode de mesure consiste à faire équilibre au poids inconnu X, à l'aide d'un *poids marqué*, c'est-à-dire d'un poids connu, échantillonné d'avance en unités de poids. Soit P ce nombre de grammes : on a évidemment $X = P^g$, d'après la définition même de l'égalité des forces. L'instrument qui sert à produire rigoureusement cet équilibre, c'est la *balance;* l'opération elle-même s'appelle *pesée*. Connaissant le poids P du corps, on en déduisait sa masse par la formule $M = \frac{P}{g}$.

Mais cette unité de poids est elle-même un produit de deux facteurs mg, dont l'un, la masse m, est constant, et l'autre, l'accélération g, est variable avec la latitude : il s'ensuit donc que l'unité elle-même est variable avec la latitude. Un gramme de Paris, défini comme le poids d'un centimètre cube d'eau pure (à 4°) à Paris, n'est pas le même poids qu'un gramme de Lima qui serait défini de la même manière. Par conséquent deux pesées, faites l'une à Paris et l'autre à Lima, qui conduiraient au même nombre de grammes, ne seraient pas comparables et ne correspondraient pas à des poids égaux, c'est-à-dire à des effets égaux de la pesanteur. Réciproquement, deux pesées qui conduiraient à deux nombres différents pourraient correspondre à deux poids identiques. Par exemple, une masse d'or qui pèserait 1000^g à

Lima (en grammes de Lima) pèserait à Paris

$$1000 \times \frac{980,96}{978,34} = 1002^{g},678 \text{ (en grammes de Paris)}^{1}.$$

Cette variation de l'unité de poids, qui n'est pas sans inconvénients pratiques dans les transactions commerciales, amène des complications inutiles et fâcheuses dans les mesures scientifiques. C'est pourquoi la commission des unités C. G. S. a pris comme unité fondamentale une *unité de masse*, la masse du gramme, grandeur constante et indépendante des variations de latitude. On mesure donc directement la masse d'un corps en cherchant combien de fois elle vaut l'unité de masse C. G. S. ou gramme-masse : le nombre M qui exprime ce rapport est la masse du corps en unités C. G. S. C'est un nombre invariable. On en déduit le poids, variable en chaque lieu du globe, en appliquant la formule $P = Mg$.

Cette même équation montre d'ailleurs que deux masses égales ont des poids égaux, dans un même lieu. Par suite, pour mesurer une masse, c'est-à-dire pour déterminer une masse connue (évaluée en unités C. G. S.) qui soit égale à la masse inconnue, il suffira de chercher à équilibrer le poids de celle-ci avec le poids de celle-là. L'opération se ramènera donc à une pesée, qu'on effectuera dans une balance et avec les mêmes *poids marqués*, puisque les masses de ces poids marqués représentent également les multiples et les sous-multiples du gramme-masse. Seulement on énoncera le résultat de la pesée en grammes-masse, au lieu de l'énoncer en grammes-poids, et l'on aura ainsi un coefficient constant, caractéristique du corps pesé. On pourra ensuite en déduire le poids du corps en un lieu quelconque, comme il a été dit plus haut.

La balance ne sert donc à mesurer directement que les masses des corps. Pour mesurer directement des poids ou des forces quelconques, il faudrait employer un autre instrument, appelé *dynanomètre*, qui n'est pas un instrument de précision.

133. **Levier.** — Avant d'étudier la balance, nous rappellerons ici la description et la théorie du *levier*, qui est l'organe essentiel de tous les types de balance.

1. 980,96 et 978,34 étant les valeurs de g à Paris et à Lima, on a, en appelant M la valeur constante de la masse d'or, p et p' ses poids différents à Lima et à Paris,

$$p = M \,.\, 978,34,$$
$$p' = M \,.\, 980,93,$$

d'où

$$\frac{p'}{p} = \frac{980,96}{978,34} \qquad \text{et} \qquad p' = p \cdot \frac{980,96}{978,34}.$$

1° *Définitions.* — On appelle *levier* une barre solide, droite ou courbe, assujettie à tourner autour d'un axe fixe, et sollicitée par des forces ordinairement comprises dans un plan perpendiculaire à l'axe et, par suite, concourantes en un point de ce plan.

Le levier est le type des *machines simples.*

Pour l'assujettir à ce seul mouvement de rotation, tantôt on l'appuie, par l'arête d'un couteau, sur un support fixe qui ne lui permet qu'un déplacement angulaire limité (fig. 124); tantôt, comme dans le levier courbe de la figure 125, l'axe de rotation est constitué par deux *tourillons* cylindriques de même axe et de même rayon, qui reposent sur deux *appuis* ou *coussinets,* également cylindriques, et placés symétriquement des deux côtés du levier [1].

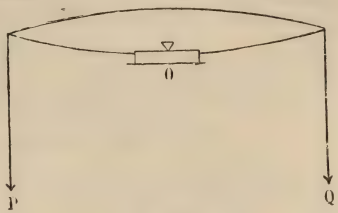


Fig. 124.

2° *Théorie.* — Soit un levier de forme quelconque AOB (fig. 125), sollicité par deux forces P et Q concourantes en un point I de leur plan. Ces deux forces sollicitent le levier en sens contraires : l'une d'elles, P, agit comme moteur : on l'appelle la *puissance;* l'autre, Q, résiste à cette action motrice : on l'appelle la *résistance.* La théorie du levier consiste à chercher à quelle condition ces forces se font équilibre sur la machine.

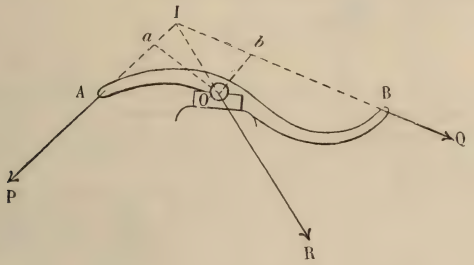


Fig. 125.

Or nous avons vu précédemment (54) que lorsqu'un système de forces quelconques est appliqué à un corps solide mobile autour d'un axe fixe, les conditions d'équilibre se réduisent à une seule : c'est que *la somme des moments, pris par rapport à l'axe fixe, soit nulle.* Cette condition générale s'exprimera aisément dans le cas actuel, où il n'y a que deux forces concourantes P et Q appliquées au corps solide. En effet, soit O la projection de l'axe sur le plan des forces, Oa et Ob les perpendiculaires abaissées du point O sur les directions des forces; le moment de P est, par définition, $(+ P . Oa)$ et celui de Q est $(- Q . Ob)$, et l'équation d'équilibre est

$$P . Oa - Q . Ob = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad P . Oa = Q . Ob.$$

1. Résal, *Éléments de mécanique.*

3° *Condition d'équilibre du levier.* — On énonce simplement cette dernière équation en disant que : *le moment de la puissance doit être égal et de signe contraire au moment de la résistance.* C'est là proprement la condition d'équilibre du levier.

On peut encore mettre l'équation précédente sous la forme $\frac{P}{Q}=\frac{Ob}{Oa}$, et l'on énonce comme il suit la condition d'équilibre du levier :

La puissance et la résistance doivent être en raison inverse de leurs bras de levier.

Ce sont les perpendiculaires Oa et Ob qui s'appellent les *bras de levier* des forces correspondantes P et Q.

4° *Cas particulier du levier droit.* — Les leviers dont on se sert le plus souvent sont des leviers droits, qu'on sollicite par des forces parallèles P et Q. Dans ce cas, les trois points A, O, B (fig. 126) sont en ligne droite et les deux perpendiculaires Oa et Ob sont sur le prolongement l'une de l'autre, et déterminent avec les segments OA et OB du levier deux triangles semblables OAa et OBb. On en déduit l'égalité

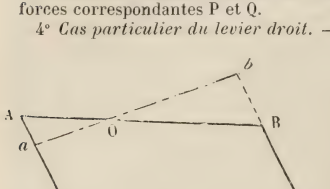


Fig. 126.

$$\frac{Ob}{Oa}=\frac{OB}{OA};$$

par conséquent, l'équation d'équilibre peut s'écrire

$$\frac{P}{Q}=\frac{OB}{OA},$$

et elle exprime que *les deux forces sont en raison inverse des segments que leurs points d'application déterminent sur la longueur du levier.* Ces segments sont à proprement parler les *bras du levier* par rapport aux forces qui le sollicitent : c'est de là que vient le nom de *bras de levier* appliqué à la distance Oa d'une force P à un point d'appui fixe O (fig. 125).

5° *Divers genres de leviers.* — On distingue habituellement trois *genres* de leviers, suivant la position qu'occupe le point d'appui O par rapport aux points d'application A et B de la puissance et de la résistance.

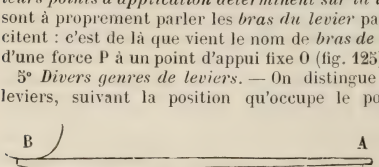


Fig. 127.

Le levier est dit *du premier genre*, quand le point d'appui se trouve entre la puissance et la résistance (fig. 124, 125 et 126).

Le levier est *du second genre*, quand la résistance se trouve entre la puissance et le point d'appui.

Le levier est *du troisième genre*, quand la puissance se trouve entre la résistance et le point d'appui.

Parmi les premiers, nous pouvons citer les fléaux de balance (que nous allons étudier) ; le *levier coudé* de la machine d'Atwood (fig. 52) ; la *pince à talon* (fig. 127), barre de fer dont se servent les maçons et les carriers pour soulever ou détacher de gros blocs de roche.

La *pédale du rémouleur* est le type des leviers du second genre (fig. 128). Enfin, la plupart des *balanciers de pompes*, auxquels on imprime à la main

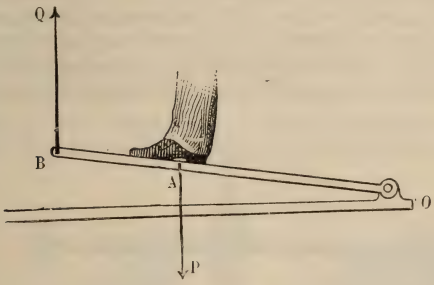


Fig. 128.

un mouvement de va-et-vient alternatif, sont des leviers du troisième genre (fig. 129).

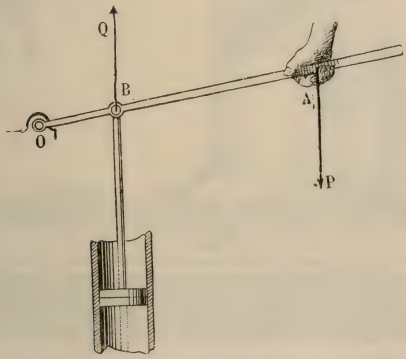


Fig. 129.

134. **Balances.** — 1° *Définitions.* — On nomme *balances* des instruments qui servent à déterminer directement la masse des corps et indirectement leur poids. L'opération s'appelle *pesée :* elle consiste à trouver une masse connue, graduée en grammes-masse (*poids marqués*), qui ait *le même poids*, dans le lieu de l'expérience, et par suite *la même masse* que le corps.

On construit deux sortes de balances : les balances ordinaires, qui sont des instruments assez précis, et des *balances* dites *de pré-*

cision. Nous donnerons la description et la théorie d'un type usuel de chacune de ces catégories.

2° *Description d'une balance ordinaire.* — La balance ordinaire (fig. 130) consiste en un levier du premier genre *mn*, nommé *fléau*, aux deux extrémités duquel sont suspendus des *bassins* ou *plateaux* P, Q, de poids égaux, destinés à recevoir, l'un des objets à peser, l'autre des poids marqués. Le fléau est traversé en son

Fig. 130.

milieu par un prisme d'acier *ok* (fig. 132), qu'on nomme *couteau*, dont l'arête vive constitue l'*axe de suspension* du fléau; elle repose à ses deux bouts sur deux pièces polies *x*, *y*, d'agate ou d'acier, qui constituent la *chape :* et ce dispositif diminue le frottement de l'axe. Aux extrémités du fléau sont adaptés deux prismes plus petits, dont les arêtes vives sont tournées en haut et sont parallèles à celle du couteau central. C'est sur ces arêtes que reposent, à l'aide de crochets, les plateaux P et Q (fig. 131). Enfin,

à la partie supérieure du fléau et perpendiculairement à sa direction, est fixée une longue aiguille qui oscille devant un arc gradué *a*, fixe et porté par une colonne de laiton sur laquelle reposent la chape et le fléau (fig. 130). Quand ce dernier est bien horizontal, la pointe de l'aiguille correspond au milieu de l'arc. La colonne est portée par un pied à trois vis calantes à l'aide desquelles on lui donne la position verticale.

3° *Boîtes de poids marqués.* — A chaque instrument est jointe une boîte, dite *boîte de poids*, contenant une série de masses (vul-

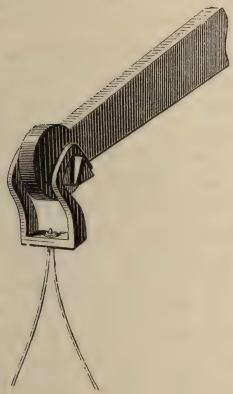


Fig. 131.

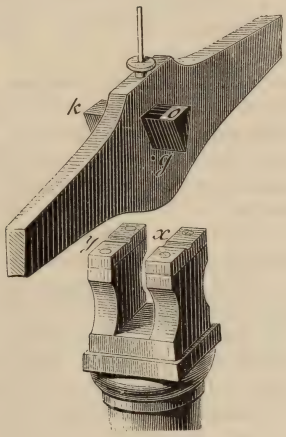


Fig. 132.

gairement, *poids marqués*) graduées en unités C. G. S., c'est-à-dire en grammes-masse.

Les poids usuels forment trois séries : les *gros poids*, qui vont du kilogramme à 50 kilogrammes; les *poids moyens*, du gramme au kilogramme, et les *petits poids*, du milligramme et de ses subdivisions au gramme. Les premiers ne sont pas utilisés dans les laboratoires, ils ne servent qu'aux usages industriels et commerciaux, dans les gros instruments de pesage, appelés *balances de magasin, balances de comptoir* et *balances-bascules :* nous n'en parlerons pas davantage. Ceux des autres séries servent dans les balances de laboratoire, et sont contenus dans les *boîtes de poids marqués.*

Les poids moyens sont de cuivre jaune et ont la forme de cy-

lindre; quelques-uns aussi sont à godets, en forme de cône tronqué et rentrent les uns dans les autres. Les petits *poids marqués* sont en platine ou en cuivre jaune; ce sont généralement des plaques carrées, très minces, dont un des angles est relevé, afin qu'on puisse les saisir avec des pinces. Une boîte de poids de laboratoire contient d'ordinaire plusieurs séries de quatre poids :

Poids moyens.	Série des unités.	2 poids égaux à	1g.	1 p. égal à	2g.	1 p. égal à 5g.
	Série des dizaines . .	2 —	à 10g.	1 —	à 20g.	1 — à 50g.
	Série des centaines . . .	2 —	à 100g.	1 —	à 200g.	1 — à 500g.

Il est facile de voir que chacune de ces séries fournit, par une association convenable, tous les poids, de 1 jusqu'à 9, et leur ensemble tous les poids depuis 1g jusqu'à 999g. On a trois séries analogues pour les petits poids marqués, qui permettent toutes les combinaisons de poids depuis 0g,1 jusqu'à 0g,001.

Remarques. — I. La plupart des poids marqués qu'on trouve dans le commerce et dans les laboratoires ont été gradués en *grammes-poids* et non en *grammes-masse*. Mais, comme l'unité de masse C. G. S. est précisément la masse d'un corps qui pèse 1 gramme-poids métrique, il s'ensuit que les poids marqués, gradués en grammes-poids, permettent de déterminer directement les masses des corps pesés. D'ailleurs la connaissance des masses des corps est parfaitement suffisante dans la pratique, parce que les différences de poids qu'une même masse présente en divers points du globe ne sont pas sensibles aux muscles ni aux engins mécaniques employés pour la soulever. Ce n'est qu'exceptionnellement, dans les recherches scientifiques, qu'on a besoin de passer des masses aux poids exacts, au moyen de la formule $P = Mg$.

II. Tous les poids marqués sont censés *échantillonnés dans le vide :* cela veut dire qu'ils n'ont réellement la valeur marquée sur chacun d'eux qu'à la condition d'être employés dans le vide. Or, comme on fait toutes les pesées dans l'air, il en résulte une diminution dans la valeur de chaque poids marqué, à cause d'une poussée verticale que l'atmosphère exerce sur tous les corps qui y sont plongés. Nous apprendrons plus tard à mesurer cette cause d'erreur des pesées et à la corriger.

4° *Conditions de justesse.* — Une balance ne peut servir à peser les corps avec exactitude et précision qu'autant qu'elle est à la fois *juste* et *sensible*.

Définition de la justesse. — Une balance est dite *juste*, lorsque son fléau se maintient horizontal, les plateaux étant vides ou chargés de poids égaux.

Énoncé des conditions. — Il y a deux conditions de justesse, nécessaires et suffisantes :

I. *Le centre de gravité de la partie mobile (fléau, plateaux et accessoires) doit être sur la verticale du point de suspension, quand le fléau est horizontal;*

II. *Les deux bras du fléau doivent être rigoureusement égaux.*

Démonstration. — Si l'on conçoit un plan vertical qui passe par l'axe de symétrie du fléau, ce plan coupe les arêtes des trois couteaux aux points *o*, *m*, *n* (fig. 133). Le point *o* est appelé *point de suspension;* les points *m* et *n*, *points d'attache.* C'est en ces points que doivent passer les résultantes du poids de la partie mobile et des poids placés dans les plateaux. Les *bras du fléau* sont les distances *om* et *on*.

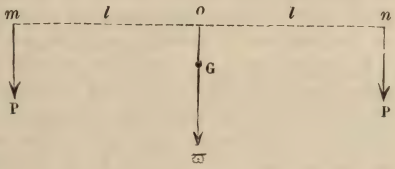


Fig. 133.

Supposons les conditions de justesse remplies. On voit d'abord que, si les plateaux sont vides, le fléau n'est sollicité que par une seule force, le poids ϖ de la partie mobile. Ce poids est appliqué au centre de gravité G, et il n'a d'autre effet que d'appuyer le fléau sur son support. On dit qu'*il est détruit par la résistance du support.* Le fléau se maintient donc nécessairement horizontal.

Si les plateaux sont chargés de poids égaux, P, le fléau est soumis à trois forces parallèles. La force ϖ passe toujours par le point *o*. Les deux forces P ont une résultante parallèle, égale à leur somme et appliquée aussi au point *o*, puisque ce point divise en deux parties égales la distance *mn* de leurs points d'application. Toutes ces forces sont donc détruites par la résistance du support, et le fléau se maintient horizontal.

Remarques. — I. *Utilité des couteaux.* — Il ne suffit pas que les bras du fléau soient égaux pendant qu'il est en équilibre, il faut aussi qu'ils restent égaux pendant ses oscillations. C'est pour satisfaire à cette condition qu'on fait reposer les plateaux sur deux prismes, dont les arêtes vives constituent, dans toutes les inclinaisons du fléau, les points d'attache des plateaux (fig. 134 et 135).

II. *Condition de commodité.* — A ces conditions on ajoute ordinairement la suivante : *le centre de gravité de la partie mobile doit*

être au-dessous de l'arête du couteau. Mais ce n'est pas, à proprement parler, une *condition de justesse;* c'est plutôt une *condition de commodité.* Si elle n'était pas remplie, la balance n'en serait pas moins juste, mais elle ne serait pas d'un usage commode. Ce serait un instrument peu pratique. En effet, si le centre de gravité était au-dessus de l'arête de suspension, le fléau ne pourrait prendre qu'un état d'équilibre instable (90), très difficile à établir et très facile à rompre. La moindre trépidation suffirait pour faire trébucher le fléau de 90°, même dans le cas où les plateaux seraient chargés de poids égaux. On dirait alors que la balance est *folle.* Si le centre de gravité coïncidait avec l'arête du couteau, l'effet de la pesanteur sur le fléau se trouvant détruit dans toutes les positions qu'on lui donne, il ne pourrait pas osciller, et ne ferait que prendre brusquement l'inclinaison maximum du côté où l'on mettrait le moindre excès de poids.

Si, au contraire, la condition précédente est remplie, il en résulte deux avantages : 1° quand les plateaux sont vides ou chargés de poids égaux, le fléau se tient horizontal dans un état d'équilibre stable : on est toujours sûr de l'y amener au bout d'un temps plus ou moins long, qui dépend de la sensibilité; 2° quand les poids sont inégaux, le fléau penche vers le plus grand poids et il prend une nouvelle position d'équilibre, dont l'inclinaison est à peu près proportionnelle à la différence des poids.

En effet, soient P et Q ces deux poids, P étant plus grand que Q; soient o, m et n le point de suspension et les points d'attache (fig. 134), ϖ le poids du fléau,

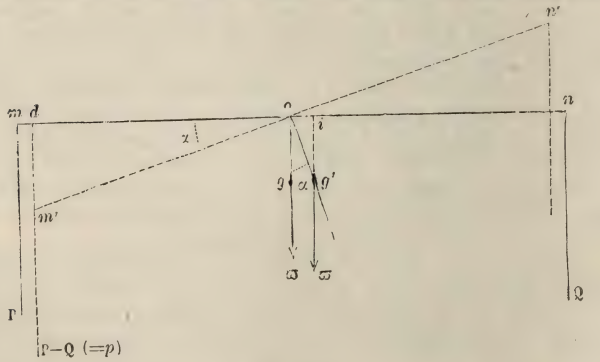


Fig. 134.

mn sa direction horizontale, g la position qu'occupe alors son centre de gravité, et g' celle qu'occupe ce point quand le fléau est incliné suivant m' n'. On eut regarder ce dernier comme un levier sollicité en sens contraire par deux

forces parallèles, l'une $(P - Q)$, appliquée en m', et l'autre ϖ, appliquée en g'. Leurs moments par rapport au centre d'oscillation o sont respectivement $(P - Q) \times od$ et $\varpi \times oi$. Or, tandis que les facteurs $P - Q$ et ϖ sont des quantités constantes, les facteurs od et oi varient avec l'inclinaison, od décroissant de om à zéro, et oi croissant de zéro à og' ; l'un des moments croît donc d'une manière continue et l'autre décroît à mesure que l'inclinaison augmente : donc il y aura toujours un angle d'inclinaison, mom', pour lequel les deux moments seront égaux. A cet instant l'équation d'équilibre du levier sera satisfaite : le fléau aura atteint une nouvelle position d'équilibre (133, 2°).

3° *Conditions de sensibilité. — Définition de la sensibilité.* — On dit qu'une balance est *sensible*, lorsqu'elle accuse par une notable inclinaison du fléau une faible différence entre les poids qu'on veut comparer.

Conditions. — Une balance est d'autant plus sensible, pour un même excès de poids mis dans l'un des plateaux :

1° *Que les bras du fléau sont plus longs.*

En effet, on a vu précédemment que la force qui fait incliner le fléau est l'excès de poids $(P - Q)$ appliqué au bras de levier od ; mais celui-ci, qui est la projection de om' sur om, est d'autant plus grand, que le bras du fléau est plus long : donc l'action de $(P - Q)$ croît avec la longueur du fléau.

2° *Que le poids de la partie mobile est moindre.*

3° *Que le centre de gravité du fléau est plus rapproché de l'axe de suspension.*

En effet, la résistance qui s'oppose à l'inclinaison du fléau est précisément le poids ϖ appliqué au bras de levier oi, et oi est la projection de og' $(= og)$: donc plus les quantités ϖ et og seront petites, plus la résistance à l'inclinaison sera faible.

Telles sont les conditions proprement dites de sensibilité. Pour que celle-ci reste indépendante de la charge totale, il faut encore réaliser la condition suivante :

4° *Les trois points de suspension des plateaux et du fléau doivent être en ligne droite.*

5° *Démonstration géométrique de la quatrième condition de sensibilité.* — Supposons en effet que les trois points forment une ligne brisée mon (fig. 155 et 156). Il y a deux cas à considérer :

I. Celui où le point de suspension o est *au-dessus des deux autres*, de manière que l'angle $mog = \beta$, qui est la moitié de l'angle mon, soit un angle aigu : alors *la sensibilite diminue quand la charge totale augmente.*

II. Celui où le point de suspension est *au-dessous des deux autres*, de manière que l'angle β soit un angle obtus : *la sensibilité s'accroît en même temps que la charge totale.*

β *est aigu.* — Supposons que P soit plus grand que Q, et qu'on ait $P = Q + p$. Soit mon la position normale d'équilibre du fléau, quand les plateaux sont vides ou chargés de poids égaux. Supposons qu'on mette les poids Q et P $= Q + p)$ dans les plateaux.

Le fléau est alors soumis à trois forces verticales, l'une Q appliquée en n, l'autre P $(=Q+p)$ appliquée en m, la troisième ϖ appliquée au centre de gravité g de la partie mobile. On peut composer les deux forces parallèles Q en une seule force égale à 2Q et appliquée en un point K, au milieu de la droite mn.

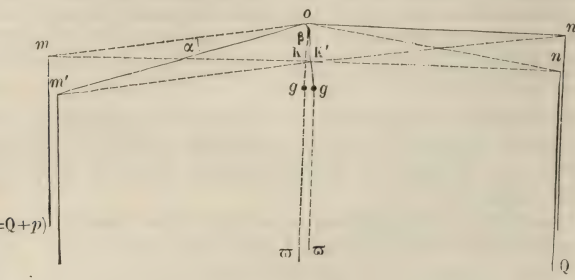


Fig. 135.

Cette force 2Q, ainsi que le poids ϖ, vont passer par le point d'appui o dans la position normale. Ces deux forces sont détruites par la résistance du point o. Il ne reste donc que la force p, appliquée en m. C'est elle qui fait pencher le fléau de ce côté. Dès qu'il s'est incliné d'un angle α, les points g et K viennent n g' et K', c'est-à-dire en dehors de la verticale du point d'appui. La forcee

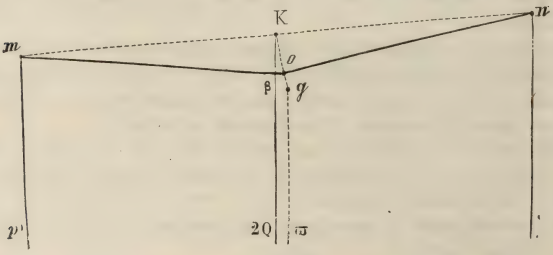


Fig. 136.

2Q, maintenant appliquée en K', agit alors dans le même sens que le poids ϖ pour annuler l'effet de l'excès p et pour fixer le fléau dans une nouvelle position d'équilibre. L'inclinaison, dans la position finale, est donc d'autant plus faible, toutes choses égales d'ailleurs, que la charge totale $(2Q+p)$ est plus grande, et la sensibilité de l'instrument en est diminuée d'autant.

β *est obtus.* — Si le point o est au-dessous de la droite mn (fig. 136), on pourra décomposer de même les poids P et Q en un poids résultant 2Q, appliqué au milieu K de mn et en un excès de poids p appliqué en m et qui fait trébucher le fléau ; or on voit que, dans la position inclinée du fléau (fig. 136), le poids 2Q, toujours appliqué en K, agit dans le même sens que p pour faire pencher le fléau et accroître la sensibilité. Cependant cette disposition est à rejeter, parce que, la somme des moments de p et de 2Q par rapport au point o étant en gé-

néral plus grande que le moment de ϖ par rapport au même point, l'équation d'équilibre ne pourrait pas être satisfaite, le poids ϖ serait impuissant à faire équilibre à la somme des poids $p + 2Q$, et le fléau trébucherait complètement, de sorte que la balance serait folle dans le plus grand nombre des cas.

β *est droit.* — Au contraire, lorsque les points m, o et n sont en ligne droite (fig. 134), le poids $2Q$, toujours appliqué au point o même, est détruit par la résistance de ce point et le fléau s'incline par la seule action de l'excès de poids p appliqué en m. La pression exercée en o par la résultante $2Q$ étant détruite, et p étant toujours très petit, il en résulte que *la sensibilité de la balance est indépendante de la charge totale* $P + Q$. Toutefois cette conclusion n'est rigoureuse qu'autant qu'on néglige le frottement du couteau sur la chape ; car ce frottement est d'autant plus grand, que la balance est plus chargée.

6° *Démonstration algébrique des conditions de sensibilité.* — I. *Cas d'un fléau droit.* — Soit α l'angle mom' (fig. 134), qui représente l'inclinaison du fléau, et p la différence $P - Q$ des poids placés dans les plateaux. On a déjà vu que, le fléau étant en équilibre dans la position inclinée $m'n'$, la condition d'équilibre est exprimée par l'équation

$$[1] \qquad p \,.\, od = \varpi \,.\, oi.$$

On n'a qu'à substituer aux lignes od et oc leurs valeurs trigonométriques, en fonction de α et des éléments de la balance. Or le triangle rectangle dom' donne $od = om' \cos \alpha$, et le triangle oig' donne $oi = og' \sin \alpha$ (car l'angle $og'i$ est égal à l'angle α, comme ayant ses côtés perpendiculaires). Portant ces valeurs dans l'égalité [1], et remplaçant om' et og' par les lettres l et d, on obtient

$$[2] \qquad pl \cos \alpha = \varpi d \sin \alpha, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{pl}{\varpi d}.$$

Or l'angle α est généralement assez petit pour qu'on puisse remplacer sa tangente trigonométrique par l'arc α, qui mesure l'inclinaison et, par suite, la sensibilité de la balance : on voit donc par l'égalité [2] que cette sensibilité est directement proportionnelle à l, inversement proportionnelle à ϖ et à d, ce qui comprend les trois premières conditions. Elle est d'ailleurs indépendante de la charge totale, puisque celle-ci, $(2Q + p)$, n'entre pas dans la formule.

II. *Cas d'un fléau coudé.* — Supposons, par exemple, que l'angle β soit aigu (fig. 137) et adoptons les mêmes notations que dans le cas précédent. Soit α l'inclinaison du fléau *mon* sous l'influence de l'excès p. La condition d'équilibre est la même que précédemment, mais son expression algébrique sera différente par suite de l'introduction de l'angle β dans la valeur des moments.

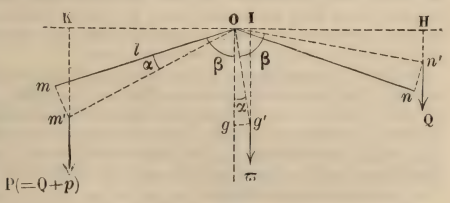


Fig. 137.

En effet, les bras de levier ne sont plus les bras mêmes du fléau : ce sont leurs projections OI, OH et OK sur l'horizontale du point d'appui. L'équation est donc

$$(Q + p)\ \mathrm{OK} = Q.\mathrm{OH} + p.\mathrm{OI}.$$

En remplaçant OK, OH et OI par leurs valeurs en fonction des éléments de la balance, il vient

$$(Q + p)\ l \sin(\beta - \alpha) = Q.l \sin(\beta + \alpha) + \varpi d \sin \alpha.$$

On en tire facilement

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{pl \sin \beta}{(2Q + p)\ l \cos \beta + \varpi d}.$$

La présence du terme $(2Q + p)$ dans cette équation prouve que, lorsque le fléau n'est pas droit, la *sensibilité* n'est pas indépendante de la *charge totale* $(2Q + p)$.

On voit de plus que, dans le cas où nous nous sommes placés, c'est-à-dire lorsque β est aigu, la *sensibilité diminue* quand la *charge totale augmente* parce que le coefficient $\cos \beta$ est > 0. Au contraire, si β *était obtus* (fig. 136), comme le terme $(2Q + p)\ l \cos \beta$ serait alors < 0, la *sensibilité augmenterait* en même temps que la charge totale.

7° Remarques. — Pour que les conditions précédentes aient une efficacité réelle et durable, il faut, en outre, réaliser dans la construction de la balance les deux conditions mécaniques suivantes :

1° *Dans la limite de charge de la balance, le fléau doit rester inflexible;* car, s'il fléchit, non seulement son centre de gravité peut s'abaisser, mais encore les points d'attache des plateaux.

2° *Le frottement aux points d'appui du couteau et aux points d'attache des plateaux doit être le plus petit possible.* C'est pour obtenir ce résultat que, dans les balances de précision, on fait usage de chapes bien polies d'agate ou d'acier.

135. **Balance de précision.** — Dans les recherches de physique et de chimie on fait usage de balances plus précises. Les règles pratiques qui doivent diriger la construction de cet instrument se déduisent de la théorie exposée ci-dessus. On doit : 1° faire les deux bras du fléau rigoureusement égaux ; 2° leur donner à la fois une grande longueur et une grande légèreté ; 3° établir dans un même plan horizontal et dans des directions parallèles les trois axes de suspension du fléau et des plateaux ; 4° placer le centre de gravité de la partie mobile au-dessous du point de suspension et plus ou moins près de lui, suivant le degré de sensibilité qu'on veut atteindre.

La figure 138 montre une balance de précision construite par M. Deleuil, et sensible à un demi-milligramme. Afin de la garantir de la poussière et de la préserver de l'action oxydante de l'air humide et aussi des agitations de l'air pendant la pesée, on l'enferme dans une cage de verre reposant sur une tablette qui porte l'instrument. La face antérieure s'ouvre à volonté pour permettre d'opérer les pesées : cette face n'a pas été représentée dans le dessin, afin de n'en pas masquer les détails.

I. *Fléau.* — Deux montants de fonte A et B portent à leur sommet chacun un plateau d'agate dont les deux surfaces forment un même plan horizontal sur lequel s'appuie et oscille le fléau *aa*. Ce fléau a été taillé dans une règle plate de bronze ou d'acier et a reçu la forme d'un losange allongé. Pour en diminuer le poids, on y a pratiqué de larges entailles qui ne laissent subsister que les côtés du losange. On a ainsi un fléau long et léger qui conserve une grande résistance à la flexion. Son axe de suspension est réalisé d'une manière

très précise à l'aide d'un prisme triangulaire d'acier trempé qu'on y a encastré perpendiculairement en son milieu, et dont l'arête inférieure, bien rectiligne, s'appuie sur les deux plans d'agate.

Fourchette. — A chaque extrémité du fléau est fixé un prisme d'acier, l'arête en dessus, destiné à supporter une chape d'agate, à laquelle est attaché chaque plateau (fig. 140). Si ces prismes restaient en contact avec les plans d'agate, leurs arêtes s'émousseraient, et la balance perdrait de sa sensibilité.

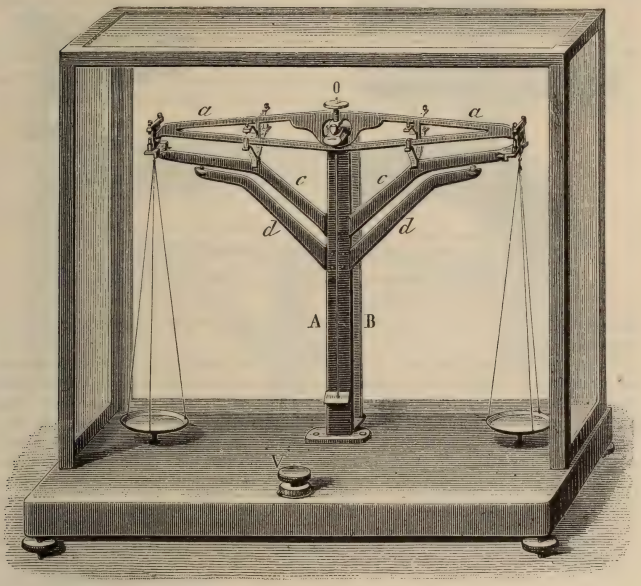


Fig. 138.

Pour éviter cet inconvénient, on adapte aux balances de précision un accessoire important, la *fourchette*, pièce mobile, qui permet de soulever les plateaux et le fléau toutes les fois que la balance ne fonctionne pas.

Les deux bras *d*, *d* (fig. 138), portés par le montant A, sont fixes et ne servent qu'à guider la fourchette. Celle-ci consiste en une pièce de fonte *c*, *c*, aussi longue que le fléau : elle s'élève et s'abaisse à frottement doux le long du montant A, à l'aide d'une tige masquée par ce dernier dans le dessin.

Pour faire mieux comprendre le jeu de la fourchette, la figure 140 représente sur une plus grande échelle le système qui sert à soulever les plateaux, et la figure 139 celui qui sert à soulever le fléau. A l'extrémité du fléau *a* (fig. 140) est un prisme d'acier *i*, et au-dessus de celui-ci une pièce *pq*, qui porte un des plateaux ; dans la face inférieure de cette pièce est encastré un plan d'agate qui s'appuie sur le prisme quand la balance fonctionne. Au-dessous du fléau *a* est le bout de la fourchette *c*, qui porte deux boulons cylindriques, *m*, *n*, dis-

posés avec précision au-dessous de deux pièces coniques liées à la chape *pq*. Par suite, lorsque la fourchette monte, les boulons *m* et *n*, entaillés de cavités convenablement disposées, reçoivent les deux cônes fixés à la pièce *pq*, soulèvent celle-ci et avec elle le plateau, qui se trouve ainsi porté tout entier par

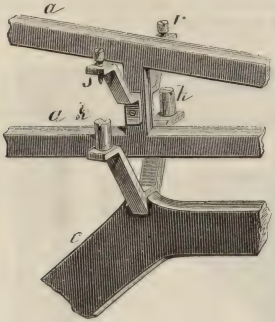


Fig. 139.

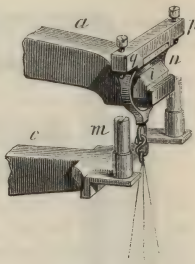


Fig. 140.

la fourchette. En même temps, le même effet se produit identiquement à l'autre extrémité du fléau.

Un mécanisme analogue sert à soulever le fléau pour empêcher son couteau de reposer sur la chape. Pour cela, à la partie moyenne de chacun des bras du fléau *aa* sont adaptées deux pièces coniques *r*, *s* (fig. 139), et, exactement au-dessous, sont fixés à la fourchette *c* deux boulons *k*, *h*, portant des cavités destinées à recevoir les cônes *r* et *s*. Par cette disposition, la fourchette ayant déjà soulevé les plateaux, comme on l'a vu ci-dessus, et continuant à monter, les boulons *k* et *h* rencontrent les cônes *s*, *r*, et les soulèvent. Le même effet se produisant simultanément en quatre points du fléau, celui-ci est soutenu, et les trois prismes restent sans charge tant que la fourchette est remontée.

La figure 141 représente le mécanisme à l'aide duquel on manœuvre la fourchette. Il se compose d'un levier *ab* placé sous la tablette. Ce levier, mobile autour d'un axe horizontal A, est articulé par un bout à une tige D reliée à la fourchette et la faisant marcher; de l'autre, il porte un appendice *a* sur lequel presse une pièce cylindrique C entaillée en hélice à sa base. On fait tourner cette pièce à l'aide d'un bouton V représenté en avant de la balance (fig. 138). Lorsque le bord incliné de la pièce C vient presser sur l'appendice *a* et l'abaisse, la tige D est soulevée et avec elle la fourchette. Si l'on tourne en sens contraire, la tige D s'abaisse et la fourchette descend.

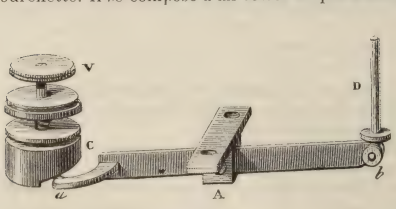


Fig. 141.

Sur l'arête supérieure du fléau et au-dessus du point de suspension, on a fixé verticalement une vis à pas très petit. Un bouton fileté, taraudé en écrou, peut

être mû sur la vis. Comme il fait partie intégrante du fléau, quand on le fait monter ou baisser, le centre de gravité de la partie mobile monte ou descend sur la verticale. Cela permet de régler la sensibilité de la balance (134, 5°).

Poids marqués de précision. — Aux balances de précision sont jointes nécessairement des boîtes de poids parfaitement justes. Dans les séries des sous-multiples du gramme (décigrammes, centigrammes, milligrammes) on substitue d'ordinaire un poids 2 à l'un des poids 1, parce que le poids 2 est plus maniable que le poids 1 : c'est un avantage pratique sensible, à cause de l'extrême petitesse de ces poids, qui vont jusqu'au *dixième de milligramme.*

On évite encore mieux cette difficulté de maniement, pour les fractions de milligramme, en employant à leur place de petits cavaliers C formés d'un fil de platine, pesant exactement 1^{mmg} (fig. 142). On les fait glisser soit sur les bras mêmes du fléau, soit sur une double règle plate métallique $O_1 m_1$, $O_1 n_1$, fixée au-dessus de chacun des bras du fléau, parallèlement à sa direction. Les deux moitiés de

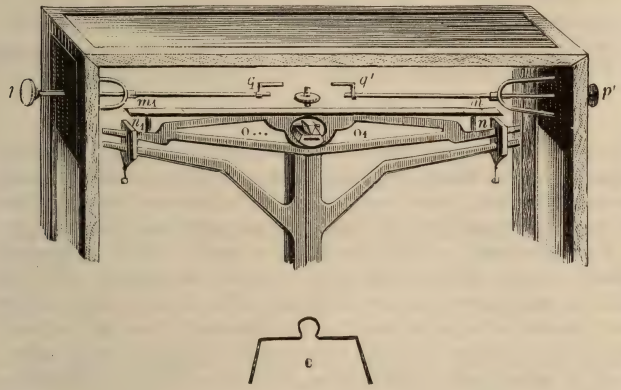


Fig. 142.

règle, ou les bras eux-mêmes, sont partagés en dix parties égales, marquées par des crans, dont le premier est en O_1 sur la verticale du point de suspension, et les derniers sur les verticales des points d'attache $m_1 m$ et $n_1 n$. D'après la théorie du levier, un cavalier de 1 centigramme, placé au dernier cran, c'est-à-dire sur l'une des verticales m ou n, pèsera sur le plateau de tout son poids; placé sur la verticale du milieu du bras Om, le cavalier n'exercera plus sur le plateau qu'un effort de 1/2 centigramme, c'est-à-dire de 5^{mmg}; placé au premier cran, à partir du point O_1, il pèsera sur le plateau comme 1/10 de centigramme, ou 1^{mmg} : en un mot, le cavalier, qu'on déplace sur le fléau, *exerce un effort proportionnel à sa distance à l'axe de suspension.* — On pourra donc de cette manière apprécier commodément le milligramme et même le dixième de milligramme, si la sensibilité de la balance le permet.

Ces cavaliers peuvent être maniés de l'extérieur de la cage : des tiges latérales pq, $p'q'$ permettent de les saisir par la boucle supérieure.

Limite de précision de la balance. — Les balances de précision qui sont sensibles au milligramme pour une charge totale de 1 kilogramme, sont des instruments de construction courante : or elles sont déjà sensibles au *millionième.*

Deleuil a jadis construit pour Regnault une balance sensible à 1^{mmg}, sous une charge de 10 kilogrammes[1] : la sensibilité était donc de $\frac{1}{10^7}$.

On a poussé la précision beaucoup plus loin au Bureau international des poids et mesures. En prenant certaines précautions, et en observant à distance des balances dont la cage ne s'ouvrait pas, on est arrivé à peser 100 kilogrammes à 1^{mmg} près, c'est-à-dire avec une précision de *un cent-millionième*.

136. **Différentes méthodes de pesée.** — On peut effectuer la pesée d'un corps par trois méthodes :

La *simple pesée*, employée pour les mesures courantes ; la *double pesée* et la méthode *de transposition*, employées pour les mesures de précision.

1° *Simple pesée.* — Elle consiste tout simplement à mettre le corps dans l'un des plateaux et des poids marqués dans l'autre, jusqu'à ce que l'aiguille revienne au zéro. Soit X le corps à peser et P la somme des poids marqués, on a l'équation d'équilibre

$$Xl = Pl, \qquad \text{d'où} \qquad X = P.$$

Cette méthode suppose essentiellement que les bras du fléau soient rigoureusement égaux : hypothèse qui n'est jamais réalisée qu'approximativement ; aussi emploie-t-on de préférence l'une des deux méthodes suivantes, qui ne supposent pas cette condition remplie.

2° *Double pesée.* — Cette méthode s'appelle encore *méthode de Borda*, du nom du physicien qui l'a indiquée le premier. Elle consiste en deux pesées simples successives. On place le corps dont on veut connaître le poids dans l'un des plateaux, et on lui fait équilibre, dans l'autre, avec de la grenaille de plomb ou du sable : c'est ce qui s'appelle *faire la tare ;* puis on enlève du premier plateau le corps à peser, et on le remplace par des poids marqués jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse de nouveau. La somme de ces poids représente exactement le poids du corps ; car, dans ces deux opérations, le corps et les grammes agissent tour à tour sur le même bras de levier pour faire équilibre à la même résistance. On s'en rend compte plus nettement, en écrivant les équations qui expriment ces deux équilibres successifs. Soient l et l' les deux bras du fléau, T le poids de la tare, P la somme des poids marqués et X le poids du corps. On a successivement

$$[1] \qquad Xl = Tl',$$

$$[2] \qquad Pl = Tl'.$$

En divisant membre à membre, il vient

$$X = P.$$

1. Violle, *Physique*, t. Ier.

3° *Méthode de transposition.* — On pèse deux fois le corps par *simple pesée*, en le plaçant successivement dans chacun des plateaux.

Écrivons les deux équations d'équilibre ; soient X le point cherché, P′ le poids marqué mis dans l'autre plateau, l et l' les longueurs des bras de levier qui leur correspondent respectivement. La première équation d'équilibre est

$$[1] \qquad lX = l'P.$$

De même si l'on représente par P′ le nombre des grammes qui font équilibre au corps après l'avoir changé de plateau, on a

$$[2] \qquad l'X = lP'.$$

Multipliant membre à membre les égalités [1] et [2], et supprimant le facteur commun ll', on a

$$X^2 = PP', \qquad \text{d'où} \qquad X = \sqrt{PP'}.$$

Donc *le poids cherché est moyen proportionnel entre les poids* P *et* P′.

Remarque. — En divisant les deux équations membre à membre, on aurait

$$[3] \qquad \frac{l}{l'} = \frac{P}{P'}.$$

Cette égalité donne le rapport des longueurs des bras en fonction des deux poids, — ce qui permettrait de mesurer ce rapport.

Si $P = P'$, on a $l = l'$: de là un procédé pour vérifier l'une des conditions de justesse de la balance, en supposant que l'autre soit remplie.

LIVRE III

HYDROSTATIQUE

CHAPITRE PREMIER

CARACTÈRES GÉNÉRAUX DES LIQUIDES.

137. **Objet de l'hydrostatique.** — L'*hydrostatique* est la science qui a pour objet les conditions d'équilibre des liquides et les pressions qu'ils exercent, par suite de leur poids, soit dans l'intérieur de leur propre masse, soit sur les parois des vases qui les contiennent.

La science qui traite du mouvement des liquides se nomme *hydrodynamique*, et l'application de celle-ci à l'art de conduire et d'élever les eaux se désigne spécialement sous le nom d'*hydraulique*. On ne traitera ici que de l'hydrostatique.

Nous étudierons plus loin quelques phénomènes d'hydrodynamique, dus à la pression que l'air atmosphérique exerce sur tous les corps placés à la surface du globe.

138. **Caractères physiques des liquides.** — On a déjà vu (8) que les liquides sont des corps dont les molécules, par suite d'une très faible cohésion, cèdent au plus léger effort qui tend à les déplacer ; d'où il résulte que ces corps sont *fluides*, c'est-à-dire qu'ils n'affectent aucune forme stable, et qu'obéissant sans cesse à l'action de la pesanteur, ils prennent immédiatement la forme des vases dans lesquels on les verse. Leur fluidité n'est cependant pas parfaite : il existe toujours entre leurs molécules une adhérence qui produit une viscosité plus ou moins grande. Très faible dans certains liquides, comme l'éther, l'alcool, elle est très apparente dans l'acide sulfurique, les huiles grasses et les liqueurs fortement sucrées ou gommées.

La fluidité des liquides se retrouve, mais à un plus haut degré, dans les gaz. Ce qui distingue ces deux espèces de corps, c'est que les liquides ne sont doués que d'une compressibilité et d'une élasticité à peine sensibles, tandis que les fluides aériformes sont éminemment compressibles et élastiques.

La fluidité des liquides est démontrée par la facilité avec laquelle ces corps s'écoulent et prennent toutes sortes de formes; leur faible compressibilité se constate par l'expérience suivante.

139. **Compressibilité des liquides.** — D'après l'expérience de Bacon et des académiciens de Florence rapportée précédemment (17), on a regardé longtemps les liquides comme complètement incompressibles. Depuis, des recherches sur le même sujet ont été faites par plusieurs physiciens, et tous ont constaté que les liquides sont plus ou moins compressibles.

Piézomètres. — Les appareils destinés à mesurer la compressibilité des liquides ont reçu le nom de *piézomètres.* Nous allons décrire ici celui d'Œrstedt, avec les modifications qui y ont été faites par Despretz et Saigey.

Description du piézomètre d'Œrstedt. — Cet appareil se compose d'un cylindre de cristal à parois épaisses, d'un diamètre intérieur de 8 centimètre (fig. 143) qui est destiné à être complètement rempli d'eau. Il est fermé à sa base par un pied de cuivre, dans lequel il est solidement mastiqué; à sa partie supérieure, il s'ajuste dans une garniture cylindrique de cuivre, fermée par un plateau qui se dévisse à volonté. Ce plateau porte un entonnoir R, par où l'on introduira l'eau dans le cylindre, et une tubulure de cuivre où glisse un piston qui la ferme hermétiquement et qu'on manœuvre au moyen d'une vis de pression P. Dans l'intérieur de l'appareil est un réservoir de verre A, rempli du liquide à comprimer. Ce réservoir se termine, à sa partie supérieure, par un tube capillaire qui se recourbe et vient plonger dans un bain de mercure O. Ce tube a été divisé d'avance en n parties d'égale capacité, et l'on a déterminé le nombre N de ces partie contenues dans le réservoir A.

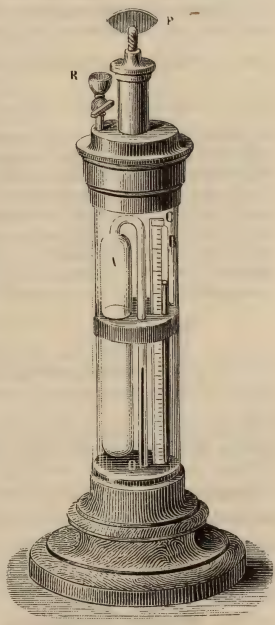


Fig. 143.

Graduation ou jaugeage du piézomètre. — Pour faire cette opération, qui est appelée *jaugeage*, on pèse les quantités de mercure contenues dans le réservoir A et dans les n divisions de la tige, à la même température. Soient p et P ces poids, v la capacité d'une division, Nv la capacité inconnue de A, et d le poids du centimètre cube du mercure à zéro. On a évidemment

$$P = Nvp \quad \text{et} \quad p = vnp, \quad \text{d'où} \quad \frac{N}{n} = \frac{P}{p}.$$

Manomètre. — A côté du réservoir A est disposé un appareil destiné à mesurer la pression, qui s'appelle *manomètre à air comprimé.* C'est un tube de verre B, plein d'air; le bout supérieur est fermé, et le bout inférieur, qui est ouvert, plonge dans le bain de mercure O. Lorsqu'on n'exerce aucune pression sur

l'eau qui remplit l'appareil, l'air occupe tout le volume du tube; mais lorsque, au moyen de la vis P et du piston, on comprime l'eau, la pression se transmet au mercure, qui s'élève dans le tube B en comprimant l'air qu'il contient. Une échelle graduée C indique la réduction de volume de l'air, et c'est d'après cette réduction de volume qu'on apprécie la pression exercée sur le liquide contenu dans le cylindre. Enfin, sur la plaque de cuivre qui porte le manomètre est fixé un thermomètre qui donne la température de l'eau. Ce thermomètre n'est pas représenté dans la figure.

Expérience. — On commence par remplir le réservoir A du liquide à comprimer; puis, par l'entonnoir R, on remplit d'eau le cylindre. On tourne alors la vis P de manière à faire descendre le piston : celui-ci exerce une pression sur l'eau et le mercure qui sont dans l'appareil, et, par l'effet de cette pression, le mercure s'élève à la fois dans le tube B et dans le tube capillaire soudé au réservoir A. Comme l'eau s'est échauffée par l'effet de la compression, on la laisse refroidir jusqu'à ce que le thermomètre soit revenu à la température initiale; observant alors à quelle hauteur le mercure s'élève dans le tube capillaire soudé au réservoir A, on en conclut que le liquide renfermé dans ce réservoir s'est contracté et l'on en mesure la contraction.

Coefficient de compressibilité. — Si l'on représente par n' le nombre de divisions dont le mercure s'est élevé dans le tube capillaire, et par F la pression en atmosphères marquée par le manomètre, $\frac{n'}{N+n}$ est la contraction pour l'unité de volume, et $\frac{n'}{(N+n)F}$ la contraction pour l'unité de volume et l'unité de pression : c'est ce qu'on appelle le *coefficient de compressibilité.*

Toutefois ce n'est là que la compressibilité *apparente.* En effet, Œrsted, dans ses expériences, avait supposé que la capacité du réservoir A demeurait invariable, ses parois étant également comprimées intérieurement et extérieurement par le liquide. Mais on démontre analytiquement que ce volume diminue par l'effet résultant des pressions extérieure et intérieure. En tenant compte de ce changement de capacité, Colladon et Sturm ont trouvé, pour une pression égale au poids de l'atmosphère, et à la température de zéro, les coefficients de compressibilité *absolue* suivants :

Mercure.	5	millionièmes.
Eau distillée non privée d'air.	49	—
Eau distillée privée d'air.	51	—
Éther sulfurique.	133	—

Ils ont de plus observé, pour l'eau et le mercure, que, dans de certaines limites, la diminution de volume est proportionnelle à la pression.

Remarque. — *Élasticité des liquides.* — Quelle que soit la compression à laquelle on ait soumis un liquide, l'expérience fait voir qu'aussitôt que l'excès de pression cesse, le liquide revient exactement à son volume primitif; d'où l'on conclut que *les liquides sont parfaitement élastiques.*

140. **Principe d'égalité de pression** ou **principe de Pascal.** — *Énoncé.* — En regardant les liquides comme parfaitement élastiques, doués d'une fluidité parfaite, et en les supposant soustraits à l'action de la pesanteur, on a été conduit au principe suivant, connu sous le nom de *principe d'égalité de pression :*

Si l'on exerce une pression quelconque à la surface d'un liquide en équilibre, cette pression se transmet intégralement dans tous les sens à toute portion plane de paroi égale à la surface pressée.

C'est là le principe fondamental de l'hydrostatique. On l'appelle aussi *principe de Pascal*, parce qu'il fut énoncé pour la première fois par Blaise Pascal, sous la forme suivante : *Si un vaisseau plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures dont l'une soit centuple de l'autre, en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront celui qui est cent fois plus large et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf.*

Ce deuxième énoncé conduit directement à l'interprétation pratique de l'énoncé précédent, lequel est plus général.

Interprétation. — Concevons un vase de forme quelconque, rempli d'eau ou de tout autre liquide que nous supposerons sans poids, et soient, sur les parois de ce vase, diverses tubulures cylyndriques A, B, C..., fermées par des pistons mobiles (fig. 144). Si sur le piston supérieur A on exerce, de dehors en dedans, une pression quelconque, de 20 kilogrammes par exemple, instantanément cette pression se transmet sur la face interne des pistons B, C, D..., qui tous sont poussés de dedans en dehors avec une force de 20 kilogrammes, et avec des forces de 40, 60 kilogrammes, si leurs surfaces sont deux ou trois fois plus grandes que celle du piston A. Par conséquent non seulement la pression se transmet également dans tous les sens, mais est *proportionnelle à la surface qui la reçoit.*

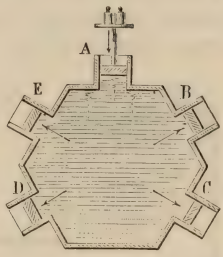


Fig. 144.

Vérification expérimentale. — Le principe d'égalité de pression doit être admis comme une conséquence de la constitution des liquides. Toutefois on peut, par l'expérience suivante, démontrer que la pression se transmet, en effet, dans tous les sens. Un tube dans lequel glisse un piston (fig. 145) est terminé par une sphère creuse sur laquelle sont placées de petites tubulures cylindriques perpendiculaires à ses parois. La sphère et le cylindre étant remplis d'eau, on pousse le piston, et le liquide jaillit par tous les orifices, et non pas seulement par celui qui est opposé au piston.

Quant à la proportionnalité des pressions aux surfaces, on peut la vérifier aussi d'une manière approchée (fig. 146). Deux cylindres verticaux d'inégal diamètre, réunis par une tubulure horizontale, sont remplis d'eau ; sur les surfaces du liquide reposent deux pis-

tons P et p, qui ferment hermétiquement les cylindres, mais qui peuvent glisser dans ceux-ci à frottement très doux. Supposons que la surface du grand piston soit égale, par exemple, à 30 fois celle du petit. Si l'on place sur celui-ci un poids de 2 kilogr., le grand piston, d'après le principe de Pascal, devra supporter une poussée de bas en haut égale à 60 kilogr. En effet, si l'on charge le grand piston de ce poids, l'équilibre persiste; mais pour une charge plus grande ou plus petite l'équilibre est rompu. La vérification ne peut être absolument rigoureuse, à cause des pressions supplémentaires exercées dans l'intérieur de la masse par le poids du liquide.

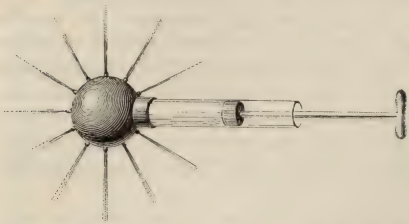


Fig. 145.

Conséquences. — Soient S et s les surfaces du grand et du petit piston, on peut poser

$$[1] \qquad \frac{P}{p} = \frac{S}{s}.$$

d'où

$$[2] \qquad \frac{P}{S} = \frac{p}{s}.$$

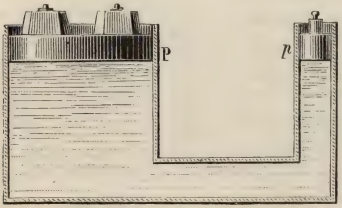


Fig. 146.

141. **Généralisation du principe de Pascal.** — 1° La première égalité, qui est une conséquence directe du principe de Pascal, permet d'en donner un nouvel énoncé : *Lorsqu'un liquide, soumis à la seule influence d'une pression extérieure, est en équilibre, il transmet à toute portion plane de paroi du vase qui le contient une pression proportionnelle à la surface de celle-ci.*

2° La deuxième égalité exprime encore le même fait sous une autre forme. Le quotient $\frac{P}{S}$ représente *la pression moyenne par unité de surface* sur la portion de paroi constituée par le grand piston; de même $\frac{p}{s}$ représente *la pression moyenne par unité de surface* sur le petit piston. Sur une autre portion plane quelconque

de paroi s', la pression totale serait, par exemple, p', *la pression moyenne par unité de surface* serait $\frac{p'}{s'}$, et l'on aurait encore $\frac{P}{S} = \frac{p'}{s'}$. Cela veut dire que, *dans un liquide en équilibre sous la seule influence de pressions extérieures, la pression moyenne par unité de surface est la même en tous les points de la paroi du vase qui le contient.*

3° Enfin, le principe s'applique, sous ces différentes formes, non seulement aux parois du vase qui contient un liquide parfait en équilibre, mais encore aux molécules mêmes de ce liquide. Ainsi une tranche plane MN, formée de molécules liquides, et prise en un point quelconque de la masse, subit une pression proportionnelle à sa surface, tout comme une portion égale de paroi.

Pour s'en rendre compte, il suffit d'imaginer une surface quelconque AB passant par la tranche MN et allant d'une paroi à l'autre (fig. 147). *Solidifions, par la pensée, toutes les molécules liquides rencontrées par cette surface*, c'est-à-dire supposons qu'il existe entre elles un système de forces attractives, se détruisant deux à deux, mais se maintenant à des distances invariables comme les molécules d'un corps solide. Nous n'avons rien changé ainsi aux pressions extérieures ni à l'état d'équilibre du liquide; mais tout se passe maintenant comme si la tranche MN était une portion plane de paroi interne. Elle subit donc une pression transmise qui est proportionnelle à sa surface, conformément au principe de Pascal. Il est évident que cette pression ne cessera pas de s'exercer quand nous aurons rendu, par la pensée, à cette cloison idéale son état réel de fluidité.

Fig. 147.

Il résulte de là que, *dans l'intérieur de la masse liquide comme sur les parois*, la pression est la même en tous les points sur l'unité de surface, ou proportionnelle en tous les points à l'étendue de la surface pressée.

142. **Pression en un point.** — Ce terme étant souvent employé en hydrostatique, il importe d'en préciser le sens. En réalité, il n'y a pas de pression en un point; une pression ne peut s'exercer que sur une portion de paroi plus ou moins petite, mais de grandeur appréciable et déterminée.

Nous avons défini plus haut la *pression en un point* dans le cas où la pression est uniforme. C'est le quotient $\frac{P}{S}$, S étant une portion plane de surface comprenant le point considéré, et P étant la pression totale. C'est donc *la pression par unité de surface autour du point considéré*. Posons $\frac{P}{S} = \varpi$: on en déduit $P = \varpi S$.

Généralisation de la notion de *pression en un point.* — 1° *Cas des pressions variables.* — Dans le cas où la pression ne s'exerce pas uniformément sur l'étendue de la surface S, le quotient $\frac{P}{S}$ représente *la pression moyenne par unité de surface autour du point.* On appelle alors *pression en un point* le quotient $\frac{p}{\omega}$, ω étant un élément de surface plane infiniment petit, pris autour du point, et p étant la pression totale sur cet élément [1]. On a, comme précédemment,

$$\frac{p}{\omega} = \varpi, \qquad \text{d'où} \qquad p = \varpi\omega;$$

p est la pression totale sur l'élément : on l'appelle *pression élémentaire;* p est un infiniment petit de même que ω, tandis que leur quotient, $\frac{p}{\omega}$, est une quantité finie et déterminée.

2° *Cas des parois courbes.* — La notion de pression en un point a été étendue aux parois courbes. Il suffit d'imaginer le plan tangent au point considéré de la surface courbe ; sur ce plan, on prend, autour du point, un élément ω qui supporte une pression élémentaire p. Le quotient $\frac{p}{\omega} = \varpi$ est la pression (par unité de surface) au point considéré.

3° *Cas de la masse liquide.* — Enfin, la même définition s'applique aussi à un point quelconque pris dans l'intérieur de la masse liquide. Il suffit, pour la généraliser, de répéter le raisonnement qui nous a servi plus haut pour généraliser le principe de Pascal.

143. **Direction des pressions.** — Toutes les pressions qui s'exercent, soit dans l'intérieur d'un liquide en équilibre, soit sur les parois du vase qui le contient, sont des forces *normales,* c'est-à-dire perpendiculaires aux surfaces pressées.

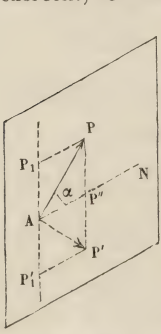


Fig. 148.

On peut considérer ce fait comme une conséquence de la fluidité parfaite des liquides et de leur symétrie absolue autour d'un point quelconque. En effet, si en un point A nous supposons une pression P inclinée d'un angle α sur la normale AN, il doit exister, par raison de symétrie, une autre pression P′, inclinée du même angle et en sens contraire. On peut (fig. 148) décomposer chacune de ces forces en deux composantes, l'une normale et l'autre dirigée dans le plan de la surface pressée. Les deux composantes AP et AP′ sont égales et opposées : elles se détruisent. Les composantes normales sont égales et de même sens : elles s'ajoutent pour exercer une

1. Rappelons ici que l'expression *infiniment petit* a un sens mathématique tout différent de celui d'*extrêmement petit.* Elle désigne une quantité aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire d'une petitesse indéfinie, ayant pour limite zéro.

pression normale au point où elles sont appliquées. Ce sont les seules forces qui produisent un effet utile ; ce sont les seules dont on ait à tenir compte dans l'étude des liquides en équilibre.

Remarque. — On pourrait aussi admettre ce fait directement, comme une nouvelle hypothèse sur la constitution des liquides. Cette hypothèse se vérifiera comme les autres, par les conséquences expérimentales qu'on en déduira.

144. **Presse hydraulique.** — 1° *Définition.* — Le principe d'égalité de pression a reçu à la fois une importante vérification expérimentale et une très utile application dans la *presse hydrau-*

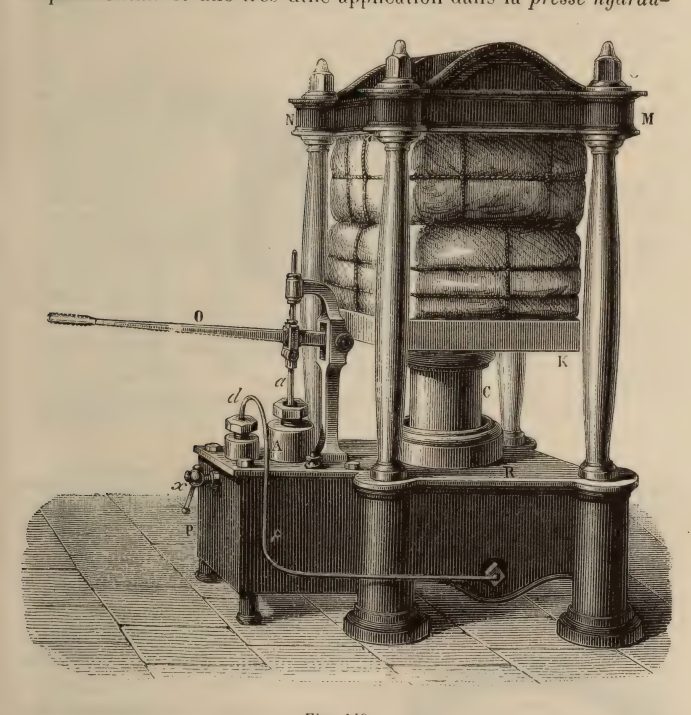


Fig. 149

lique. C'est un appareil qui sert à produire des pressions considérables à l'aide d'un effort relativement très faible. Il fut imaginé par Pascal, mais ne fut construit pour la première fois qu'en 1796, par l'ingénieur anglais Bramah.

2° *Description.* — L'appareil est fait tout en fonte. La figure 150 en donne une coupe verticale et la figure 149 une vue d'ensemble. Dans un corps de pompe B, à grand diamètre et à parois très résistantes, peut monter et descendre à frottement doux un cylindre C faisant l'office de piston. A celui-ci est fixé un plateau K, qui monte et descend avec lui entre quatre colonnes. Ces dernières supportent un plateau MN qui est fixe, et c'est entre ce plateau et le plateau K que sont placés les objets qu'on veut mettre en presse. Quant à l'ascension du piston C, elle s'obtient à l'aide d'une *pompe d'injection* A, qui aspire l'eau d'un réser-

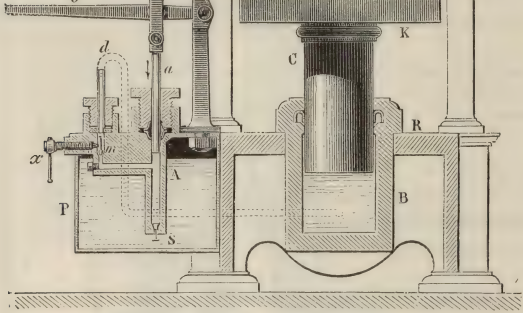


Fig. 150.

voir P, et la refoule dans le cylindre B. On fait marcher le piston *a* de cette pompe à l'aide d'un levier O. Lorsque le piston s'élève, la soupape S s'ouvre, et l'eau s'introduit dans le corps de pompe A; puis, quand il redescend, cette soupape se ferme, et une seconde soupape *m*, qui était fermée pendant l'ascension du piston, est soulevée actuellement par la pression de bas et haut qu'elle subit, et l'eau est refoulée par le tube *d* jusque dans le corps de pompe B.

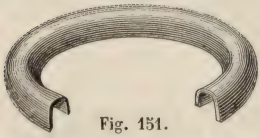


Fig. 151.

3° *Cuir embouti.* — On nomme ainsi un cuir épais, imbibé d'huile et imperméable à l'eau, lequel sert à fermer hermétiquement le corps de pompe B. Ce cuir, recourbé en forme d'U renversé (fig. 151), s'enroule circulairement dans une cavité pratiquée au haut de la

paroi du corps de pompe. Plus l'eau est comprimée dans celui-ci, plus elle applique fortement le cuir, d'un côté sur la paroi du corps de pompe, de l'autre sur le piston C : de cette manière, elle se ferme à elle-même le passage entre le piston et la paroi et toute fuite est prévenue.

4° *Fonctionnement.* — La pression qu'on peut obtenir au moyen de la presse hydraulique dépend du rapport de la section du piston C à celle du piston *a*. Si la première est 50 ou 100 fois plus grande que la seconde, la pression supportée de bas en haut par le grand piston sera 50 ou 100 fois celle exercée par le petit. De plus, on gagne encore de la force par l'intermédiaire du levier O. Si, par exemple, le bras de levier de la puissance égale 5 fois celui de la résistance, on quintuplera l'effort appliqué au petit piston. Par exemple, si l'on exerce sur le levier un effort de 30 kilogrammes, l'effet transmis par le piston *a* sera de 150 kilogrammes, et celui que transmettra le piston C, en supposant sa section égale à 100 fois celle du petit, sera de 15 000 kilogrammes.

Remarquons d'ailleurs que plus on gagne en force, plus la course du grand piston est lente par rapport à celle du petit: c'est-à-dire que *ce qu'on gagne en force on le perd en vitesse.* C'est là, en effet, un principe général de mécanique, dont l'application se retrouve dans toutes les machines.

5° *Usages.* — La presse hydraulique est utilisée dans tous les travaux qui nécessitent de grandes pressions, par exemple le foulage des draps, l'extraction du suc des betteraves et de l'huile des graines oléagineuses. Elle sert encore à éprouver les chaudières à vapeur et les chaînes destinées à la marine, etc.

145. **Presses de Desgoffe et de Cailletet.** — M. Desgoffe a apporté à la construction de la presse hydraulique deux perfectionnements qui permettent d'augmenter la pression dans de fortes proportions sans accroître les difficultés de l'opération. La figure 152 indique ce nouveau dispositif.

1° Un piston *p* permet de puiser l'eau dans une bache B et de la refouler sous le grand piston P. On produit ainsi des accroissements de pression notables, mais brusques, jusqu'au moment où la pompe foulante ne peut plus fonctionner.

2° Quand cette première limite de pression est atteinte, il est possible de la dépasser, au moyen d'un piston plongeur, qu'on peut introduire plus ou moins profondément dans le corps de pompe. On manœuvre ce piston de l'extérieur, à l'aide d'une grande roue R à manivelles. Au centre de cette roue est fixée une vis, qui pénètre, sans se déplacer, dans un écrou par lequel se termine le piston plongeur. En faisant tourner la roue, on fait avancer l'écrou et par suite le piston dans un sens ou dans l'autre. En le faisant pénétrer dans le corps de pompe par ce mouvement hélicoïdal, l'eau est refoulée de plus en plus et la pression augmente graduellement. Une vis *v* permet de faire écouler l'eau de manière à diminuer la pression et un tube *a* établit la communication avec un manomètre métallique, qui mesure la pression.

Les mêmes perfectionnements se trouvent dans l'appareil de M. Cailletet pour la liquéfaction des gaz réputés permanents.

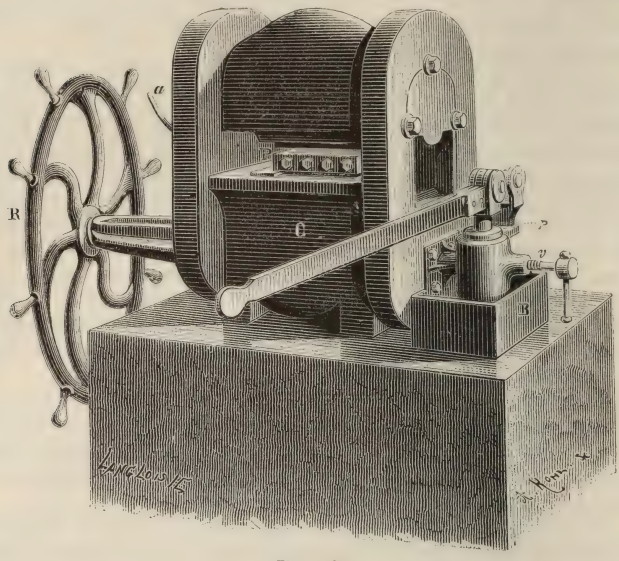


Fig. 152.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES PESANTS EN ÉQUILIBRE

PRESSIONS SUR LES PAROIS DES VASES. — PRESSIONS SUR LES CORPS IMMERGÉS. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES PESANTS.

146. **Existence des pressions dans les liquides pesants en équilibre.** — Les liquides, comme tous les autres corps, sont *pesants*, c'est-à-dire soumis à l'action de la pesanteur, à la surface de la terre. En hydrostatique, on appelle plus particulièrement *liquides pesants* les liquides que l'on considère comme n'étant soumis à d'autres forces extérieures que celles de la pe-

santeur. Dans un liquide pesant en équilibre, le poids seul des molécules suffit pour développer des pressions qui se transmettent et s'exercent dans tous les sens, soit dans l'intérieur de la masse, soit sur les parois du vase, et toujours normalement à la surface pressée. Il est facile de constater par l'expérience l'existence de ces pressions.

Pression verticale de haut en bas. — La pression verticale de haut en bas résulte directement du poids des molécules liquides accumulées. Pour la mettre en évidence, il suffit de verser un liquide quelconque dans un vase cylindrique en verre, fermé par un fond horizontal mobile, qui serait par exemple une soupape s'ouvrant de haut en bas. On verra la soupape céder à la pression, dès que la quantité de liquide versée sera suffisante. Nous montrerons plus loin comment on peut mesurer l'intensité de cette pression.

Poussée. — Expérience de l'obturateur. — La pression que les couches supérieures d'un liquide exercent sur les couches inférieures fait naître dans celles-ci une *réaction verticale de bas en haut*, qui est une conséquence du principe de Pascal. Cette pression constitue la *poussée des liquides*. Elle est très sensible lorsqu'on plonge la main dans un liquide, surtout s'il a une grande densité, comme le mercure. On peut la constater et la mesurer par l'*expérience de l'obturateur*. L'appareil se compose d'un tube large en verre A, ouvert à ses deux extrémités (fig. 153). Le bord inférieur est rodé horizontalement et l'on peut le fermer hermétiquement en y appliquant soit un disque de verre dépoli O, lequel constitue proprement l'*obturateur*, soit tout simplement une carte mince, de poids négligeable. On plonge l'appareil dans l'eau, en soutenant l'obturateur par un fil attaché en son milieu, et on lâche le fil dès que l'immersion est assez profonde. L'obturateur reste alors appliqué contre le tube, ce qui indique qu'il supporte, de bas en haut, une pression supérieure à son poids. On pourrait évaluer grossièrement cette pression, soit en versant lentement de l'eau sur l'obturateur, soit en le chargeant de poids marqués, jusqu'à le détacher du tube.

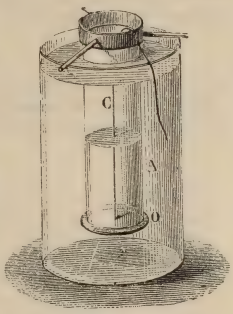


Fig. 153.

Pressions obliques. — On constaterait de même l'existence de pressions obliques ou verticales, en appliquant l'obturateur sur

des tubes dont le bord inférieur serait orienté et rodé suivant des directions quelconques.

147. **Théorème fondamental.** — La transmission de ces pressions dans les liquides pesants en équilibre se fait d'après la loi suivante :

La différence des pressions en deux points quelconques d'un liquide pesant en équilibre est égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance verticale de ces deux points.

Cette loi est le fondement de la théorie de l'équilibre des liquides pesants. On peut la considérer, soit comme un principe, analogue au principe de Pascal, c'est-à-dire l'admettre *à priori* et la vérifier dans ses conséquences, soit comme un théorème de mécanique et la démontrer par le raisonnement. Nous procéderons des deux manières successivement.

148. **Démonstration du théorème fondamental.** — Soient A et A′ les deux points, l leur distance et h leur distance verticale, ϖ et ϖ' les pressions (définies comme ci-dessus), et d le poids de l'unité de volume du liquide. Il s'agit de démontrer la relation

$$\varpi' - \varpi = hd,$$

laquelle exprime le théorème.

Prenons autour des points A et A′, dans des directions quelconques, des *tranches élémentaires* de liquide. Comme elles sont en équilibre, nous pouvons les solidifier par la pensée (fig. 154). Soit ω la surface de l'élément A. Imaginons un cylindre ayant pour base cet élément et ses génératrices parallèles à AA′ : il découpera une surface ω' dans l'élément A′. Nous avons ainsi un filet cylindrique infiniment petit, dont le volume est, comme on sait, égal à σl, σ étant la section droite et l la distance des centres de gravité des bases, laquelle peut être confondue avec la distance AA′.

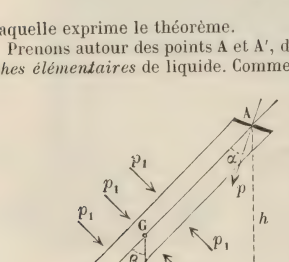


Fig. 154.

Ce filet liquide étant en équilibre, nous pouvons également le solidifier par la pensée. Tout se passe alors comme si c'était un corps solide en équilibre sous l'action d'un système quelconque de forces, constitué par son poids et par les pressions diverses qu'exerce à sa surface le liquide ambiant. Nous avons vu en mécanique que, dans le cas général, il y a six conditions d'équilibre. Une seule d'entre elles nous suffira ici, pour les besoins de la démonstration. Nous exprimerons que, si l'on projette toutes les forces du système sur une droite quelconque, par exemple sur l'axe AA′ du cylindre, *la somme algébrique de ces projections doit être nulle.*

Or ces forces sont :

1° Le poids P du filet, appliqué en son centre de gravité G, et faisant un

angle β avec l'axe de figure. Il est égal σld, ou à $\frac{\sigma hd}{\cos\beta}$, en remarquant que $l = \frac{h}{\cos\beta}$;

2° La pression élémentaire p, qui fait un angle α avec AA'; elle est égale à $\varpi\omega$, ou à $\frac{\varpi\sigma}{\cos\alpha}$, en remarquant que $\omega = \frac{\sigma}{\cos\alpha}$;

3° La pression élémentaire p', qui fait un angle α' avec AA'; elle est égale à $\varpi'\omega'$, ou à $\frac{\varpi'\sigma}{\cos(180^0 - \alpha')}$, car $\omega' = \frac{\sigma}{\cos(180^0 - \alpha')}$;

4° Les pressions latérales, $p_1 \ldots, p_n$, qui sont normales à la surface du cylindre, et par conséquent perpendiculaires à l'axe.

Pour obtenir les projections de toutes ces forces, il suffit de multiplier chacune d'elles par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la direction AA'.

On a ainsi l'équation d'équilibre

$$P\cos\beta + p\cos\alpha + p'\cos\alpha' = 0.$$

Les angles β et α étant aigus, l'angle α' est obtus; son cosinus est donc négatif. Mettons ce signe en évidence, en remplaçant $\cos\alpha'$ par le cosinus du supplément. On a

$$\cos\alpha' = -\cos(180^0 - \alpha')$$

et l'équation devient, en faisant passer les deux derniers termes dans le second membre,

$$p'\cos(180^0 - \alpha') - p\cos\alpha = P\cos\beta.$$

En remplaçant p', p et P par leurs valeurs, données ci-dessus, et en supprimant les facteurs communs, il vient

$$\varpi' - \varpi = hd. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. — I. On voit que les directions des pressions élémentaires n'interviennent dans le raisonnement que d'une manière transitoire et qu'elles disparaissent dans le résultat final. C'est ce que l'on exprime en disant que, *dans un liquide pesant en équilibre, la pression élémentaire est la même dans toutes les directions autour d'un point*, ou bien qu'*elle est indépendante de l'orientation de l'élément.*

II. Les pressions exercées par les liquides pesants et leurs conditions d'équilibre peuvent se déduire, dans tous les cas, du théorème fondamental, comme des corollaires.

149. **Conditions d'équilibre d'un liquide pesant.** — Citons, par exemple, les conditions d'équilibre d'un liquide pesant.

Il y en a deux, l'une tout à fait générale et l'autre particulière au cas où le liquide a une surface libre. (On appelle *surface libre* d'un liquide sa surface terminale dans l'air ou dans le vide.)

1° *La pression doit être la même en tous les points d'un même plan horizontal, pris à un niveau quelconque dans le liquide.*

2° *La surface libre du liquide doit être plane et horizontale.*

En effet, soient p et p' les pressions en deux points quelconques pris sur un même plan horizontal. On a entre p et p' la relation $p' = p + zd$; et puisque $z = 0$, $p' = p$.

Réciproquement, si les pressions p et p' sont égales en deux points quelconques d'une surface, prise dans un liquide pesant, la relation générale, qui peut s'écrire $zd = p' - p$, se réduit à $zd = 0$. Comme d n'est pas nul, on en conclut que $z = 0$; donc les points sont sur un même plan horizontal.

Or la surface terminale, dans l'air ou dans le vide, c'est-à-dire la surface libre, supporte en tous ses points la même pression; donc elle forme un plan horizontal.

La plupart de ces conséquences sont susceptibles d'une démonstration expérimentale directe. Leur ensemble constituera donc une rigoureuse vérification *à posteriori* du théorème fondamental.

PRESSIONS SUR LES PAROIS DES VASES.

150. **Pressions sur le fond plan et horizontal d'un vase.** — THÉORÈME. — *Dans un liquide pesant en équilibre, les pressions sur le fond plan et horizontal du vase ont une résultante unique, verticale et dirigée de haut en bas, égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base le fond et pour hauteur sa distance à la surface libre. Elle est appliquée au centre de gravité de la surface du fond.*

La proposition n'est rigoureusement vraie que dans le cas du vide. Dans le cas ordinaire, où le liquide se trouve dans l'air ou dans un gaz, sa surface libre supporte une pression, que nous apprendrons à mesurer plus tard. Il faut alors ajouter au poids du cylindre liquide la pression exercée par le gaz sur une portion de la surface libre égale au fond du vase.

Démonstration. — Soit AB le fond plan et horizontal; soit MN la surface libre : nous avons vu qu'elle est nécessairement plane et horizontale. Sur chacun des éléments de surface, tels que σ, s'exerce une pression élémentaire p. Toutes ces pressions, étant verticales, ont une résultante égale à leur somme et appliquée au centre des forces parallèles de AB (fig. 155). On a donc

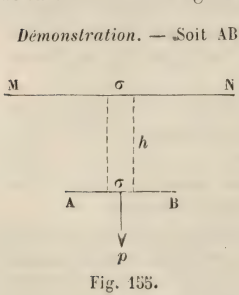


Fig. 155.

$$P = \Sigma (p).$$

Or, en un point de l'élément, la pression ϖ est

$$\varpi = \varpi' + hd,$$

ϖ' étant la pression que l'atmosphère exerce en un point de la surface libre et h la distance de ce niveau au fond. On a donc

$$p = \varpi'\sigma + \sigma hd$$

et

$$P = \sum \varpi'\sigma + \sum hd\sigma.$$

Comme ϖ' est constant, ainsi que h et d, on peut écrire

$$P = \varpi' \sum \sigma + hd \sum \sigma;$$

$\sum (\sigma)$ est égal à la surface S du fond. On a donc enfin

$$P = S\varpi' + Shd.$$

Le terme $S\varpi'$ représente la pression de l'atmosphère sur une surface égale à celle du fond. *Comme cette pression s'exerce également dans tous les sens sur les parois extérieures du vase, nous la négligerons ici, ainsi que dans les théorèmes suivants.* Il reste donc

$$P = Shd. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

151. **Vérification expérimentale.** — De là il résulte que la pression sur le fond d'un vase dépend de la grandeur de ce fond, ainsi que de la profondeur et de la densité du liquide, mais qu'elle est *indépendante de la quantité de liquide et de la forme du vase.* C'est cette conséquence qu'on vérifie expérimentalement à l'aide de plusieurs appareils; nous en décrirons deux, également en usage dans les cours de physique : celui de Haldat et celui de Pascal, modifié par Masson.

1° *Appareil de Haldat.* — Cet appareil se compose d'un tube coudé ABC, terminé en A par un robinet de cuivre sur lequel on peut visser successivement deux vases M et P, de même hauteur, mais de forme et de capacité différentes (fig. 156). Pour faire l'expérience, on commence par verser du mercure dans le tube ABC, de manière que le niveau n'atteigne pas tout à fait le robinet A. On visse alors sur le tube le vase M, qu'on remplit d'eau; celle-ci, par son poids, refoule le mercure qui s'élève dans le tube C, où l'on en repère le niveau au moyen d'une virole *a*, qui peut glisser le long du tube. On marque de même le niveau de l'eau dans le vase M à l'aide d'une tige mobile *o* placée au-dessus. Cela fait, on vide le vase M au moyen du robinet, on le dévisse et on le remplace par le vase P. Si l'on verse de l'eau dans celui-ci, le mercure, qui avait repris son premier niveau dans les deux branches du tube ABC, s'élève de nouveau dans le tube C, et lorsque, dans le vase P, l'eau atteint la hauteur qu'elle avait dans le vase M, ce qu'on reconnaît au moyen de la tige *o*, le mercure reprend dans le tube C le même niveau que dans le premier cas : ce qu'indique la virole *a*. On conclut de là que, dans les deux cas, la pression transmise au mercure dans la direction ABC est la même. Cette pression est donc indépendante de la forme du vase et de la

quantité de liquide. Quant au fond du vase, il était évidemment le même dans les deux cas : c'était la surface libre du mercure dans l'intérieur du tube A.

2° *Appareil de Masson.* — Dans l'appareil de Masson (fig. 157), la pression de l'eau contenue dans le vase M ne s'exerce plus, comme précédemment, sur une colonne de mercure, mais sur un disque ou obturateur *a*, qui ferme une tubulure *c*, sur laquelle est

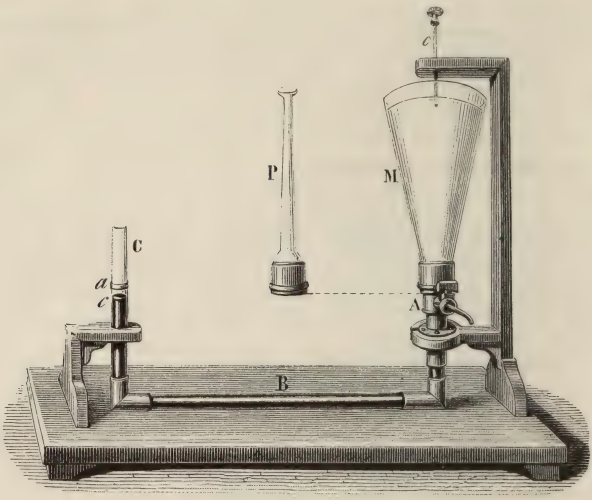


Fig. 156.

vissé le vase M. Ce disque n'est pas fixé à la tubulure, mais seulement soutenu par un fil attaché à l'extrémité du fléau d'une balance. A l'autre extrémité est un bassin dans lequel on met des poids jusqu'à ce qu'ils fassent équilibre à la pression exercée par l'eau sur l'obturateur. Vidant alors le vase M, on le dévisse et l'on met à sa place le tube étroit P. Or, si l'on remplit celui-ci d'eau jusqu'à la même hauteur que précédemment, ce qu'on reconnaît au moyen du repère *o*, on observe que, pour soutenir l'obturateur, il faut mettre dans le plateau juste le même poids qu'auparavant. Cela conduit à la même conclusion que l'expérience de Haldat. Même résultat si, au lieu du tube vertical P, on visse sur la tubulure *c* le tube oblique Q.

152. **Conséquences.** — 1° *Tonneau de Pascal.* — Il résulte des deux expériences précédentes qu'avec une très petite quantité de liquide on peut produire des pressions considérables. Pour cela, il suffit de fixer à la paroi d'un vase fermé et plein d'eau un tube d'un petit diamètre et d'une grande hauteur. Ce tube étant rempli d'eau, la pression transmise sur la paroi du vase est égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base cette paroi et une hauteur égale à celle du tube. Pascal est parvenu ainsi, avec un simple filet d'eau de 10 mètres de hauteur, à faire éclater un tonneau solidement

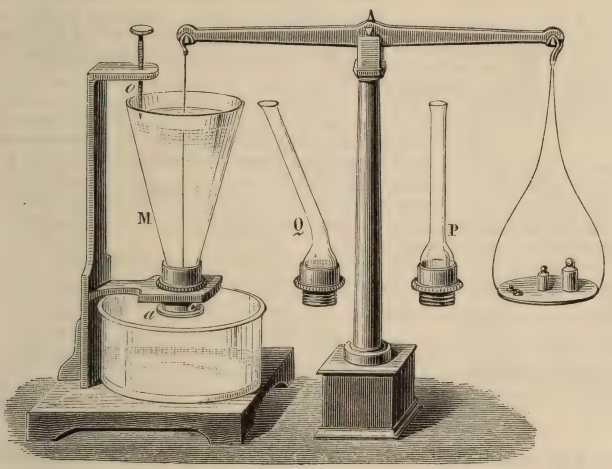


Fig. 157.

construit. Cette expérience s'appelle quelquefois expérience du *tonneau de Pascal.*

2° *Pression au fond des mers.* — D'après le principe ci-dessus, on peut calculer les pressions qui se produisent au fond des mers. L'unité de mesure usitée est la pression de l'atmosphère, laquelle équivaut, pour une surface donnée, au poids d'un cylindre d'eau pure ayant pour base cette surface et environ $10^m,55$ de hauteur. Or les naturalistes qui ont récemment exploré le fond des mers, à bord du *Talisman*, puis du *Travailleur*, ont observé que la sonde ne touchait pas quelquefois à une profondeur de 8000 mètres et plus. C'est donc une pression de plus de 800 fois celle de l'atmosphère qui s'exerce au fond de certaines mers.

153. **Pressions sur une paroi plane latérale.** — Théorème. — *Dans un liquide pesant en équilibre, les pressions exercées sur une portion plane de paroi latérale ont une résultante qui est normale à la paroi et égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base la portion de paroi et pour hauteur la distance de son centre*

de gravité à la surface libre. Elle est appliquée en un point qu'on appelle centre de pression.

Démonstration. — Menons un plan vertical perpendiculaire à la paroi, prenons-le pour plan de la figure. Soient MN, AB les sections de la surface libre et de la portion plane de paroi (fig. 158). Sur chacun des éléments de surface, tels que ω, s'exerce une pression élémentaire p qui lui est normale. Toutes ces forces, étant parallèles, ont une résultante unique, qui leur est parallèle, égale à la somme, et appliquée au centre de ce système de forces parallèles. On a donc

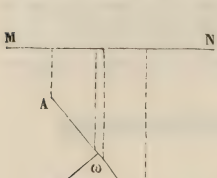


Fig. 158.

$$P = \Sigma (p).$$

Or, en un point de l'élément, la pression ϖ est donnée par l'équation fondamentale

$$\varpi = \varpi' + hd,$$

ϖ' étant la pression exercée en un point quelconque de la surface libre En négligeant cette dernière pression, on a

$$\varpi = hd \qquad \text{et} \qquad p = \omega hd;$$

donc

$$P = \Sigma (\omega hd).$$

Comme d est constant, on peut le faire sortir du signe Σ et écrire

$$P = d \Sigma (\omega h).$$

On peut déduire du *théorème général des moments* un moyen très simple de calculer la somme des produits tels que ωh. En effet, remarquons d'abord que si l'on multiplie chacun de ses termes par δ, poids spécifique de l'unité de surface de la paroi, toute la somme sera elle-même multipliée par δ, et l'on aura

$$\Sigma (\omega h \delta) = \delta \Sigma (\omega h).$$

Or $\omega\delta$ est le *poids* de l'élément de paroi ω, et h étant la distance de son point d'application (lequel est un point quelconque de l'élément) au plan de la surface libre, le produit $\omega h\delta$ s'appelle le *moment de la force* ωd par rapport *au plan* MN. La somme $\Sigma (\omega h\delta)$ est donc la somme des moments des poids des divers éléments de la portion de paroi. D'après le théorème des moments (qui s'applique aux moments par rapport à un plan aussi bien qu'aux autres moments), cette somme est égale au moment de la résultante, c'est-à-dire au moment du poids total de la portion de paroi. Soit S la surface totale de cette portion, son poids est $S\delta$; soit H la distance du centre de gravité à la surface libre, le moment du poids total est $SH\delta$. On a donc

$$\Sigma (\omega h\delta) = SH\delta \qquad \text{ou} \qquad \delta \Sigma (\omega h) = SH\delta.$$

En divisant les deux membres par δ, il vient

$$\Sigma (\omega h) = SH.$$

En portant cette valeur dans l'équation de la pression totale, on a

$$P = SHd. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

154. **Centre de pression.** — C'est *le point d'application de la pression totale sur la portion de paroi considérée.* Il est nécessairement distinct du *centre de gravité* de cette paroi, lequel est le point d'application du poids total de sa surface, supposée pesante.

En effet, les pressions élémentaires d'une part, et les poids élémentaires d'autre part, forment deux systèmes de forces parallèles, appliquées, il est vrai, aux mêmes éléments de surface, mais dont les intensités n'ont entre elles aucun rapport de grandeur. Les poids (qu'on suppose appliqués aux éléments d'une surface, afin d'en déterminer le centre de gravité) sont simplement proportionnels à ces éléments, tandis que les pressions sont proportionnelles aux produits de chaque élément par sa distance à la surface libre.

A mesure qu'on s'enfonce dans le liquide, le poids de l'élément de paroi reste constant, tandis que la pression élémentaire augmente proportionnellement à h. Il en résulte que le centre de pression *doit se trouver au-dessous* du centre de gravité.

La détermination du centre de pression est un problème de mécanique, analogue à la détermination du centre de gravité d'une surface. La méthode générale de calcul consiste à appliquer le théorème des moments, ainsi que nous l'avons fait plus haut (153). Dans certains cas, on peut résoudre le problème géométriquement, en le ramenant à la détermination du centre de gravité d'un volume facile à construire.

1er Exemple. — *Rectangle à fleur d'eau.* — Prenons une portion de paroi plane qui soit un rectangle ABCD, ayant l'un de ses côtés AB à fleur d'eau (fig. 159)

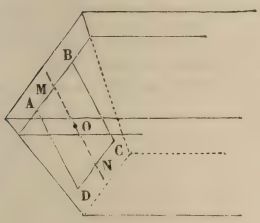


Fig 159.

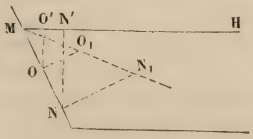


Fig. 160.

En chaque point, tel que O, s'exerce une pression élémentaire p, normale à la paroi. La pression totale P est la somme de ces pressions : $P = \sum (p)$. Nous allons construire un volume qui représentera P en grandeur et en direction.

Soit HMN une coupe verticale du liquide et du vase, passant par le diamètre MN du rectangle (fig. 160). La pression élémentaire p est dirigée suivant $O_1 O$, elle est égale au poids d'un filet cylindrique ayant pour base un élément ω;

pris autour du point O, et pour hauteur la normale $OO_1 = OO'$, distance de l'élément ω à la surface libre.

Le lieu des points O_1, c'est-à-dire le lieu des sommets des filets cylindriques correspondant à la ligne MN, *est la droite* MN_1. Pour le prouver, il suffira d'établir qu'en un point quelconque, tel que N, on a $NN' = NN_1$. Or les triangles semblables MOO_1 et MNN_1 donnent $\frac{NN_1}{OO_1} = \frac{MN}{MO}$ et les triangles semblables MOO' et MNN' donnent $\frac{NN'}{OO'} = \frac{MN}{MO}$, d'où l'on déduit $\frac{NN_1}{OO_1} = \frac{NN'}{OO'}$; comme $OO_1 = OO'$, il s'ensuit que $NN_1 = NN'$. *Le lieu des mêmes sommets* O_1, pour toute la surface du rectangle, *sera*, pour la même raison, *le plan passant par* O_1 *et par la trace* AB *de la surface libre du liquide sur la paroi* (fig 161).

L'ensemble des filets cylindriques élevés sur chaque élément du rectangle sera donc limité par ce plan O_1AB, et puis par des plans normaux à la paroi, élevés suivant AD, DC et CB. On voit, en faisant la figure, que ces quatre plans constituent un prisme triangulaire N_1ABCD (fig. 161). Le poids total du liquide contenu dans ce prisme représente, *en grandeur*, l'intensité de la pression totale. Or, si l'on suppose que les poids des filets élémentaires, au lieu d'être verticaux, soient normaux à la paroi, on ne changera pas la position du centre de ces forces parallèles, lequel est le centre de gravité du prisme. Donc la pression totale P (qui est la résultante de ces forces normales) passe par ce centre de gravité. Comme elle est, en outre, normale à la paroi, le point où elle coupe celle-ci est le centre de pression. *Le centre de la pression sera donc la projection sur le rectangle du centre de gravité du prisme.*

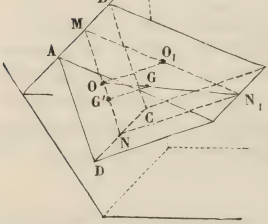


Fig. 161.

Or le centre de gravité G du prisme coïncide avec celui du triangle MNN_1, lequel est un plan de symétrie. Il est donc en G sur la médiane N_1O, au tiers à partir du point O La projection G' du point G sur la paroi est le centre de pression cherché. On voit qu'il est situé sur le diamètre MN du rectangle, et au-dessous du centre O qui en est le centre de gravité. *Il est facile d'évaluer la distance* OG'.

Distance G'O. — Les deux triangles semblables OGG' et ON_1N donnent

$$\frac{OG'}{ON} = \frac{OG}{ON_1} = \frac{1}{3};$$

donc

$$OG' = \frac{1}{3} ON.$$

Comme

$$ON = \frac{1}{2} MN,$$

on a

$$OG' = \frac{1}{6} MN.$$

Enfin

$$MG' = MO + OG' = \frac{1}{2} MN + \frac{1}{6} MN = \frac{2}{3} MN.$$

2e Exemple. — *Rectangle immergé.* — Que devient le centre de pression G′, si le rectangle ABCD, au lieu d'être à fleur d'eau, se trouve à une certaine profondeur dans le liquide, tout en restant orienté de la même manière, c'est-à-dire parallèlement à la surface libre?

Nous résoudrons la question très simplement, en remarquant que la construction précédente est une construction plane, qui s'effectue tout entière dans le plan de symétrie MNN_1, et qu'il doit en être de même toutes les fois que la portion de paroi considérée a pour axe de symétrie une ligne de plus grande pente, et pour plan de symétrie le plan vertical mené par cet axe.

Soit H′HN la section du vase et du liquide par le plan vertical de symétrie du rectangle ABCD (fig. 162). Répétons la construction ci-dessus. Le volume liquide, dont le poids représente la pression, est un tronc de prisme qui a pour section méridienne le trapèze MM_1N_1N. On peut le partager en deux volumes, au moyen d'un plan M_1K, parallèle à la paroi. L'un de ces volumes est un parallélépipède rectangle qui a pour section M_1MNK et son centre de gravité en G_2, milieu de OO′. L'autre partie est un prisme triangulaire, identique à celui du cas précédent : il a son centre de gravité en G_1, au tiers de la médiane N_1O'. Le poids du volume total étant la résultante des poids de ces deux volumes partiels, le centre de gravité du volume total est situé sur la ligne G_2G_1, entre les deux points G_1 et G_2. Donc la projection de ce point sur la paroi, c'est-à-dire *le nouveau centre de pression*, sera située entre le point O, centre de gravité du rectangle, et le point *g*, qui est l'ancienne position du centre de pression.

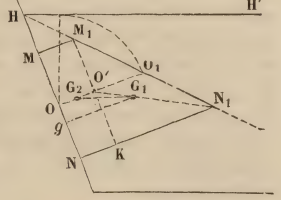


Fig. 162.

Donc, *lorsque la portion de paroi s'enfonce dans le liquide, son centre de pression remonte vers son centre de gravité, tout en restant au-dessous de ce point.*

Généralisation de la solution. — Le même raisonnement et la même construction s'appliquent au cas où la portion plane de paroi latérale a une forme quelconque. La pression totale est alors représentée en grandeur *par le poids d'un cylindre du liquide, circonscrit normalement à la portion de paroi, et tronqué par le plan défini ci-dessus.* Le centre de gravité de ce cylindre tronqué est un point de la direction de la pression totale. La projection de ce point sur la paroi plane est le centre de pression.

La facilité de construction dépendra de la forme de la portion de paroi. Nous avons étudié le cas simple d'une paroi rectangulaire dont l'un des bords est à fleur d'eau; nous avons vu que le centre de pression est sur le diamètre vertical, aux deux tiers de la longueur à partir de la surface libre. On peut citer d'autres cas. Sur une *paroi triangulaire dont la base est horizontale et à fleur d'eau*, le centre de pression est *au milieu de la ligne qui joint le sommet du triangle avec le sommet de cette base.* Si la paroi triangulaire a *son sommet à fleur d'eau et sa base hori-*

zontale, le centre de pression se trouve *sur la ligne qui joint le milieu de cette base au sommet et aux trois quarts à partir de ce point.*

155. **Pressions sur l'ensemble des parois d'un vase.** — Théorème. — *Dans un liquide pesant en équilibre, toutes les pressions exercées sur l'ensemble des parois du vase qui le contient, quelle que soit sa forme, ont une résultante unique, dirigée de haut en bas, et égale au poids total du liquide.*

Ce théorème, comme les précédents, est un corollaire du théorème fondamental. Il n'est pas évident *à priori*. En effet, si l'on considère simplement une portion courbe de paroi, les pressions normales que le liquide y exerce constituent un système de forces quelconques. Or on sait qu'un pareil système n'a pas, en général, de résultante unique. Mais cette résultante existe lorsque, au lieu de considérer les pressions exercées sur une portion de paroi, on prend toutes les pressions qui s'exercent sur l'ensemble des parois. Tel est l'objet du théorème.

On peut le démontrer de deux manières, synthétiquement et analytiquement.

Démonstration synthétique. — Soit un liquide pesant en équilibre dans un vase qui le contient. Le liquide et l'ensemble des parois du vase constituent un système matériel en équilibre sous l'influence de deux systèmes de forces opposées : d'une part, les poids des molécules liquides, qui ont une résultante unique égale au poids total du liquide; d'autre part, les résistances ou réactions, f, f', f'', que les éléments de paroi opposent aux éléments liquides juxtaposés. Ce dernier système, faisant équilibre au premier, a nécessairement une résultante unique, égale et opposée au poids total du liquide. Or ces réactions élémentaires des parois sont égales et opposées, chacune à chacune, aux pressions élémentaires p, p', p'' du liquide sur la paroi : donc ce dernier système a aussi une résultante unique précisément égale au poids total des liquides et dirigée dans le même sens.

Démonstration analytique. — Elle consiste à considérer les pressions élémentaires p', p'... du liquide sur les parois comme un système de forces quelconques appliquées à un corps solide, et à en chercher la résultante par la méthode générale.

On décomposera chacune des pressions en trois composantes, suivant trois directions rectangulaires quelconques. On substituera ainsi au système primitif trois systèmes de forces parallèles. Chacun de ces systèmes ayant une résultante unique, le système primitif se trouvera finalement réduit à trois forces quelconques, et il sera alors facile de voir si ces trois forces ont ou n'ont pas une résultante unique.

Soit un vase de forme quelconque (fig. 165), HH′ la surface libre du liquide, Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques. Soit un élément ω pris autour d'un point M de la paroi. Soient p la pression au point M et α, β, γ les angles qu'elle fait avec les trois axes. En appliquant la règle du parallélépipède des forces, on décompose p en trois composantes, qui ont pour intensités respectives $p \cos \alpha$, $p \cos \beta$ et $p \cos \gamma$ (fig. 164). En effectuant la décomposition sur chacune des forces p, on a trois systèmes de forces respectives

ment parallèles à chacun des axes coordonnés. Chacun d'eux a une résultante égale à la somme. Ces trois résultantes partielles sont :

$$X = \Sigma\,(p \cos \alpha), \qquad Y = \Sigma\,(p \cos \beta), \qquad Z = \Sigma\,(p \cos \gamma).$$

Analysons les termes qui constituent chacune de ces sommes.

Concevons un filet cylindrique parallèle à Ox et circonscrit à l'élément ω (fig. 163) : il découpera dans la partie opposée de la paroi un élément ω'. Soient p' la pression sur ce dernier élément et α', β', γ les angles que fait sa direction

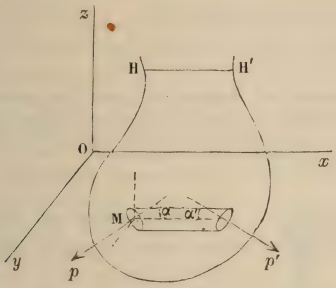


Fig. 163.

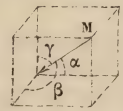


Fig. 164.

avec les axes. A chaque élément ω de la paroi correspond de même un élément ω' *et rien qu'un*. Les composantes de la pression p' sont $p' \cos \alpha'$, $p' \cos \beta$, $p' \cos \gamma$. On peut donc grouper tous les termes de la somme $\Sigma\,(p \cos \alpha)$ par couples de deux, correspondant à un même filet parallèle à Ox, et écrire

$$X = \Sigma\,(p \cos \alpha + p' \cos \alpha').$$

Évaluons ces binômes.

Soit ϖ la pression au point M; elle est également ϖ au point M', puisque ces deux points sont sur un même plan horizontal. On a donc

$$p = \pi\omega \qquad \text{et} \qquad p' = \pi\omega'.$$

Si nous menons deux plans perpendiculaires à l'axe en PQ et en P'Q', nous avons deux sections droites du cylindre qui sont égales (fig. 165). Soit σ la grandeur de la section droite. PQ étant la projection de ω, on a

$$\text{PQ ou } \sigma = \omega \cos (180^0 - \alpha) = -\omega \cos \alpha.$$

On a de même

$$\text{P'Q' ou } \sigma = \omega' \cos \alpha'.$$

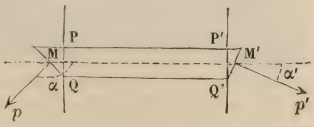


Fig. 165.

On a donc

$$\sigma = \omega' \cos \alpha' = -\omega \cos \alpha.$$

Substituons ces valeurs dans la somme X, il vient, toutes réductions faites,

$$X = \Sigma\,(\pi\sigma - \pi\sigma) = 0.$$

On démontrera de la même manière que Y est identiquement nul.

On peut appliquer le même mode de raisonnement à l'évaluation de la somme Z. On arrivera à une somme de binômes tels que

$$p \cos \gamma + p' \cos \gamma'.$$

Mais ici, les points M et M' n'étant plus sur le même plan horizontal, on aura

$$\pi' = \pi + zd_1,$$

par conséquent

$$p' = \pi'\omega' = \pi\omega' + \omega' zd$$

et

$$Z = \sum \pi' (\omega \cos \gamma - \omega' \cos \gamma') + \sum \omega zd \cos \gamma.$$

Le premier terme est identiquement nul, comme les termes analogues des autres sommes. Le deuxième représente la somme des poids des filets cylindriques verticaux, dans lesquels on peut décomposer le volume total du liquide : *cette somme est évidemment égale au poids total du liquide.*

C. Q. F. D.

156. **Paradoxe hydrostatique.** — Ce dernier théorème réfute directement la proposition erronée connue sous le nom de *paradoxe hydrostatique.*

Un paradoxe est une proposition contraire à l'opinion commune. Or, si l'on a trois vases, A, B, C (fig. 166), de même fond, mais de formes et de capacités différentes, remplis d'eau jusqu'à la même hauteur, l'opinion commune — conforme d'ailleurs à la

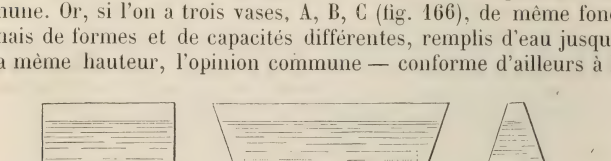


Fig. 166.

vérité — c'est qu'il faudra des poids différents pour les équilibrer successivement sur un même plateau de balance. Mais on sait que la pression est la même sur le fond de chacun de ces vases, et qu'elle est égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base le fond commun et pour hauteur la hauteur commune du liquide au-dessus du fond. Il semble donc en résulter nécessairement qu'en plaçant dans l'un des plateaux un poids marqué, égal à cette pression, on équilibrera successivement les trois vases placés dans l'autre plateau. C'est cette conséquence fausse d'un principe vrai qui constitue le paradoxe.

L'erreur consiste à raisonner, dans ce cas, comme si le fond de chaque vase était détaché et indépendant des parois latérales, ainsi que cela a lieu dans l'expérience de Masson. Les parois, étant solidaires, transmettent au plateau, non pas seulement la résultante partielle des pressions exercées sur le fond, mais la résultante totale des pressions exercées sur l'ensemble : or nous avons vu que *cette résultante est égale, dans tous les cas, au poids total du liquide.*

Dans le cas du vase cylindrique A, la pression sur le fond est précisément égale au poids total du liquide; dans le vase évasé B, la pression sur le fond est inférieure au poids total, mais les pressions latérales tendent à l'accroître; enfin, dans le vase conique C, la pression sur le fond est supérieure au poids total, mais les pressions latérales tendent à la diminuer.

157. **Vases à réaction.** — *Tourniquet hydraulique.* — Du même théorème nous allons déduire une explication très nette du fait suivant : Lorsqu'on ouvre un orifice dans la paroi d'un vase qui contient un liquide pesant en équilibre, en même temps que ce liquide s'échappe du vase, celui-ci tend à se mouvoir *en sens contraire de l'écoulement.* Si le vase est disposé de manière à obéir aisément à cette impulsion, on a ce qu'on appelle un *vase à réaction.* Le type de ces appareils est le *tourniquet hydraulique.*

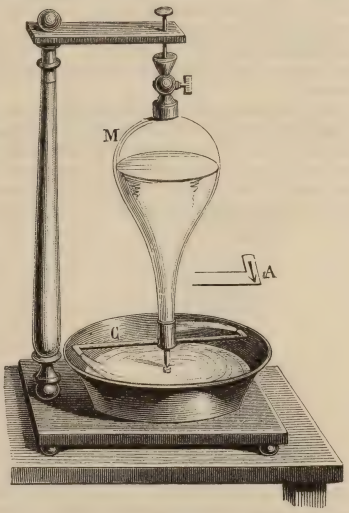


Fig. 167.

Il se compose d'un vase de verre M (fig. 167), reposant sur un pivot, de manière à pouvoir tourner librement autour d'un axe vertical. Ce vase porte, à sa partie inférieure, perpendiculairement à son axe, un tube de cuivre C, coudé horizontalement et en sens contraires à ses deux extrémités. L'appareil étant rempli d'eau, il reste parfaitement immobile aussi longtemps que les orifices du tube coudé restent bouchés. Mais dès que ceux-ci sont ouverts, le liquide s'échappe

dans le sens des courbures et tout l'appareil prend un mouvement de rotation en sens contraire de l'écoulement. Ce mouvement est d'autant plus rapide que la hauteur du liquide dans le vase M est plus grande et que la section des orifices de sortie présente plus de surface.

Pendule hydraulique. — On peut encore citer, comme expérience de cours, le *pendule hydraulique.* C'est un petit appareil formé d'une sphère à tubulure latérale remplie d'eau et fixée, comme un pendule, à l'extrémité d'un fil. Dès qu'on débouche l'orifice, le liquide s'échappe, et le pendule, s'écartant de la verticale en sens contraire de l'écoulement, se met à osciller. On emploie aussi un chariot très mobile.

Roues à réaction. — Les pressions latérales sont utilisées dans les moteurs hydrauliques connus sous le nom de *roues à réaction.*

Théorie des vases à réaction. — Dans ces appareils, il faut se rendre compte la fois du mouvement du liquide et de celui du vase. Dans les deux cas il suffit d'appliquer le principe de mécanique suivant :

Lorsqu'un système de forces se fait équilibre sur un corps solide, l'une quelconque des forces est égale et opposée à la résultante de toutes les autres.

Soit un liquide en équilibre dans un vase quelconque (fig. 168). On peut supprimer le vase par la pensée, à la condition de solidifier le liquide et d'appliquer à ses divers éléments les forces de résistance ou réactions f, f', f''... que les éléments de paroi leur opposent. On a ainsi un système de forces, composé du poids total P du liquide et des réactions f, f'..., qui se font équilibre. L'une quelconque d'entre elles, f par exemple, étant égale et opposé

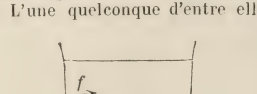


Fig. 168.

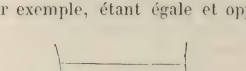


Fig. 169.

la résultante des autres, si l'on vient à la supprimer, — ce qu'on fait en ouvrant un orifice dans la paroi en ce point, — la résultante de toutes les autres cessera d'être contre-balancée et précipitera le liquide par cet orifice.

Quant au vase plein de liquide, on peut le considérer comme un corps solide soumis au système de forces suivant : 1° les pressions p, p'... du liquide sur parois, pressions qui ont une résultante unique égale au poids total du liquide ; 2° le poids des parois elles-mêmes ; 3° la réaction R du plan qui supporte le vase ou du fil qui le soutient, et qui fait équilibre aux deux autres (fig. 169). Si l'on ouvre un orifice en face de l'une des pressions p, le liquide s'écoule, la pression p cesse donc de s'exercer et la résultante de toutes les eaures forces, qui est égale et opposée à p, tend à entraîner le vase en sens contraire de l'écoulement.

PRESSIONS SUR LES CORPS IMMERGÉS.

158. **Principe d'Archimède.** — 1° Énoncé. — *Lorsqu'un corps solide est entièrement plongé dans un liquide pesant en équilibre, les pressions qui s'exercent à sa surface ont une résultante unique, égale et directement opposée au poids du volume liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de ce volume.*

Cette résultante s'appelle *la poussée* du liquide ; son point d'application s'appelle *le centre de poussée.*

Ce principe fut découvert par Archimède de Syracuse. C'était la proposition fondamentale de son *Traité des corps flottants*, et il sert en effet de fondement à la théorie de l'équilibre des corps flottants. On l'énonce encore de la manière suivante :

Tout corps plongé dans un liquide pesant en équilibre y subit une poussée verticale de bas en haut, égale au poids du volume liquide déplacé.

2° Démonstration. — On peut en donner deux sortes de démonstrations, l'une théorique et l'autre expérimentale.

Démonstration à priori. — Dans une masse liquide en équilibre, considérons une portion de liquide de forme quelconque, sphérique, ovoïde ou irrégulière. et supposons-la solidifiée, sans accroissement ni diminution de volume (fig. 170). Il est évident que la partie ainsi solidifiée supportera, de la part de la masse liquide, les mêmes pressions qu'auparavant, et que, par conséquent, elle sera encore en équilibre : ce qui ne peut avoir lieu que parce qu'elle supporte, de bas en haut, une poussée égale à son poids. Or, si à la place de la partie solidifiée on imagine un corpsd'une autre su b-stance, de même volumeet de même forme, il supportera nécessairement les mêmes pressions que supportait le liquide solidifié, et dès lors il sera soumis, lui aussi, à une poussée égale au poids du liquide déplacé.

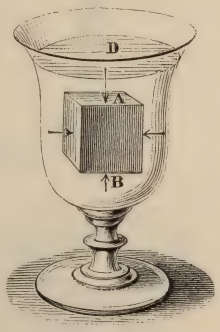


Fig. 170.

Autre démonstration théorique. — On peut considérer ce principe comme un corollaire du précédent, en assimilant la surface du corps immergé à une sorte de paroi intérieure au liquide. Ou bien on peut le démontrer directement, en composant par la même méthode d'analyse le système des pressions élémentaires que le liquide ambiant exerce normalement aux parois du corps plongé. Sur un élément de surface ω, la pression élémentaire normale est $\omega z d$, en désignant par z la distance de l'élément à la surface libre. Cette pression peut se décomposer suivant trois directions rectangulaires, dont l'une soit verticale : les composantes seront

$$\omega z d \cos \alpha, \qquad \omega z d \cos \beta, \qquad \omega z d \cos \gamma.$$

Le système primitif des forces quelconques sera remplacé par trois systèmes de forces parallèles ayant respectivement pour résultantes

$$X = \sum(\omega z d \cos\alpha), \qquad Y = \sum(\omega z d \cos\beta), \qquad Z = \sum(\omega z d \cos\gamma).$$

On démontrera aisément que X et Y sont identiquement nuls, et que Z est égal au poids du volume liquide déplacé, directement opposé à ce poids et appliqué au même point.

Vérification expérimentale. — Elle s'effectue très simplement au moyen de la *balance hydrostatique*. C'est une balance ordinaire dont chaque plateau est muni d'un crochet, et dont le fléau peut s'élever et s'abaisser à volonté, à l'aide d'une crémaillère qu'on

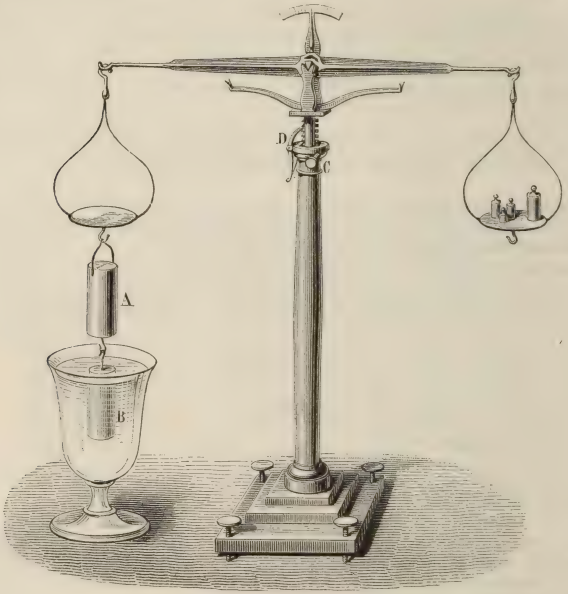


Fig. 171.

fait marcher par un petit pignon C (fig. 171). Un encliquetage D retient la crémaillère lorsqu'on l'a soulevée. Le fléau étant remonté, on suspend, au-dessous de l'un des plateaux un cylindre creux A, en laiton, et au-dessous de celui-ci un cylindre plein B, dont le volume est exactement le même que la capacité du pre-

mier; puis dans l'autre plateau on place des poids jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse. Si alors on remplit d'eau le cylindre A, l'équilibre est rompu; mais si l'on abaisse en même temps le fléau de manière que le cylindre B plonge en entier dans l'eau d'un vase placé au-dessous, on voit l'équilibre se rétablir. Le cylindre B subit donc, par son immersion, une poussée égale au poids de l'eau versée dans le cylindre A.

On voit que, dans cette expérience, tout se passe, au point de vue de l'équilibre du fléau, comme si le cylindre plein *perdait brusquement une partie de son poids* au moment de son immersion. C'est ce qui fait donner quelquefois à l'énoncé du principe la forme suivante, qui est incorrecte : *Tout corps plongé dans un liquide perd de son poids une partie égale au poids du liquide qu'il déplace.*

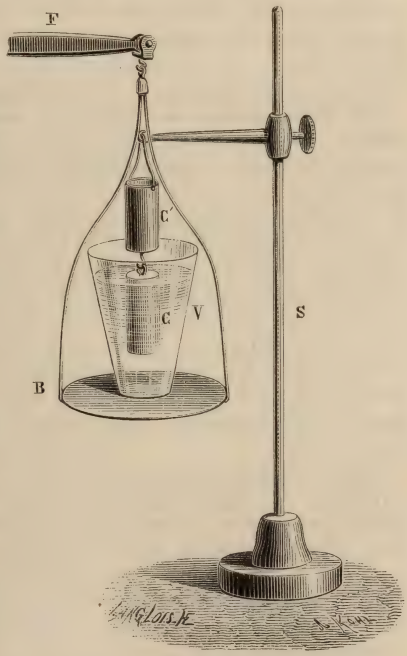


Fig. 172.

159. **Réciproque du principe d'Archimède.** — 1° Énoncé. — *Tout corps plongé dans un liquide pesant en équilibre exerce sur ce liquide une pression verticale, de haut en bas, égale au poids du volume liquide déplacé.*

On peut en donner un autre énoncé, moins correct, mais plus frappant : *Le poids perdu par le corps immergé est gagné par le liquide ambiant.*

2° Démonstration. — *Vérification expérimentale.* — On n'a qu'à modifier légèrement l'expérience précédente. On place le vase plein d'eau sur le plateau même de la balance, et l'on tare dans l'autre plateau. Le système des deux cylindres, disposés comme précédemment, le plein au-dessous du creux, est sus-

pendu à un support fixe (fig. 172). On relève le fléau de la balance de manière à faire plonger le cylindre plein dans le liquide. Aussitôt que l'immersion commence, l'équilibre est détruit. Lorsque l'immersion est complète, on verse dans le cylindre creux de l'eau prise dans le vase; on constate que, dès que le cylindre est rempli, l'équilibre est complètement rétabli.

Démonstration à priori. — L'explication théorique de ce fait est très simple. Ou bien on peut le considérer comme une conséquence du principe général de l'égalité de l'action et de la réaction : si le corps plongé subit une poussée de la part du liquide ambiant, celui-ci doit subir de la part du corps une réaction égale et contraire. Ou bien l'on peut remarquer simplement que, lorsqu'on plonge un corps dans un liquide, on élève le niveau dans le vase ; la résultante des pressions sur les parois s'accroît donc de la même quantité que si l'on avait ajouté au liquide un volume égal au volume déplacé : cet accroissement de la pression résultante est évidemment égal au poids du volume déplacé.

160. **Détermination du volume d'un corps.** — Le principe d'Archimède donne le moyen d'obtenir avec précision le volume d'un corps de la forme la plus irrégulière, lorsqu'il n'est pas soluble dans l'eau et ne l'absorbe pas. Pour cela, l'ayant suspendu par un fil à la balance hydrostatique, on le pèse dans l'air, puis dans l'eau distillée à la température de 4°. La perte de poids que l'on constate alors est le poids de l'eau déplacée. Le poids de cette eau est, *par définition*, égal à son volume, et, par suite, à celui du corps immergé, qui est évidemment le même. Si, par exemple, la perte de poids est de 155 grammes-poids, l'eau déplacée pèse 155 grammes-poids ; mais on sait que le gramme-poids est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée et à 4° ; donc le volume de l'eau déplacée, et par conséquent celui du corps plongé, est de 155 centimètres cubes.

L'eau n'étant généralement pas à 4°, il y aura à faire une petite correction. Le volume de l'eau à t^0 n'est plus exprimé par le même nombre que son poids. Soit d le poids du centimètre cube d'eau à la température de l'expérience, v son volume inconnu et p son poids : on a entre ces trois quantités la relation $p = vd$, d'où l'on déduira v; p est fourni par l'expérience ci-dessus. (Le poids du centimètre cube d'eau a été déterminé pour toutes les températures.)

161. **Équilibre des corps immergés et des corps flottants.** — D'après le principe d'Archimède, tout corps plongé dans un liquide est soumis à deux forces verticales et de sens contraires : son poids P appliqué en son centre de gravité G et la poussée P′ appli-

quée au centre de poussée G′ (fig. 173). Si le solide et le liquide sont des corps homogènes, les centres de gravité du volume commun qu'ils occupent dans l'espace coïncident nécessairement. Les points G et G′ ne font qu'un et les forces P et P′ sont directement opposées. Si l'un des corps n'est pas homogène, ce qui est le cas

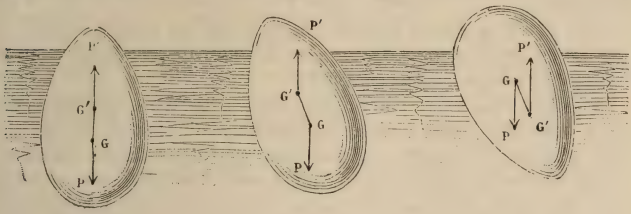


Fig. 173.

général, leurs points d'application, G et G′, sont parfaitement distincts.

Les forces P et P′, étant parallèles et de sens contraires, ont toujours une résultante égale à leur différence (P — P′). Il y a trois cas à considérer :

1° $P - P' > 0$, d'où $P > P'$. *Le poids du solide l'emporte sur la poussée du liquide.* Le corps tombe au fond du liquide d'un mouvement uniformément accéléré, entraîné par la force constante P — P′. On réalise aisément ce cas en mettant un œuf dans un vase contenant de l'eau pure.

2° $P - P' = 0$, d'où $P = P'$. *Le poids est égal à la poussée.* Le corps reste en équilibre dans le liquide, pourvu toutefois qu'il soit orienté de manière que les deux forces égales soient directement opposées. On réalise ce cas en mettant un œuf dans un mélange d'eau pure et d'eau saturée de sel marin.

3° $P - P' < 0$, d'où $P < P'$. *La poussée l'emporte sur le poids.* Le corps remonte vers la surface libre, d'un mouvement uniformément accéléré, entraîné par la force constante P′ — P. A partir de l'instant où il émerge, la poussée décroît en même temps que le volume du liquide déplacé diminue. Le corps atteint nécessairement une position pour laquelle $P' = P$. Il devrait rester en équilibre dans cette position; mais il la dépasse en vertu de la vitesse acquise, il y revient ensuite en vertu de son poids et finit par s'y fixer après une série d'oscillations plus ou moins nombreuses. On dit alors que le corps *flotte;* c'est un *corps flottant en équilibre.* On réalise aisément ce cas en mettant un œuf dans de l'eau saturée de sel marin. La cire, le bois et tous les corps plus

légers que l'eau flottent à sa surface. De même une masse de fer, qui tomberait immédiatement au fond de l'eau, surnage dans un bain de mercure.

162. **Conditions d'équilibre des corps flottants. — Métacentre.** — Pour qu'un corps flottant demeure en équilibre, il faut deux conditions :

1° *Le poids du liquide déplacé doit être égal au poids du corps.*

2° *Le centre de gravité du corps et le centre de poussée du liquide doivent être sur une même verticale.*

En effet, ces deux conditions étant satisfaites, le poids du corps appliqué à son centre de gravité, et la poussée de bas en haut, appliquée au centre de pression, sont deux forces non seulement égales, mais directement opposées : donc elles se font équilibre (fig. 173). D'ailleurs ces deux conditions sont nécessaires. En effet, si la première n'est pas satisfaite, nous avons vu plus haut que le corps tombe ou remonte à la surface, d'un mouvement uniformément accéléré. Si la deuxième n'était pas satisfaite, la première l'étant, ce qui arriverait par exemple dans l'une des positions 2 et 3 de la figure 173, les forces égales P et P′ formeraient un couple qui ferait tourner le corps jusqu'à ce que les points G et G′ fussent ramenés sur une même verticale, et le corps ne demeurerait en équilibre qu'après une série d'oscillations.

Plan de flottaison. — Quand le corps flottant est en équilibre, la surface libre du liquide y détermine une section plane horizontale, qu'on appelle *plan de flottaison.* Ce plan est défini par les deux conditions d'équilibre précédentes : le poids du liquide déplacé doit être égal au poids du corps solide ; le centre de gravité du corps et le centre de poussée doivent être sur une même perpendiculaire au plan de flottaison.

Condition de stabilité. — Cet équilibre peut d'ailleurs être stable ou instable, suivant que le corps écarté légèrement de sa position d'équilibre tend ou ne tend pas à y revenir. La stabilité dépend de la position du centre de poussée par rapport au centre de gravité, ou plutôt de la place qu'occupe, sur la verticale passant par le centre de gravité, dans la position d'équilibre considérée, un point particulier appelé *métacentre.*

Positions du métacentre. — Soit ABC (fig. 174) la section d'un navire par un plan passant par la verticale xy, sur laquelle sont situés le centre de gravité g du navire et le centre de poussée c du liquide déplacé dans la position d'équilibre normale. Lorsque le navire s'incline dans la position A′B′C′, la ligne xy s'incline en $x'y'$, et le centre de gravité, qui ne change pas par rapport au navire, passe de g en g', tandis que, la forme du liquide déplacé n'étant plus la même, le centre de poussée change par rapport au navire, et prend, par

exemple, la position c'. Menons par le point c' une verticale qui coupe la droite $x'y'$ en m ; on peut supposer la poussée du liquide appliquée au point m. Si le point m est situé au-dessus du point g', il est évident que les forces appliquées en m et en g' auront pour effet de ramener le navire à sa première position ABC, et que par suite *l'équilibre sera stable*. Si, au contraire, le point m est au-dessous du centre de gravité en m', les deux forces appliquées en m' et en g' auront pour effet de faire chavirer le navire, et *l'équilibre sera instable*. On donne le nom de *métacentre* au point m où la verticale $c'm$ coupe la droite $x'y'$. On peut donc résumer ce qui précède en disant que *les corps flottants sont en équilibre stable quand le métacentre est plus haut que le centre de gravité du corps flottant, et en équilibre instable lorsque le métacentre est plus bas.*

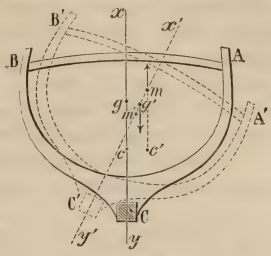


Fig. 174.

La détermination du métacentre et du centre de gravité est d'une grande importance dans l'arrimage des navires, car c'est de leur position relative que dépend la stabilité.

163. **Ludion.** — Les effets divers de suspension, d'immersion et de flottaison dans un liquide sont reproduits avec le petit appareil qu'on nomme *ludion*. Il se compose d'une éprouvette de verre remplie d'eau en partie, et surmontée d'un tube de cuivre dans lequel est un piston qu'on fait marcher à la main, et qui le ferme hermétiquement (fig. 175). Dans le liquide est une petite figure d'émail, soutenue par une boule de verre creuse a, qui contient de l'air et de l'eau, et flotte à la surface. Cette boule est percée, à sa partie inférieure, d'une petite ouverture par laquelle l'eau peut pénétrer ou sortir, selon que l'air intérieur de la boule est plus ou moins comprimé. Cette eau forme donc un lest de grandeur variable, qui permet de modifier à volonté le poids du corps immergé, de manière à réaliser les trois cas $P < P'$, $P = P'$ et $P > P'$. La quantité d'eau préalablement introduite dans la boule est telle, que la poussée P' soit légèrement supérieure à P : le corps flotte donc au début, en émer-

Fig. 175.

geant un peu; mais il suffit de donner à P un faible accroissement pour qu'il y ait immersion. Pour cela on exerce une légère pression avec le piston, comme le montre la figure : l'air qui est au-dessous se trouve comprimé et transmet sa pression à l'eau du vase; celle-ci pénètre alors dans la boule, jusqu'à ce que la force élastique de l'air, qu'elle y comprime, fasse équilibre à la pression extérieure qui l'y pousse. La densité moyenne et par suite le poids du ludion augmentent et celui-ci s'enfonce, d'un mouvement uniformément accéléré. Si l'on cesse alors la pression, l'air de la boule se détend, chasse l'excès d'eau qui y a pénétré, et le corps immergé flotte de nouveau.

164. **Natation.** — Le corps humain est généralement plus léger, à volume égal, que l'eau douce : aussi peut-il flotter naturellement sur ce liquide, et mieux encore sur l'eau salée de la mer, qui est plus dense. La difficulté de la natation est donc moins de se maintenir à la surface de l'eau que de pouvoir tenir la tête hors du liquide, afin de respirer librement. Or, chez l'homme, la tête, ayant un grand poids par rapport aux membres inférieurs, tend à plonger; c'est ce qui fait que la natation est pour l'homme un exercice physique qu'il doit apprendre. Chez les quadrupèdes, au contraire, la tête pesant moins que la partie postérieure du corps, peut sans effort demeurer hors de l'eau; aussi ces animaux nagent-ils naturellement.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES PESANTS.

165. **Équilibre d'un liquide dans un seul vase.** — *Énoncé des conditions.* — Nous avons déjà démontré les conditions dans ce cas, car elles sont des corollaires immédiats du théorème fondamental. Nous ne ferons que les rappeler. Il y en a deux :

1° *La pression doit être la même en tous les points d'un même plan horizontal.*

2° *La surface libre du liquide doit être plane et horizontale.*

Remarques. — 1° *Définition des surfaces de niveau.* — On donne un nom particulier au lieu géométrique des points qui, dans un liquide en équilibre sous l'influence de forces quelconques, supportent la même pression : on l'appelle *surface de niveau.* La surface libre d'un liquide est toujours une surface de niveau. On voit en outre que, dans un liquide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

2° *Propriété générale des surfaces de niveau.* — Dans le cas actuel, les surfaces de niveau sont perpendiculaires à la verticale, c'est-à-dire *à la direction de la force qui produit l'équilibre :* c'est là une propriété générale des surfaces de niveau.

3° *Courbure de la surface des mers.* — Remarquons enfin que,

dans un liquide pesant en équilibre, les surfaces de niveau en général, et la surface libre en particulier, ne peuvent être planes que sur une petite étendue, c'est-à-dire dans les limites où les verticales peuvent être considérées comme parallèles. Or il ne peut en être ainsi pour une surface liquide d'une grande étendue, comme celle des mers. En effet, puisque la direction de la pesanteur change d'un lieu à l'autre, en passant toujours sensiblement par le centre de la terre, il en résulte que la surface des mers change aussi de direction en restant toujours perpendiculaire à la pesanteur, et prend une forme sensiblement sphérique.

166. **Équilibre d'un seul liquide dans un système de vases communiquants.** — *Énoncé des conditions.* — Lorsque plusieurs vases de forme quelconque et contenant le même liquide communiquent entre eux, il n'y a équilibre qu'autant que :

1° et 2° *Dans chaque vase, le liquide satisfait aux deux conditions précédentes* (165) ;

3° *Les diverses surfaces libres du liquide, dans tous les vases, sont situées dans un même plan horizontal.*

Démonstration des deux premières conditions. — Les deux premières conditions d'équilibre s'appliquent nécessairement au cas des vases communiquants, comme à celui d'un vase unique, parce qu'elles sont des corollaires immédiats du théorème fondamental et que ce théorème est indépendant de la forme du vase qui contient le liquide pesant en équilibre. Toutefois, en le démontrant, nous avons supposé que la ligne joignant les deux points A et A′ où les pressions sont p et p', était tout entière contenue dans le liquide. Il est facile de supprimer cette restriction.

Soient deux points A et A′ situés dans les deux branches distinctes d'un système de vases communiquants quelconques (fig. 176). La ligne AA′ n'est pas comprise tout entière dans le liquide ; mais nous pouvons toujours choisir un point A_1, dans le tube de communication, de telle manière que les lignes AA_1 et A_1A' soient comprises tout entières dans le liquide. Soient p, p' et p_1 les pressions aux points A, A′ et A_1, et soient z et z_1 les distances verticales de A à A′ et de A à A_1. On a, d'après le théorème fondamental,

Fig. 176.

$$p_1 = p + z_1 d \quad \text{et} \quad p_1 = p' + (z_1 - z)\, d.$$

En égalant les deuxièmes membres de ces équations et supprimant de part et d'autre le terme commun $z_1\, d$, il vient

$$p' - p = zd.$$

Démonstration de la troisième condition. — La même figure peut servir démontrer la troisième condition d'équilibre. En effet, imaginons le plan de niveau auquel appartient le point A_1. Soit h la distance verticale d'un point quelconque de l'une des surfaces libres au-dessus de ce plan, et h' la distance d'un point quelconque de l'autre surface. On peut évaluer la pression en A_1 de deux manières et écrire

$$p = hd = h'd, \qquad \text{d'où} \qquad h = h'.$$

On démontrerait de même que $h = h'' = h'''$, etc., quel que soit le nombre des surfaces libres et, par suite, des vases communiquants.

Vérification de la troisième condition. — La troisième condition se vérifie expérimentalement au moyen du vase représenté figure 177. C'est un vase large sur la paroi latérale duquel on a mastiqué un tube en cuivre horizontal, pourvu de tubulures métalliques verticales. Sur chacune de ces tubulures on peut mastiquer exactement des tubes en verre, de formes quelconques A, B, C, dont l'ensemble forme avec le vase principal un système plus ou moins complexe de vases communiquants. Les vases étant remplis d'eau, et le liquide étant en équilibre, on vérifie à l'aide d'un cathétomètre que les diverses surfaces libres sont sur un même plan horizontal.

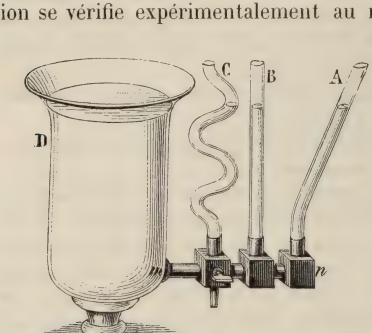


Fig. 177.

167. **Équilibre des liquides superposés.** — *Énoncé des conditions.* — Lorsque plusieurs liquides, qui ne peuvent se mélanger ni réagir chimiquement, sont versés dans un même vase, il faut, pour qu'il y ait équilibre :

1° et 2° Que *chacun d'eux satisfasse aux conditions nécessaires dans le cas d'un seul liquide* (165) ;

3° Que *les liquides soient superposés par ordre de densités croissantes de haut en bas ;*

4° Que *les surfaces de séparation des liquides (deux à deux) soient horizontales.*

Les conditions d'équilibre relatives à chacun des liquides super-

posés n'ont pas besoin d'être démontrées. Elles sont évidemment nécessaires dans tous les cas.

Démonstration de la troisième condition. — La troisième condition est une conséquence du principe d'Archimède et de l'équilibre des corps immergés. Il est évident qu'une goutte d'un liquide lourd, tel que le mercure, étant placée dans un liquide moins dense, tel que l'eau, tombera nécessairement au fond. Inversement, une goutte d'un liquide léger, tel que l'huile, flottera à la surface d'un liquide plus dense, tel que l'eau.

Démonstration de la quatrième condition. — La quatrième condition est une conséquence du théorème fondamental.

En effet, supposons que la surface de séparation de deux liquides superposés ait une forme quelconque. Soit MN sa section par un plan vertical que nous prenons pour plan de la figure. Soient deux plans horizontaux quelconques, A et A', pris à une distance h, l'un dans le liquide inférieur et l'autre dans le liquide supérieur. Soient A, M, A' trois points pris sur la même verticale (fig. 178) dans le liquide inférieur, sur la surface de séparation, et dans le liquide supérieur. Soient p, ϖ et p' les pressions en ces trois points; d et d' les poids des deux liquides, sous l'unité de volume. On a d'abord

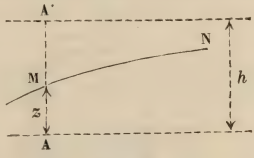


Fig. 178.

$$[1] \qquad p = \varpi + zd,$$

en appelant z la distance du point M au plan inférieur. On a de même

$$[2] \qquad \varpi = p' + (h - z)\,d'.$$

En éliminant ϖ entre ces deux équations, il vient

$$p = p' + zd + (h - z)\,d' = p' + hd' + z\,(d - d').$$

De là on tire

$$z = \frac{p - p' - hd'}{d - d'}.$$

Tous les termes du second membre sont constants : donc z est constant. Tous les points de la surface de séparation sont donc à une même distance du plan A : donc cette surface est un plan horizontal.

Vérification de la troisième condition. — La troisième condition se démontre expérimentalement au moyen de la *fiole des quatre éléments* (fig. 179). On nomme ainsi un flacon long et étroit, contenant du mercure, de l'eau saturée de carbonate de potasse, de l'alcool coloré en rouge, et de l'huile de naphte. Lorsqu'on agite le flacon, les liquides semblent se mélanger; mais aussitôt qu'on le maintient au repos, le mercure, qui est le plus dense, se précipite au fond; puis, au-dessus du mercure, se déposent successi-

vement l'eau, l'alcool, et l'huile de naphte. Tel est, en effet, l'ordre des densités décroissantes de ces corps. C'est afin que l'eau ne se mêle pas à l'alcool qu'on la sature de carbonate de potasse, ce sel n'étant pas soluble dans l'alcool.

Remarques. — 1° *Cas des liquides miscibles entre eux.* — *Diffusion des liquides.* — Il importe d'observer que l'état d'équilibre des liquides superposés n'est rigoureusement stable qu'autant qu'ils ne peuvent se mélanger. Sinon, lorsqu'ils sont miscibles, ou, comme on dit, *diffusibles,* ils finissent par se mélanger spontanément et intimement, quoiqu'on ait eu la précaution de verser le liquide le plus dense au fond du vase. C'est en cela que consiste le phénomène de la *diffusion des liquides*, étudié par Graham. Si, par exemple, on remplit aux trois quarts une haute éprouvette en

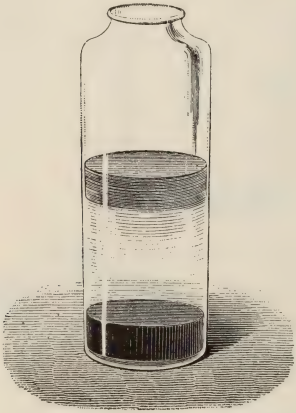


Fig. 179

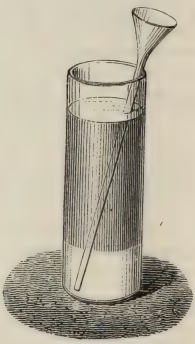


Fig. 180.

verre (fig. 180) avec de la teinture de tournesol étendue, et qu'on fasse arriver lentement de l'acide sulfurique à la partie inférieure à l'aide d'un entonnoir à long col, la surface de séparation du liquide incolore et du liquide bleu est d'abord très nette; mais on voit bientôt le tournesol passer graduellement au rouge de bas en haut, tandis que l'acide se teinte légèrement en rouge de haut en bas. Au bout de quarante-huit heures la liqueur est rougie dans toute la hauteur, ce qui prouve la diffusion réciproque des deux liquides.

2° *Quelques conséquences.* — C'est en vertu de la troisième condi-

tion que l'eau douce, à l'embouchure des fleuves, surnage assez longtemps au-dessus de l'eau salée de la mer, et que la crème, qui est moins dense que le lait, s'en sépare peu à peu pour monter à la surface.

168. **Équilibre de deux liquides hétérogènes dans deux vases communiquants.** — *Énoncé des conditions.* — Lorsque deux liquides, inégalement denses, et sans action chimique l'un sur l'autre, sont contenus dans deux vases communiquants, il faut, pour qu'ils soient en équilibre :

1°, 2°, 3° et 4° Qu'*ils satisfassent aux trois conditions d'équilibre d'un seul liquide dans des vases communiquants* (166), *puis à celles de deux liquides superposés dans un seul vase* (167) ;

5° Que *les hauteurs des deux surfaces libres au-dessus de la surface commune de séparation soient en raison inverse des poids spécifiques*[1] *des deux liquides.*

Vérification expérimentale. — On prend deux tubes de verre, *m, n,* réunis par un tube à petit diamètre et fixés sur une planchette verticale (fig. 181) ; on y verse une certaine quantité de mercure, puis dans l'une des branches AB on verse de l'eau. La colonne AB exerçant en C une pression sur le mercure, le niveau de celui-ci baisse dans la branche AB et s'élève dans l'autre d'une quantité CD ; en sorte que, l'équilibre étant établi, si l'on conçoit en B un plan horizontal BC, la colonne d'eau AB fait équilibre à la colonne de mercure DC. Mesurant alors les hauteurs DC et AB au moyen e deux échelles fixées parallèlement aux deux tubes, ou mieux à l'aide d'un cathétomètre, on trouve que la première est 13 fois et demie plus petite que AB. Or le mercure pèse 13 fois et demie plus que l'eau à volume égal : donc les hauteurs sont bien en raison inverse des poids spécifiques.

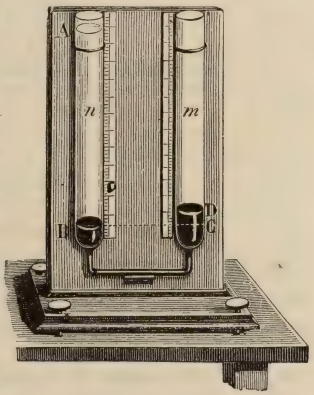


Fig. 181.

Démonstration théorique. — Il est facile de démontrer *à prior*

1. Nous verrons ci-dessous que l'on appelle *poids spécifique* d'un corps le poids de son unité de volume.

cette condition d'équilibre. Il suffit d'appliquer deux fois le théorème fondamental à la surface de séparation B des deux liquides (fig. 182). Soient d et d' les poids spécifiques des liquides, h et h' les distances verticales des deux surfaces libres au plan BB′ de séparation. La pression est la même en tous les points de ce plan. Dans la branche B elle a pour expression hd, abstraction faite de la pression atmosphérique ; de même, dans la branche B′ la pression en un point est $h'd'$.

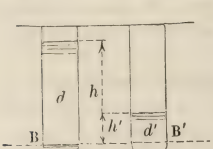


Fig. 182.

On a donc

$$p = hd = h'd', \qquad \text{d'où} \qquad \frac{h}{h'} = \frac{d'}{d}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS DES PRINCIPES D'HYDROSTATIQUE

—

DÉTERMINATION DES DENSITÉS ET POIDS SPÉCIFIQUES. — AÉROMÈTRES. APPLICATIONS DIVERSES.

I. DÉTERMINATION DES DENSITÉS.

169. **Définitions générales.** — *Densité absolue.* — On appelle *densité absolue* d'une substance, la masse de l'unité de volume de cette substance. Dans le système métrique, ce serait la masse du mètre cube, ou du décimètre cube. (Dans le système d'unités C. G. S., c'est la *masse du centimètre cube.*)

Poids spécifique absolu. — On appelle *poids spécifique absolu* d'une substance, le poids d'un *centimètre cube* (système C. G. S.) de cette substance.

Relation entre la densité absolue et le poids spécifique absolu d'une même substance. — L'équation générale $P = Mg$, qui lie la masse et le poids d'un volume quelconque d'une substance, s'applique évidemment à la masse et au poids de l'unité de volume. En appelant d la première et p le second, on a

$$p = dg.$$

Il résulte de cette relation :

1° Que le poids spécifique absolu et la densité absolue d'une substance sont deux coefficients nettement distincts l'un de l'autre ;

2° Que le poids spécifique d'une substance varie proportionnellement à g.

3° Que les poids spécifiques des différents corps sont proportionnels à leurs densités, *dans un même lieu* (g étant constant) ;

Exemples. — La densité absolue de l'eau pure (à 4°) n'est pas égale à l'unité C. G. S, parce que le kilogramme-étalon, déposé aux Archives, ne pèse pas exactement mille grammes métriques. Il en résulte que la millième partie de la masse du kilogramme-étalon, c'est-à-dire l'unité de masse G. G. S, n'est pas identique à la masse de 1 centimètre cube d'eau pure (à 4°), c'est-à-dire à la *densité absolue* de l'eau pure (à 4°). Cette densité absolue est, d'après les recherches les plus récentes, représentée par le nombre 1,000013. On a

$$d = 1{,}000013 \text{ (en grammes-masse).}$$

Par suite, le *poids spécifique absolu* de l'eau pure (à 4°) est représenté à Paris par le nombre dg, ou $1{,}000013 \times 960{,}93$ ($= 980{,}97$). On a donc

$$p = 980{,}97 \text{ (en dynes).}$$

Tandis que la densité absolue de l'eau est partout égale à 1,000013, son poids spécifique absolu n'est égal à 980,97 que sous la latitude et à l'altitude de Paris ; il est différent partout ailleurs.

Poids spécifique relatif et *densité relative.* — Supposons qu'on prenne le rapport du poids spécifique absolu p d'une substance au poids spécifique absolu p' d'une autre substance, choisie comme terme de comparaison. On avait entre le poids p et la densité absolue d de la première substance la relation

$$[1] \qquad p = dg ;$$

on a, de même, entre le poids p_0 et la densité absolue d_0 de la substance-type la relation

$$[2] \qquad p_0 = d_0 .$$

En prenant le rapport, il vient

$$[3] \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{d}{d} .$$

Le rapport $\frac{p}{p_0}$ des poids spécifiques absolus est donc un nombre constant, indépendant de g ainsi que la densité absolue, et il est

égal au rapport $\frac{d}{d_0}$ des densités absolues. Le rapport $\frac{p}{p_0}$ s'appelle le *poids spécifique relatif* de la première substance (par rapport à la deuxième), et le rapport $\frac{d}{d_0}$ s'appelle la *densité relative* de la première substance (par rapport à la substance-type).

On voit qu'en général, quelle que soit la substance prise pour terme de comparaison, le *poids spécifique relatif* est égal à la *densité relative :* c'est pourquoi l'on emploie communément ces deux expressions l'une pour l'autre dans la pratique; cela n'a pas d'inconvénients, puisqu'elles désignent le même coefficient.

La substance-type universellement adoptée pour les corps solides et liquides est l'eau pure (à la température de 4°) ; c'est l'air (à la température 0° et sous la pression 760^{mm}) pour tous les gaz.

Expression du poids spécifique absolu en fonction du poids spécifique relatif. — Soit δ la valeur commune des deux rapports $\frac{p}{p_0}$ et $\frac{d}{d_0}$. Le quotient δ est ce qu'on appelle ordinairement la *densité* du corps : c'est le nombre inscrit dans les *tables de densités*[1]. On a donc

$$\frac{p}{p_0} = \delta, \quad \text{d'où l'on déduit} \quad p = p_0 \delta. \qquad [4]$$

L'équation [4] est une formule générale qui s'applique à tous les corps solides, liquides et gazeux. Elle prouve que le *poids spécifique absolu* d'un corps quelconque est égal au produit de sa densité (tabulaire) par le poids spécifique absolu de la substance-type. Pour les gaz, le coefficient p_0 est égal au poids du litre d'air normal ($1^g,293$ à Paris). Pour les corps solides et liquides, p_0 est égal au poids spécifique absolu de l'eau pure (à 4°); *dans la pratique*, on le considère comme égal à l'unité. Par conséquent, la formule générale [4] devient dans le cas des gaz

$$[4\ bis] \qquad p = 1^g,293 \times \delta$$

et dans le cas des liquides et des solides

$$[4\ ter] \qquad p = \delta.$$

Dans la formule [4 *bis*], p est exprimé en grammes et représente le poids d'un litre de gaz, δ étant la densité du gaz par rapport à l'air. Dans la formule [4 *ter*], p est aussi exprimé en grammes,

1. On l'appelle aussi, à cause de cela, *densité tabulaire.*

mais représente le poids d'un centimètre cube du corps, δ étant la densité par rapport à l'eau pure (à 4°).

Remarques. — 1° En réalité le poids p_0 d'un centimètre cube d'eau pure (à 4°) n'est pas égal à 1 : on a vu, en effet, que le kilogramme des Archives n'est pas rigoureusement conforme à sa définition théorique, et qu'il est inférieur, de 0,000013 environ, au poids de 1 décimètre cube d'eau pure (à 4°). Il en résulte que la formule [4 *ter*] n'est pas rigoureusement exacte. Il faudrait l'écrire en réalité

$$p = 1{,}000013 \times \delta.$$

Mais, comme la différence entre p_0 et l'unité porte seulement sur la cinquième décimale, — nombre qu'on atteint difficilement dans les mesures de densité, — on néglige cette différence et l'on considère la formule $p = \delta$ comme étant vraie dans la pratique.

2° Nous avons vu dans le système C. G. S. que p est le poids d'un centimètre cube de la substance, et p_0 le poids d'un centimètre cube d'eau pure (à 4°). Nous avons dit précédemment que p_0, exprimé en dynes, est égal à 980,96 $\times$ 1,000013 = 980,97 dynes, ou bien à 980,96 dynes si l'on néglige les 13 millionièmes de la densité de l'eau. On pourra donc exprimer en dynes le poids spécifique d'une substance solide ou liquide quelconque au moyen de la formule

$$[5] \qquad p = 980{,}95 \times \delta.$$

Poids d'un volume quelconque d'un corps solide ou liquide. — Soit P le poids inconnu d'un volume V d'une substance quelconque, solide ou liquide. On suppose connue la densité (tabulaire) de la substance.

Si p est le poids spécifique absolu, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume, V unités de volume pèseront évidemment V fois plus : on aura donc

$$[6] \qquad P = Vp.$$

Dans le système métrique, V sera évalué en décimètres cubes, p sera donné par la formule [4 *ter*] et P sera exprimé en kilogrammes.

Dans le système C. G. S., V sera évalué en centimètres cubes, p sera donné par la formule [5] et P sera exprimé en dynes.

Nouvelle définition de la densité relative. — La formule [6] donne le poids d'un volume V d'une substance quelconque. Appliquons cette formule au cas de l'eau pure (à 4°) : cherchons le poids P_0 d'un volume V. On aura évidemment

$$[6\ bis] \qquad P_0 = V\,p_0.$$

En divisant membre à membre les équations [6] et [6 *bis*], il vient

$$\frac{P}{P_0} = \frac{p}{p_0}.$$

Or nous avons vu que le rapport $\frac{p}{p_0}$ est précisément égal à δ. On peut donc dire encore que le *poids spécifique relatif* ou *densité relative* (ou *densité tabulaire*) d'une substance quelconque est égal au *rapport des poids de volumes égaux* de la substance et d'eau pure (à 4°). Cette définition est souvent appliquée dans la recherche expérimentale des densités tabulaires des corps.

170. **Détermination des densités ou poids spécifiques.** — *Méthode.* — Une seule méthode est employée pour déterminer les poids spécifiques des solides et des liquides. Elle consiste à mesurer : 1° le poids d'un certain volume du corps; 2° le poids d'un égal volume d'eau; puis à diviser le premier résultat par le deuxième. Cette méthode est appliquée de trois manières différentes, qui constituent trois procédés expérimentaux : le *procédé de la balance hydrostatique*, le *procédé des aréomètres* et le *procédé du flacon*.

Conditions expérimentales. — Il est nécessaire d'adopter des températures fixes pour les corps dont on recherche le poids spécifique et pour l'eau à laquelle on les compare; car les volumes des corps, solides ou liquides, variant inégalement avec la température, il en est de même de leurs poids spécifiques. C'est pourquoi l'on est convenu de prendre les corps à la température de zéro, et l'eau à 4°, température de son maximum de densité. La condition de pureté n'est pas moins nécessaire pour l'eau, car son poids spécifique varie avec les substances qu'elle tient en dissolution.

Corrections usuelles. — Ces différentes conditions n'étant pas généralement satisfaites dans les circonstances où l'on est obligé d'opérer, on doit effectuer certaines corrections sur les résultats immédiats de l'expérience. Ces corrections sont relatives à la température des corps, à celle de l'eau, et enfin à la perte de poids qu'éprouvent les corps pesés dans l'air. On en verra plus loin le détail et les calculs; nous ne donnerons ici que les plus simples. Du reste, elles sont presque toujours très petites, et peuvent être négligées pour les corps lourds, tels que les métaux et les pierres.

Corrections de température. — 1° Le corps solide ou liquide peut être pris à la température t du laboratoire. Dans ce cas, l'opération donne directement son poids spécifique D_t à t°. Connaissant D_t on peut en déduire le poids spécifique D_0 à 0°, au moyen des formules de dilatation que nous verrons plus tard. Mais il est plus simple et plus précis de prendre le corps à 0° : il est facile d'obtenir cette température dans les laboratoires au moyen de la glace fondante, quand on n'a à opérer que sur une petite masse du corps.

2° Quant à l'eau, il est très difficile, pour ne pas dire impossible, d'en avoir et d'en maintenir, même une petite quantité, à la température de son maximum de densité. On doit se contenter de la prendre à une température fixe quelconque, soit celle du laboratoire, soit la température 0°, ce qui vaut mieux. On fera subir au résultat une correction, pour le ramener à ce qu'il eût été avec de l'eau à 4°. Cette correction est très simple : elle résulte de la définition même du poids spécifique relatif, et elle est indépendante de la notion de coefficient de dilatation.

Soit P le poids d'un volume V du corps à zéro, soit P'_0 le poids d'un égal volume d'eau à zéro, et soit P'_4 le poids de ce même volume d'eau à 4°. On a l'identité suivante :

$$\frac{P}{P'_4} = \frac{P}{P'_0} \times \frac{P'_0}{P'_4}.$$

Or $\frac{P}{P'_4}$ est, par définition, le poids spécifique relatif du corps : $\frac{P}{P'_0}$ est le poids spécifique approché, fourni directement par l'expérience; enfin $\frac{P'_0}{P'_4}$ est, par définition, le poids spécifique de l'eau à zéro par rapport à l'eau à 4°. La correction consistera donc à multiplier le nombre mesuré directement par la densité de l'eau à la température de l'expérience. Nous verrons plus tard que l'étude de la dilatation de l'eau a permis de construire une table des densités de l'eau à toutes les températures usuelles.

171. **Densités des solides.** — 1° *Procédé de la balance hydrostatique.* — Ce procédé est une application immédiate du principe d'Archimède. L'appareil même qui a servi à vérifier ce principe, la balance hydrostatique, sert à appliquer le procédé.

Première opération. — On attache le corps, par un fil fin, au crochet de l'un des plateaux (fig. 183), et on lui fait équilibre dans l'autre plateau avec de la tare. Puis on enlève le corps et on le remplace par des poids marqués, jusqu'à ce qu'on ait rétabli l'équilibre. Soit P la somme des poids marqués qu'il a fallu employer : P est évidemment le poids du corps (double pesée).

Deuxième opération. — On enlève les poids marqués, puis on remet le corps en place, tout en laissant toujours la même tare dans l'autre plateau. On abaisse alors le fléau de la balance hydrostatique jusqu'à ce que le corps soit complètement immergé dans l'eau d'un vase placé au-dessous.

Le corps immergé perdant une partie de son poids, égale à celui

de l'eau déplacée (105), on ajoute sur le plateau correspondant un poids P′ qui ramène le fléau à sa première position : P′ représente évidemment le poids de l'eau déplacée sous un volume égal à celui du corps.

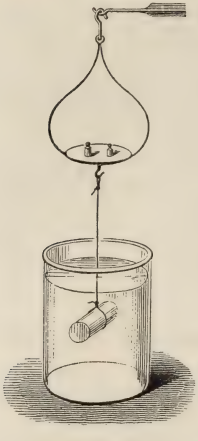


Fig. 183.

Il ne reste plus qu'à faire le quotient de ces deux poids, et l'on a

$$D = \frac{P}{P'}.$$

Remarques. — 1° Si l'on a opéré à la température t pour le corps et pour l'eau, en multipliant le résultat par e_t, densité de l'eau à t^0, on le ramène à ce qu'il eût été avec de l'eau à 4°. Le nombre $\frac{P}{P'} \times e_t$ représente alors la densité du corps à t^0.

2° Ce procédé est très expéditif, puisqu'il permet d'effectuer deux doubles pesées avec trois pesées simples seulement ; mais il a l'inconvénient d'être peu précis. Le défaut principal consiste dans la poussée hydrostatique et dans l'attraction capillaire[1] que subit le fil de suspension ; il n'est guère possible d'évaluer ces deux effets, et, d'un autre côté, il est difficile de les maintenir constants. On atténue beaucoup ces causes d'erreur en employant un fil de platine très fin, qu'on recouvre d'une légère couche de noir de fumée, pour l'empêcher d'être mouillé par l'eau, et qu'on immerge toujours de la même quantité.

3° Il vaut mieux se servir d'une balance ordinaire que de la balance hydrostatique, car, si l'on déplace le fléau, à l'aide de la crémaillère, pour produire l'immersion du corps solide, on ne peut plus compter sur l'exactitude de la double pesée.

2° *Procédé des aréomètres.* — Ce procédé est caractérisé par l'emploi d'appareils flotteurs, appelés *aréomètres* (de ἀραιός, ténu, léger, et μέτρον, mesure), dont la construction est fondée sur l'équilibre des corps flottants.

Description de l'appareil. — L'aréomètre dit *de Nicholson*[2], qui sert dans ce cas particulier (fig. 184), peut être considéré comme l'un des types de ces flotteurs. Il se compose d'un cylindre creux de fer-blanc B, auquel est suspendu un cône C rempli de plomb.

1. Voir la définition et l'explication de cette attraction capillaire au chapitre consacré à l'étude des phénomènes capillaires.

2. C'est à tort que cet appareil est attribué à Nicholson, Il est dû au physicien français Charles, qui l'appliquait à la détermination de la densité des solides, sous le nom d'*aréomètre-balance*.

Celui-ci a pour objet de lester l'appareil de manière que l'équilibre soit stable (108). A sa partie supérieure, l'appareil se termine par une tige et un plateau A, lequel est destiné à recevoir des poids ainsi que le corps dont on cherche le poids spécifique. Enfin, sur la tige, en *o*, est marqué un trait qu'on nomme *point d'affleurement*, et qui sert à indiquer si l'appareil plonge toujours de la même quantité.

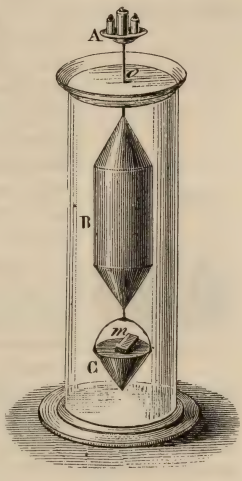


Fig. 184.

Première opération. — On place d'abord le corps solide sur le plateau A et l'on ajoute une tare, de manière à produire l'affleurement au point de repère. On enlève ensuite le corps et on le remplace par des poids marqués P jusqu'à produire le même affleurement : P représente alors le poids du corps, obtenu par double pesée.

Deuxième opération. — Il reste à trouver le poids d'un égal volume d'eau. Pour cela on enlève l'aréomètre, et l'on transporte le corps sur le plateau inférieur C, en *m*. Le poids total de l'instrument n'est pas changé, et cependant, en le plongeant de nouveau, on remarque qu'il n'affleure plus au même point : cela vient de ce que le solide, étant immergé, perd de son poids une partie égale au poids de l'eau qu'il déplace. Si l'on ajoute alors des poids marqués P′ dans le plateau supérieur jusqu'à ce que l'affleurement se rétablisse, on a le poids du volume d'eau déplacé.

En faisant le quotient de ces deux poids, on a la densité cherchée $D = \frac{P}{P'}$ (dans les conditions de température où l'on a opéré).

Remarques. — 1° Si la substance était plus légère que l'eau, elle tendrait à surnager et ne pourrait demeurer sur le plateau inférieur C. On adapte alors à celui-ci un petit grillage de fil de fer mobile, qui s'oppose à l'ascension du corps, et le reste de l'expérience se fait comme ci-dessus.

2° Ce procédé est peu précis, surtout parce que l'aréomètre est une balance très imparfaite ; mais c'est un procédé simple et rapide. Aussi est-il fréquemment employé par les minéralogistes, surtout en voyage, où il est seul praticable.

3° *Procédé du flacon.* — Ce procédé, imaginé par Klaproth et perfectionné par Regnault, est le seul vraiment précis : aussi

convient-il d'effectuer toutes les opérations qu'il comporte avec de l'eau distillée et à la température de la glace fondante. On a alors le moyen de faire subir au résultat brut des mesures des corrections rigoureuses, d'après la méthode indiquée ci-dessus.

Description de l'appareil. — On fait usage d'un petit flacon à large goulot, fermé par un bouchon de verre usé à l'émeri. Ce bouchon est foré d'un trou qui se prolonge par une tubulure capillaire, terminée elle-même par un tube court, à grand diamètre (fig. 185). Sur cette tubulure est un point de repère *a*, et à chaque opération l'on a soin de remplir d'eau le flacon exactement jusqu'à ce point : cela s'obtient en plongeant en entier le flacon dans l'eau et en le bouchant pendant qu'il est ainsi immergé.

Fig. 185.

Première opération. — Le flacon et la tubulure ayant été complètement remplis, on enlève l'excès d'eau jusqu'au point *a*, au moyen d'un petit rouleau de papier joseph. Puis on place dans l'un des plateaux d'une balance le flacon exactement rempli d'eau distillée, bien fermé et essuyé avec soin, et, à côté de lui, le corps dont on cherche le poids spécifique, en fragments ou en poudre. On le tare avec de la grenaille de plomb, puis on enlève le corps et on le remplace par un nombre de grammes P, qui représente son poids dans l'air.

Deuxième opération. — On retire le flacon, on le débouche et l'on y introduit le corps. Remettant le bouchon de la même manière qu'il a été dit ci-dessus, on pose de nouveau le flacon dans le plateau où il était d'abord. L'équilibre n'a plus lieu, car une certaine quantité d'eau a été expulsée; on ajoute alors des poids du côté du flacon jusqu'à ce que le fléau reprenne sa position horizontale; le nombre de grammes ajouté, P′, représente le poids d'un volume d'eau égal à celui du corps.

Il ne reste donc plus qu'à faire le même calcul que dans les deux méthodes précédentes. Le quotient $\frac{P}{P'} = D$ représente la densité cherchée.

Remarques. — 1° Dans cette expérience, il importe d'éviter la présence des bulles d'air, soit dans l'eau du flacon, soit à la surface du corps solide : cela fausserait les pesées. On commence par purger d'air, au moyen d'une ébullition prolongée, l'eau qui doit servir aux opérations. Puis, après avoir introduit le corps, soit en poudre, soit en fragments, dans l'eau du flacon, on place celui-ci sous la cloche de la machine pneumatique et on fait le vide; l'air

adhérent au corps ou aux parois du flacon se dégage alors en vertu de sa force élastique.

2° Le principal avantage de ce procédé est qu'on peut opérer sur des fragments de la substance, assez petits pour éviter les cavités intérieures. La précision du procédé n'est limitée que par la difficulté de poser le bouchon exactement de la même manière dans les opérations successives.

172. **Cas particuliers de la densité des solides.** — 1° *Corps solubles dans l'eau.* — Si le corps dont on cherche le poids spécifique était soluble dans l'eau, on prendrait le poids spécifique de ce corps par rapport à un liquide dans lequel il ne serait pas soluble, l'alcool par exemple. Puis, cherchant, par un des procédés que nous allons décrire, le poids spécifique de l'alcool par rapport à l'eau, on obtiendrait le poids spécifique de la substance donnée en multipliant son poids spécifique par rapport à l'alcool par celui de ce liquide par rapport à l'eau.

En effet, soient, à volume égal, P le poids de la substance, P′ celui de l'alcool, P″ celui de l'eau. $\frac{P}{P'}$ sera le poids spécifique de la substance par rapport à l'alcool, et $\frac{P'}{P''}$ celui de l'alcool par rapport à l'eau. Or le produit de ces deux fractions est $\frac{P}{P''}$, poids spécifique de la substance par rapport à l'eau. On voit que c'est le même calcul que pour effectuer la correction relative à l'eau à t^0.

Si, par exemple, il s'agit de déterminer la densité du sucre, on opérera, par la méthode du flacon, soit avec de l'huile d'olive, soit avec l'essence de térébenthine, le sucre étant complètement insoluble dans ces liquides.

2° *Corps poreux.* — Nous entendons par là, comme on le fait vulgairement, les corps, tels que le liège, le bois, qui renferment de nombreuses lacunes dans leur masse. On peut considérer ces corps à deux points de vue, relativement à leur volume et à leur densité. Si l'on prend une certaine masse de l'un de ces corps, elle est caractérisée par son poids P; mais on peut lui attribuer deux volumes différents : soit un *volume apparent* V, qui est son volume extérieur, celui qu'elle paraît occuper dans l'espace; soit un volume réel v, qui est le volume *occupé réellement* par sa matière, abstraction faite des lacunes interstitielles. A chacun de ces volumes correspond un poids d'eau différent. Soit P′ le poids du volume V d'eau à t^0, et p' le poids du volume v' : en prenant le rapport $d = \frac{P}{P'}$ on aura la *densité apparente*, et en prenant le rapport $\frac{P}{P'} = d'$ on aura la *densité réelle.* On obtient l'un et l'autre coefficient par la méthode du flacon.

Densité apparente. — On pèse le corps dans l'air : soit P son poids. On le recouvre d'une mince couche de cire, puis on le pèse de nouveau : soit $P + p$ le poids; p représente le poids de la cire. Enfin, on détermine la perte de poids ϖ dans l'eau du flacon, comme il a été indiqué ci-dessus : ϖ représente le poids P′ d'un volume égal au volume apparent du corps, augmenté du poids p' d'un volume d'eau égal à celui de la couche de cire. Or, si δ est la densité connue de la cire, le volume de la couche est $\frac{p}{\delta}$ et le poids p' du même volume d'eau est $p' = \frac{p}{\delta} e$. On a donc

$$\varpi = P' + \frac{p}{\delta} e,$$

d'où

$$P' = \varpi - \frac{p}{\delta} e,$$

d'où enfin

$$d = \frac{P}{\pi - \frac{p}{\delta} e}.$$

Densité réelle. — On réduit en poudre le poids P du corps, et l'on fait ainsi disparaître l'excès de volume dû à la porosité. On mesure ensuite sa densité par la méthode du flacon. Seulement on a soin, une fois que le corps est immergé dans l'eau du flacon, de placer celui-ci, tout ouvert, dans le vide, et de l'y laisser assez longtemps pour chasser toutes les bulles d'air interposées entre les particules de la poudre solide.

Remarque. — En appliquant cette méthode aux différents bois, on a reconnu que la matière qui les constitue a sensiblement la même densité réelle : ce qui n'est pas étonnant, puisque cette matière est formée principalement de cellulose. La densité réelle du bois est donc sensiblement constante. Au contraire, la densité apparente est très variable avec l'essence de l'arbre d'où il provient. Elle varie depuis 0,24 pour le liège jusqu'à 1,33 pour l'ébène.

3° *Corps solides altérables par les liquides.* — Enfin, il est des substances qu'on ne peut mettre en contact avec aucun liquide sans les altérer : telle est la poudre de guerre ou de chasse. Dans ce cas, on détermine d'abord le poids P du corps, puis son volume V, sans le mettre en contact avec aucun des liquides usuels. La densité est donnée par la formule $d = \frac{V}{P}$.

Pour déterminer V, on s'est longtemps servi d'un appareil appelé *voluménomètre*, dans lequel la poudre n'est mise au contact que d'une atmosphère gazeuse. Le principe de la méthode est une application de la loi de Mariotte, que nous exposerons plus tard. Mais nous devons dire dès à présent que cette méthode a dû être abandonnée, par suite d'une cause d'erreur inhérente à la composition des poudres. Le charbon qu'elles contiennent a la propriété de condenser les gaz en proportion variable suivant la pression de l'atmosphère ambiante : ce phénomène rend la loi de Mariotte inapplicable et, par suite, l'appareil lui-même inutile. On se contente donc de mesurer le volume d'un poids P de poudre par celui du mercure qu'elle déplace, après qu'on l'a débarrassée, dans le vide, des bulles gazeuses qu'elle retient condensées.

173. Tableau des densités à 0° de quelques solides usuels.

Platine écroui	23,000	Gallium fondu	6,08
Osmium non écroui	22,477	Diamant	3,501 à 3,551
Platine fondu	21,16	Flint-glass	3,329
Or fondu	19,258	Marbre statuaire	2,837
Plomb fondu	11,352	Ardoise	2,89
Argent fondu	10,474	Granit	2,70
Bismuth fondu	9,822	Aluminium fondu	2,56
Cuivre rouge passé à la filière	8,878	Verre de Saint-Gobain	2,488
— — fondu	8,788	Soufre octaédrique	2,07
Laiton	8,595	Sodium	0,972
Acier non écroui	7,816	Glace fondante	0,950
Fer en barre	7,788	Potassium	0,865
— fondu	7,207	Hêtre	0,852
Étain fondu	7,291	Orme	0,80
Fonte	7,055	Sapin jaune	0,65
Zinc fondu	6,861	Peuplier d'Italie	0,38
Antimoine fondu	6,712	Liège	0,24

174. **Densités des liquides.** — On emploie pour les liquides la même méthode de détermination que pour les solides, et on l'applique à l'aide de trois procédés analogues.

1° *Procédé de la balance hydrostatique.* — Au crochet de l'un des plateaux de la balance on suspend un corps sur lequel le liquide dont on cherche le poids spécifique n'ait pas d'action chimique. On prend ordinairement une boule en verre creux, con-

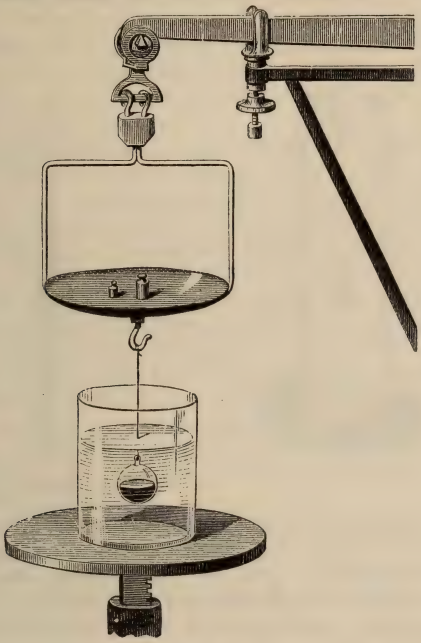


Fig. 186.

venablement lestée de plomb ou de mercure (fig. 186). On lui fait équilibre dans l'autre plateau avec une tare. On plonge ensuite le corps successivement dans l'eau distillée, puis dans le liquide dont on cherche le poids spécifique : l'équilibre est rompu chaque fois ; les poids P et P′ qu'il faut ajouter pour le rétablir représentent le poids de l'eau déplacée, puis celui du liquide, à volume égal : on a $D = \frac{P}{P}$.

2° *Procédé de l'aréomètre.* — L'aréomètre qu'on emploie pour les liquides est dû à Fahrenheit (fig. 187).

Description de l'appareil. — Ce flotteur a une forme analogue à celle de l'aréomètre de Nicholson; mais il n'a pas de plateau à la partie inférieure, et il est tout en verre, afin de pouvoir être placé dans toute espèce de liquides. Sa tige porte aussi un point d'affleurement, destiné à obtenir un volume immergé constant. Enfin, il est lesté à la partie inférieure par une petite boule remplie de mercure.

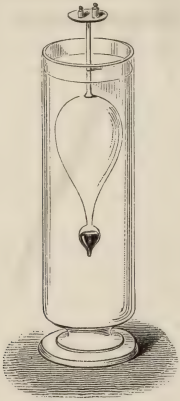


Fig. 187.

Fig. 188.

Opération préalable. — Avant d'expérimenter avec cet aréomètre, on en détermine le poids avec précision : soit Q ce poids.

Première opération. — On fait flotter l'aréomètre dans une éprouvette remplie d'eau distillée et l'on ajoute des poids dans la capsule supérieure jusqu'à ce que le point d'affleurement atteigne le niveau de l'eau. En cet état, d'après la première condition d'équilibre des corps flottants (108), le poids de l'aréomètre, ajouté au poids qui est dans la capsule, représente le poids d'un volume d'eau égal à celui de la partie immergée de l'instrument. Soient p la somme des poids marqués mis sur le plateau supérieur et P le poids total du volume d'eau déplacé, on a une première équation, correspondant à ce premier équilibre $P = Q + p$.

Deuxième opération. — On détermine de la même manière le poids d'un égal volume du liquide dont on cherche le poids spécifique et l'on a $P' = Q + p'$.

En faisant le quotient du dernier poids par le premier, on a la densité cherchée :

$$D = \frac{P}{P'} = \frac{Q + p}{Q + p'}.$$

3° *Procédé du flacon.* — Pour les liquides, on fait usage d'un petit flacon de forme spéciale (fig. 188) : il se compose d'un réservoir cylindrique *b* auquel est soudée une tige capillaire, puis à celle-ci un tube plus gros *a*, qu'on peut fermer par un bouchon de verre (dans le cas où l'on expérimente sur des liquides volatils). Sur la tige capillaire est un point de repère *c*, qui sert à marquer un volume constant de liquide.

Remplissage du flacon. — Pour remplir le flacon, on introduit dans le réservoir un tube très fin, soit un tube filiforme en verre étiré, soit un tube capillaire en argent : tel était celui qu'employait Regnault, sous le nom de *fil capillaire d'argent.* On verse le liquide dans l'entonnoir supérieur et l'on aspire l'air intérieur : la pression atmosphérique fait alors pénétrer le liquide dans le réservoir inférieur. Le tube capillaire sert encore à expulser les bulles d'air adhérentes au verre et à enlever l'excès du liquide. Ce procédé étant susceptible d'une grande précision, il convient d'opérer à zéro. Pour cela, après avoir rempli le flacon à la température ambiante, on le porte dans la glace fondante et, quand il en a pris la température, on enlève l'excès du liquide au-dessus du repère. On lui laisse reprendre la température extérieure avant de le peser, afin d'éviter le dépôt de rosée sur le flacon pendant l'opération.

Première opération. — On place d'abord le flacon plein d'air sur l'un des plateaux de la balance, et l'on met sur le même plateau des poids marqués dont la somme soit supérieure au poids probable du liquide le plus lourd qui doit remplir le flacon ; puis on fait la tare.

Deuxième opération. — On remplit ensuite le flacon du liquide le moins lourd, comme il vient d'être dit ; on l'essuie, on le laisse revenir à la température ambiante et on le replace sur le plateau. L'équilibre est détruit et, pour le rétablir, il suffit d'enlever une portion des poids marqués. Soit P la somme de ces poids enlevés : c'est le poids d'un volume du liquide égal à celui du flacon à 0°, obtenu par double pesée.

Troisième opération. — On remplit ensuite le même flacon du second liquide, puis on le replace sur le plateau. L'équilibre précédent sera évidemment rompu, mais on n'aura qu'à enlever

encore quelques poids marqués pour le rétablir de nouveau : soit P′ la somme des poids enlevés dans les deux opérations successives, P″ est le poids d'un liquide égal au volume du flacon à 0°.

En faisant le quotient de ces deux poids (dans un ordre convenable), on a la densité cherchée $D = \frac{P}{P'}$.

$\frac{P}{P'}$ représente la densité à 0° du liquide par rapport à l'eau à 0° ; $\frac{P}{P_0} e_0$ représenterait sa densité à 0° par rapport à l'eau à 4°.

4° *Méthode des colonnes liquides équivalentes.* — Tous les procédés précédents sont des applications plus ou moins directes du principe d'Archimède. On peut employer une autre méthode qui est une application des conditions d'équilibre de deux liquides superposés dans deux vases communiquants.

En effet, supposons que l'une des branches du tube (fig. 182) contienne de l'eau et l'autre branche de l'huile, et que les hauteurs respectives des colonnes liquides qui se font équilibre soient 38 centimètres pour l'huile et 35 pour l'eau. La densité de l'eau étant prise pour unité, si l'on représente par x celle de l'huile, on a l'équation d'équilibre

$$\frac{38}{35} = \frac{1}{x}; \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{35}{38} = 0{,}921.$$

Remarque. — Nous verrons plus tard que cette méthode a été utilisée par Dulong et Petit, puis par Regnault, pour comparer les densités du mercure à différentes températures et pour en déduire la loi de dilatation de ce liquide.

175. **Tableau des densités à 0° de quelques liquides usuels.**

Mercure	13,596	Eau distillée, à 4°	1,000
Brome	2,966	— — à 0°	0,9998
Acide sulfurique monohydraté	1,841	Vin de Bordeaux	0,994
— azotique quadrihydraté	1,42	Esprit de bois	0,928
Sulfure de carbone	1,263	Huile d'olive	0,915
Acide chlorhydrique hexhydraté	1,208	Huile de naphte	0,867
— acétique monohydraté	1,063	Essence de térébenthine	0,861
Lait de vache	1,030	Alcool absolu	0,795
Eau de mer	1,026	Éther sulfurique	0,730

ARÉOMÈTRES.

176. **Différents types d'aréomètres.** — On construit deux sortes d'aréomètres : les aréomètres dits *à volume constant et à poids variable* et les aréomètres *à poids constant et à volume variable.*

Les aréomètres de Nicholson et de Fahrenheit, que nous avons décrits précédemment, appartiennent à la première catégorie. Ils sont *à volume constant*, parce qu'on les fait toujours plonger jusqu'au même trait d'affleurement, et *à poids variable*, parce qu'on réalise cette immersion en les surchargeant de poids qui *varient* avec les solides ou les liquides sur lesquels on expérimente. Leur unique usage est la détermination, approximative mais rapide, des densités.

Nous avons dit que le physicien Charles appelait le premier de ces instruments *aréomètre-balance*. Il sert, en effet, à effectuer la double pesée du fragment solide dont on cherche la densité. L'aréomètre de Fahrenheit pourrait servir de balance dans le même cas et de la même manière.

Les aréomètres de la deuxième espèce sont dits *à volume variable et à poids constant*, parce qu'ils n'ont pas de point d'affleurement fixe et conservent toujours le même poids. Ces instruments servent, dans la pratique (sous les noms divers de *pèse-sels*, *pèse-acides*, *pèse-liqueurs*), pour déterminer rapidement non pas la densité, mais le degré de concentration des dissolutions salines, des acides et des liqueurs alcooliques.

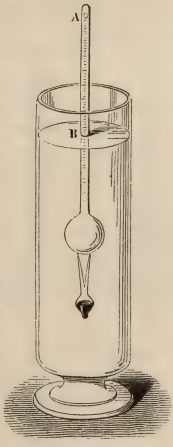


Fig. 189.

177. **Aréomètres de Baumé.** — *Description.* — Baumé, pharmacien à Paris, construisit, au commencement du siècle, deux types d'aréomètres à poids constant, dont l'usage est encore très répandu. Ce sont des flotteurs de verre, formés d'une tige graduée à laquelle est soudée une cavité sphérique (fig. 189) ou cylindrique (fig. 191) remplie d'air, suivie elle-même d'une boule plus petite, qui est pleine de mercure servant de lest.

Graduation. — L'un de ces instruments doit servir pour des liquides plus denses que l'eau, tels que les acides, les sirops ou les dissolutions salines : on l'appelle *pèse-acides* ou *pèse-sels*; l'autre doit servir pour des liquides

moins denses que l'eau, tels que les éthers, les solutions ammoniacales, les liqueurs alcooliques ou *esprits :* on l'appelle *pèse-esprits* ou *pèse-liqueurs*. En vue de chacun de ces usages. Baumé adopta un mode particulier de graduation arbitraire.

1° *Pèse-acides, pèse-sels, pèse-sirops.* — On règle le poids de l'instrument (on le *leste*) de manière que, dans l'eau pure, à la température de 12°,5 centigrades (ou 10° Réaumur), il s'enfonce à peu près jusqu'à l'extrémité supérieure de sa tige : en ce point A, on marque 0° (fig. 189). Puis on plonge l'instrument dans une dissolution de 85 parties d'eau en poids et de 15 de sel marin. Ce liquide (dont le poids spécifique est 1,116), étant plus dense que l'eau pure, l'appareil ne s'y enfonce que jusqu'à un point B, où l'on marque 15. On partage enfin l'intervalle des points A et B en 15 parties égales, et l'on continue les divisions jusqu'au bas de la tige. Cette tige doit être assez longue pour porter 70 degrés environ dans les pèse-acides. Ces divisions sont ordinairement marquées sur une bande de papier qu'on introduit dans l'intérieur de la tige.

L'aréomètre ainsi construit ne peut évidemment servir que pour les liquides où il s'enfoncera moins que dans l'eau, c'est-à-dire pour les liquides plus denses que l'eau.

2° *Pèse-esprits, pèse-liqueurs.* — Sur les instruments destinés aux liquides moins denses que l'eau, le zéro devra nécessairement se trouver au bas de la tige (fig. 190). On marque 0 au point d'affleurement dans une dissolution de 90 parties, en poids, d'eau distillée et de 10 parties de sel marin (densité = 1,0847) et l'on marque 10 au point d'affleurement dans l'eau distillée (à la température de 12°,5 C). Ce dernier point est nécessairement au-dessus du précédent sur la tige de l'aréomètre, puisque l'eau pure est moins dense que la dissolution saline. On divise ensuite l'intervalle de ces deux points en 10 parties égales et l'on prolonge les divisions jusqu'au sommet de la tige (qui doit pouvoir porter de 58 à 60 degrés).

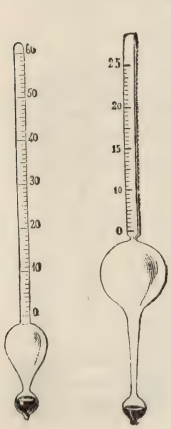


Fig. 190.

Usages. — Ces deux aréomètres, étant gradués d'une manière tout à fait arbitraire, ne peuvent indiquer ni les densités des liquides ni les quantités de sel dissoutes. Cependant ils sont avantageusement employés pour reconnaître si une solution saline ou acide a été portée à un point de concen-

tration déterminé. On sait, par exemple, que le pèse-acides doit marquer :

66 dans l'acide sulfurique concentré,
36 dans l'acide nitrique du commerce,
22 dans l'acide chlorhydrique ordinaire,
3 dans l'eau de mer (à la température de 22° C.).

On sait aussi que le même instrument doit marquer, à froid :

35 dans un sirop bien confectionné.

Cela permet, dans la fabrication des sirops, de surveiller méthodiquement la marche de leur concentration.

De même, le pèse-esprits doit marquer normalement :

56 dans l'éther ordinaire du commerce,
65 dans l'éther ordinaire rectifié,
De 22 à 25 dans l'ammoniaque du commerce, plus ou moins concentrée.

Remarque. — *Autre mode de graduation du pèse-acides.* — On peut substituer à la dissolution saline de Baumé l'un quelconque des liquides précédents, dont le degré est bien connu. Ainsi l'on peut prendre comme points fixes : 1° le point d'affleurement dans l'eau pure, on l'on marquera 0; 2° le point d'affleurement dans l'acide sulfurique concentré, ou l'on marquera 66. On continuera la graduation comme précédemment. Ce procédé expéditif sert fréquemment aux constructeurs.

178. **Areomètre de Cartier.** — On a longtemps employé dans la régie française, comme pèse-esprits, l'aréomètre de Cartier. Ce n'était pas autre chose qu'un aréomètre Baumé dont la graduation avait été légèrement modifiée, ou plutôt altérée par Cartier, dans une intention de concurrence commerciale. Il conservait le degré 10 pour le point d'affleurement dans l'eau pure, et établissait à partir de ce degré une division arbitraire en degrés égaux, sans prendre de second point fixe. Le degré 29 de cette échelle coïncidait approximativement avec le degré 31 de l'aréomètre Baumé. C'est à l'échelle de cet instrument que se rapportent les dénominations usuelles d'alcools à 25°, à 30°, à 40°, et d'eaux-de-vie à 19°, à 20°, à 22°. Mais elles tendent à disparaître de plus en plus, pour faire place aux indications de l'alcoomètre centésimal.

179. **Alcoomètre centésimal de Gay-Lussac.** — *Définition.* — L'*alcoomètre centésimal* est un aréomètre à poids constant, imaginé par Gay-Lussac pour mesurer la *force* des liquides spiritueux *à* 15° C., c'est-à-dire le nombre de centièmes d'alcool pur, en volume, que contiennent ces liquides à cette température.

Description et usage. — La forme de l'alcoomètre est très analogue à celle du pèse-esprits de Baumé (fig. 191) ; mais la graduation en est différente : elle est absolument empirique. L'échelle, por-

tée par la tige, est divisée en 100 parties, dont chacune représente un centième d'alcool en volume : le degré 0 correspond à l'eau pure, et le degré 100 à l'alcool absolu. Plongé dans un liquide spiritueux à la température de 15°, l'alcoomètre en donne immédiatement la force, parce que la graduation a été faite à cette em pérature. Par exemple, si à 15° l'alcoomètre s'enfonce dans une eau-de-vie jusqu'à la division 48, cela indique que cette eau-de-vie contient 48 centièmes de son volume d'alcool pur et le reste d'eau.

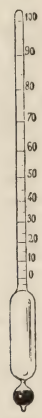


Fig. 191.

Graduation. — On établit l'échelle de l'alcoomètre en plongeant successivement l'instrument dans des mélanges d'alcool et d'eau faits dans des proportions connues, à la température fixe de 15°. Cette opération demande des précautions particulières, à cause du phénomène suivant.

Lorsqu'on mélange un volume V d'alcool absolu avec un volume V′ d'eau pure, le volume total V″, qui devrait être égal à V + V′, est plus petit que V + V′. Il y a donc eu une contraction, laquelle est égale à (V + V′) — V″. De plus, cette contraction est variable avec les volumes V et V′ qui sont mélangés. La contraction est maximum pour un mélange de 52,5 parties d'alcool et de 47,7 d'eau (en volume), et elle est alors égale à 3,65 pour 100. Il faut donc en tenir compte dans la graduation.

Pour cela, on prend une éprouvette à pied, graduée en 100 parties égales, et y ayant versé de l'alcool absolu jusqu'à la division 95, on achève de la remplir jusqu'à 100 avec de l'eau distillée : on obtient ainsi un mélange qui contient certainement, 95 pour 100 d'alcool absolu, et si l'on y plonge l'instrument, il est légitime de marquer 95 au point d'affleurement. On vide alors l'éprouvette, on y verse de l'alcool jusqu'à 90, et l'on achève encore de remplir jusqu'à 100 avec de l'eau distillée : cela donne évidemment un mélange qui contient 90 pour 100 d'alcool absolu ; on peut donc marquer 90 au point d'affleurement de l'alcoomètre dans cette dernière liqueur. On détermine de la même manière tous les degrés, de 5 en 5, depuis 90 jusqu'à la division 5. Enfin, l'on marque 100° dans l'alcool absolu et 0° dans l'eau pure ; on divise en cinq parties égales chacun des intervalles de 5 en 5, et l'instrument est gradué.

Remarques. — 1° Il importe d'observer que, l'alcoomètre de Gay-Lussac ayant été gradué à 15°, ce n'est qu'à cette température que ses indications sont exactes. A des températures plus hautes ou plus basses, les liquides alcooliques se dilatent ou se contractent et deviennent, par conséquent, plus légers ou plus denses : de sorte que l'instrument s'y enfonce plus ou moins, bien que

leur richesse en alcool n'ait pas varié. Entre 0° et 30° C., l'erreur ainsi commise peut aller jusqu'à 30 pour 100 de la force de la liqueur.

Table de correction. — On peut corriger cette erreur à l'aide d'une table de correction, construite par Gay-Lussac. C'est une table à double entrée qui contient dans une colonne verticale les températures de zéro à 30°, et dans une colonne horizontale les degrés de l'alcoomètre de zéro à 100. On se sert de cette table comme de la table de multiplication ordinaire : au point de rencontre de la verticale abaissée de la case qui contient les degrés alcoométriques avec l'horizontale qui part de la case où sont les degrés du thermomètre, se trouve le nombre qui indique la richesse réelle du liquide spiritueux. Par exemple, une eau-de-vie étant à la température de 22°, et l'alcoomètre y marquant 36, on trouve dans la table que la richesse réelle de cette liqueur est 33 : c'est-à-dire qu'elle contient les 33 centièmes de son volume d'alcool, et, par suite, 67 centièmes d'eau.

Formule de correction. — On peut aussi faire cette correction à l'aide d'une formule empirique, qui comprend tous les nombres inscrits dans la table. En appelant x le degré cherché, n le degré observé à la température de l'expérience $(15 + \theta)$, et b un coefficient, qui est égal à 0,4, on a

$$x = n - b\theta.$$

Si la température de l'expérience est inférieure à 15°, on commet une erreur par défaut, et la correction doit être négative. Le degré corrigé x est alors

$$x = n + b\theta.$$

2° Les indications de l'alcoomètre de Gay-Lussac ne se rapportent qu'à des mélanges d'alcool et d'eau ; par conséquent, si l'on plongeait directement l'instrument dans du vin, il n'en donnerait pas la richesse alcoolique, à cause des substances étrangères que ce liquide renferme ; mais si, par une distillation préalable, on sépare de ces substances l'alcool du vin, l'alcoomètre devient applicable. Plus tard, à propos de la *distillation*, nous dirons comment on effectue cette séparation, à l'aide d'un petit alambic construit par M. Salleron.

180. **Extension de la graduation centésimale aux pèse-sels, pèse-lait, pèse-vins, pèse-urine.**— On construit aussi des pèse-sels gradués d'après le principe de l'alcoomètre centésimal. Ces instruments permettent de déterminer immédiatement la quantité de tel ou tel sel qui est contenue dans une certaine dissolution. Leur zéro correspond toujours à l'eau pure. On marque successivement 5, 10, 15, 20... aux différents points d'affleurement dans des dissolutions qui contiennent 5, 10, 15, 20... parties de sel ; puis on divise chaque intervalle en 5 parties égales.

Ce mode de graduation offre un inconvénient : c'est qu'il faut un pèse-sels spécial pour chaque espèce de sel. Un instrument qui aurait été gradué pour l'azotate de potasse, par exemple, donnerait des indications complètement fausses dans une dissolution de carbonate de potasse ou de tout autre sel.

On construit d'après le même principe des *pèse-lait* et des *pèse-vins*, destinés à mesurer la quantité d'eau qu'on peut avoir introduite par fraude dans ces liquides ; mais ces instruments ne présentent pas une utilité réelle, parce que, les densités du lait et du vin étant très variables, même lorsque ces liquides sont parfaitement naturels, on pourrait attribuer à la fraude ce qui serait dû uniquement à la mauvaise qualité naturelle du lait ou du vin. Plusieurs médecins font aussi usage du *pèse-urine*, fondé sur le même principe.

181. **Graduation par comparaison.** — Pour tous les aréomètres centésimaux d'une même catégorie, par exemple pour tous les alcoomètres, il est

inutile de répéter la série des opérations que comporte la graduation de Gay-Lussac; il suffit de graduer empiriquement, par la méthode indiquée, un étalon de chaque espèce; on peut ensuite graduer les autres par comparaison.

Principe de la méthode. — Cette méthode de graduation est fondée sur ce fait que *les échelles de deux alcoomètres* (ou de deux aréomètres centésimaux de même espèce) *sont semblables.* Cela veut dire que le *rapport des capacités* u et u_1, qui correspondent à la longueur de 1 degré dans chaque échelle, est un nombre constant.

Ce fait est une conséquence directe des conditions d'équilibre des corps flottants. En effet, soient deux aréomètres de poids P et P_1, qu'on suppose gradués l'un et l'autre par la méthode de Gay-Lussac : ces deux instruments doivent marquer le même degré N lorsqu'on les plonge dans un même liquide de densité d. L'équation d'équilibre sera,

pour le premier $$P = Nud,$$

et pour le second $$P_1 = Nu_1 d.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{P}{P_1} = \frac{u}{u_1}.$$

Le rapport des degrés $\frac{u}{u_1}$ étant constant pour deux instruments de poids P et P_1, il en résulte nécessairement que les deux échelles sont semblables.

Opération. — La graduation se fera très simplement en utilisant cette similitude, à la condition toutefois de supposer les tiges des instruments par-

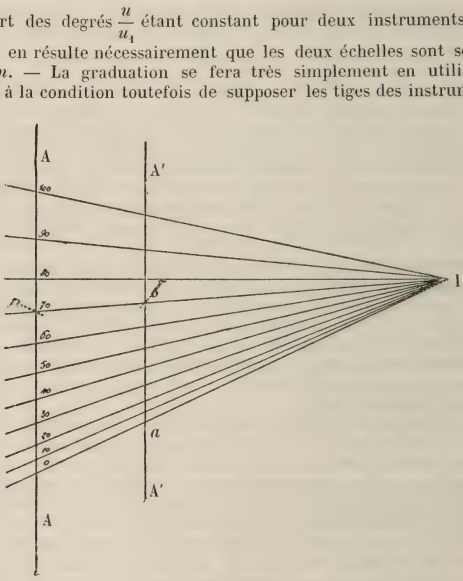


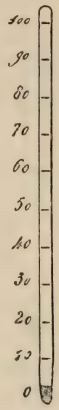
Fig. 192.

faitement calibrées, car alors la division en parties de capacités semblables se ramènera à une division en parties de longueurs semblables. On commen-

cera par porter l'échelle AA de l'étalon sur une feuille de papier (fig. 192), puis d'un point I quelconque on mènera un système de transversales allant aux divers degrés de l'échelle-type. Cette construction graphique préliminaire servira à la graduation de tous les instruments de même espèce.

Pour l'un quelconque de ces instruments, on déterminera directement le degré 0; puis le degré n, en le plongeant successivement dans l'eau pure, puis dans une dissolution qui marque n à l'aréomètre étalon. Soit ab cet intervalle $(0-n)$ sur l'instrument à graduer; il a une capacité égale à nu_1; de même l'intervalle $(0-n)$ sur l'étalon a une capacité égale à nu : en comparant ces deux intervalles $\frac{nu}{nu_1}$, on aura le rapport de similitude cherché $\frac{u}{u_1}$. Cette comparaison s'opère graphiquement de la manière suivante : On cherche sur la feuille de papier une parallèle A'A' à AA, qui ait, entre les transversales I0 et In, une longueur précisément égale à ab : cette parallèle A'A' sera évidemment divisée, par le système de transversales, en parties proportionnelles au rapport $\frac{u}{u_1}$, et elle représentera exactement l'*échelle cherchée*.

182. **Densimètres et volumètres.** — 1° *Définition.* — On appelle ainsi des aréomètres à poids constant qui sont gradués rationnellement, de manière à indiquer tout de suite soit les *densités* des liquides où on les plonge, soit leurs *volumes spécifiques* c'est-à-dire les *volumes de l'unité de poids* de ces liquides. Ces instruments ont été imaginés par Gay-Lussac. Leur forme est analogue à celle des aréomètres de Beaumé; mais il est très important que leurs tiges soient le mieux calibrées possible.



Fgi. 193.

2° *Principe de la graduation.* — Supposons que l'on marque 100 au point d'affleurement de l'instrument (fig. 193) dans l'eau pure à 4°. Ce point est considéré comme le 100e degré d'une division en parties d'égale capacité, dont le zéro serait à la partie inférieure de l'instrument; celui-ci est supposé parfaitement cylindrique, de manière que les parties d'égale longueur aient la même capacité. Soit u le volume d'une division, et soit P le poids total de l'instrument, on a évidemment

$$[1] \qquad P = 100\,u.$$

Si l'on plonge l'instrument dans un liquide quelconque, de densité x, et qu'il s'y enfonce jusqu'au degré N, on aura

$$[2] \qquad P = Nux.$$

Donc 1° le volume occupé par un poids P du liquide sera Nu et le *volume spécifique* y du liquide sera donné par l'équation

$$y = \frac{Nu}{P} = \frac{Nu}{100\,u} = \frac{N}{100};$$

2° la densité du liquide sera donnée par l'équation

$$100\,u = Nux, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{100}{N}.$$

Remarque. — Si, au lieu d'eau pure à 4°, on avait pris de l'eau pure à t^0, ce qui est le cas ordinaire, il n'y aurait pas d'autres changements que l'introduction du facteur e, densité de l'eau, dans l'équation [1] et dans ses conséquences. On aurait

$$P = 100\,ue \quad \text{et} \quad x = \frac{100\,e}{N},\ y = \frac{N}{100\,e}.$$

1° *Opération.* — On opère cette graduation de deux manières un peu différentes, suivant qu'on destine le densimètre aux liquides plus denses que l'eau ou bien aux liquides moins denses.

I. On leste l'appareil de manière que dans l'eau pure à 4° il plonge jusqu'en un point A (fig. 194) situé à l'extrémité supérieure de la tige. Si l'appareil était réduit à un tube cylindrique, bien calibré, comme celui de la figure 193, ce point fixe unique suffirait pour en établir l'échelle, ainsi qu'il a été dit ci-dessus. Mais on préfère habituellement à la forme exclusivement cylindrique la forme des aréomètres ordinaires, qui présentent une partie renflée, surmontée d'une tige cylindrique (fig. 194). Il est nécessaire, dans ce cas, de déterminer un deuxième point fixe, afin d'établir la division en 100 parties égales, sans jauger la partie renflée. Pour cela, on choisit un liquide dont la densité soit connue et plus grande que celle de l'eau dans le rapport de 4 à 3, par exemple ; on y plonge l'instrument, qui n'entre plus que jusqu'à un certain point B de la tige Soient V et v les volumes immergés successivement dans l'eau et dans le second liquide ; on a les deux équations suivantes, qui correspondent aux deux équilibres successifs

Fig. 194.

$$P = V \quad \text{et} \quad P = vD,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{v}{V} = D = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad v = \frac{3}{4}V.$$

Si donc on représente par 100 le volume V, le volume v le sera par 75. En conséquence, on inscrit les nombres 100 et 75 respectivement aux points A et B ; on partage la distance AB en 25 parties égales (chacune de ces parties est $\frac{1}{25}$ de AB, ou $\frac{1}{100}$ de V, c'est-à-dire du volume immergé dans l'eau pure) ; enfin on continue les divisions jusqu'à la partie inférieure de la tige : celle-ci doit être assez longue pour descendre environ jusqu'au degré 50.

On se sert ensuite de l'instrument comme on l'a indiqué ci-dessus. Pour avoir la densité d'un liquide, on note la division n, où affleure l'aréomètre dans ce liquide : on a alors $d = \frac{100}{n}$. S'il affleure, par exemple, au degré 54 dans de l'acide sulfurique non concentré, la densité de cet acide sera $\frac{100}{54} = 1{,}85$

Quant au *volume spécifique*, il serait donné, au contraire, par la formule $\frac{n}{100}$; pour le même acide sulfurique, le volume spécifique serait 0,54.

II. Dans le cas des liquides moins denses que l'eau, il faut lester l'instrument de manière que l'affleurement, dans l'eau distillée à 4°, ait encore lieu vers le bas de la tige : on marque 100° en ce point, en supposant que le degré 0 de l'échelle corresponde au point le plus bas du réservoir de l'instrument.

L'équation d'équilibre est toujours

$$100\,u = \mathrm{P}.$$

On le plonge ensuite dans un liquide de densité connue, égale, par exemple, à 0,80. Il s'y enfonce davantage et affleure à un degré N tel, que l'on ait

$$\mathrm{N}u\,\frac{80}{100} = \mathrm{P}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N}u\,\frac{80}{100} = 100\,u, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N} = 125.$$

On devra donc y marquer 125. On divisera l'intervalle en 25 parties égales et l'on prolongera la division jusqu'au sommet de la tige (environ jusqu'au degré 150).

Remarque. — On voit que ce dernier procédé ne diffère du précédent que par la place qu'on donne au degré 100. On pourrait construire un volumètre qui servirait à la fois pour les liquides plus denses et pour les liquides moins denses que l'eau : il suffirait de le lester de manière que le point 100 fût placé vers le milieu de la tige : la moitié inférieure de la tige porterait les divisions inférieures à 100 pour les liquides plus denses, et la moitié supérieure les divisions supérieures à 100 pour les liquides moins denses que l'eau.

4° *Procédé de graduation de Despretz.* — Despretz graduait les volumètres à l'aide d'un procédé qui peut s'appliquer aussi bien aux liquides plus denses qu'aux liquides moins denses que l'eau. Pour ces derniers, par exemple, on opère de la manière suivante :

On leste l'instrument de manière qu'il s'enfonce dans l'eau pure à 4° jusqu'au bas de la tige et l'on marque 100, comme ci-dessus, à ce point d'affleurement. On attache ensuite à l'extrémité supérieure de la tige un poids qui soit le quart de celui de l'instrument; puis on remet le tout dans l'eau pure. Or, la première équation d'équilibre étant

$$100\,u = \mathrm{P},$$

la seconde sera, en appelant N le nouveau point d'affleurement,

$$\mathrm{N}u = \frac{5}{4}\mathrm{P}.$$

En divisant membre à membre ces deux équations, il vient

$$\frac{\mathrm{N}}{100} = \frac{5}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N} = 125.$$

On inscrit donc ce dernier nombre en regard du nouveau point d'affleurement, puis on divise l'intervalle des points 100 et 125 en 25 parties égales, et l'on continue l'échelle jusqu'au sommet de la tige.

Pour les liquides plus denses que l'eau, on lestera l'instrument de manière qu'il s'enfonce dans l'eau pure jusqu'au sommet de la tige, et l'on marquera 100 à ce point d'affleurement. Puis on *diminuera* le poids total d'une fraction égale à un quart de sa valeur, et on le plongera de nouveau dans l'eau pure. Il affleurera en un point N, qui sera fourni par les équations

$$100\,u = \mathrm{P} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}u = \frac{5}{4}\mathrm{P}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N} = \frac{5}{4}100 = 75.$$

On inscrira ce nombre au point d'affleurement, et l'on achèvera la graduation comme ci-dessus.

5° *Différence entre les densimètres et les volumètres.* — Tous ces instru-

ments, ainsi gradués, sont, à proprement parler, des *volumètres*. En effet, ils donnent directement, à première vue, le *volume spécifique* des liquides où ils sont immergés, puisqu'on a $y = \frac{n}{100}$. Au contraire, il faut faire un calcul pour avoir la densité du liquide, puisqu'il faut appliquer la formule $x = \frac{100}{n}$. Pour transformer les volumètres en densimètres, il suffit d'effectuer d'avance le calcul de la formule $x = \frac{100}{n}$, pour tous les degrés de l'échelle volumétrique, et d'inscrire la densité correspondante en face de chaque degré. L'instrument donnera alors, par une simple lecture, la densité du liquide où on l'aura plongé : ce sera un *densimètre*.

185. **Utilisation des aréomètres de Baumé comme volumètres et densimètres.** — *Module d'un aréomètre.* — Les aréomètres de Baumé, de Cartier, et, en général, tous les aréomètres à poids constant, munis d'une tige cylindrique bien calibrée et divisée en degrés égaux, peuvent servir de *volumètres* et de *densimètres*. Tels qu'ils sont, en effet, ce sont des volumètres à graduation arbitraire.

Module ou *valeur volumétrique du degré.* — Soit V le volume total de l'instrument, et v la capacité d'une division. On appelle *module* de l'aréomètre le rapport $\frac{v}{V}$: ce rapport caractérise l'échelle de l'aréomètre, il fixe la *valeur volumétrique* du degré. La première chose à faire, c'est de le déterminer. Pour cela, il suffit de connaître la densité des liquides qui ont servi à déterminer les points fixes. Considérons, par exemple, le pèse-acides de Baumé. Le degré 0° est au sommet de la tige ; il est l'origine d'une échelle en parties d'égale capacité, qui est censée se prolonger jusqu'au bas de l'instrument, mais qui, en réalité, ne va que jusqu'à l'extrémité inférieure de la tige, au 70e degré environ. L'affleurement dans l'eau pure (à 12°,5), qui a fixé le degré 0°, donne l'équation d'équilibre

$$[1] \qquad P = Ve,$$

en appelant P le poids total de l'aréomètre et e la densité de l'eau à 12°,5 ($e = 0{,}99949$). De même, l'affleurement dans la dissolution saline, lequel a fixé le degré 15°, donne l'équation d'équilibre

$$[2] \qquad P = (V - 15v)\, d,$$

en appelant d la densité connue de la solution saline de Baumé ($d = 1{,}116$). En combinant ces deux équations, il vient

$$Ve = (V - 15v)\, d, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{v}{V} = \frac{d - e}{15d} = \left(\frac{117}{16740}\right).$$

Application. — Posons ce module égal à μ. Connaissant le module μ de l'instrument, on peut utiliser celui-ci soit comme volumètre, soit comme densimètre. En effet, plongeons-le dans un liquide quelconque, dont le volume spécifique soit y et la densité x. L'affleurement aura lieu à un certain degré n qu'on lit sur l'échelle. L'équation d'équilibre est

$$[3] \qquad (V - nv)\, x = P$$

ou, en remplaçant P par sa valeur tirée de l'équation [1],

$$(V - nv)\, x = Ve,$$

et en divisant les deux membres par V, afin d'introduire le module μ,

$$\left(1 - n\frac{v}{V}\right)x = e, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{e}{1 - n\mu}.$$

Quant au volume spécifique y, on l'obtient en remarquant qu'un poids P du liquide correspond à un volume deplacé $(V - nv)$, et que, par suite, un poids 1 correspond au volume

$$\frac{(V - nv}{P} = \frac{V - nv}{Ve} = \frac{1 - n\mu}{e} = y.$$

Remarque. — On aurait pu poser cette formule immédiatement, sachant qu'on a, par définition,

$$y = \frac{1}{x}.$$

APPLICATIONS DIVERSES.

184. **Niveau d'eau.** — *Principe et description.* — Le *niveau d'eau* est un instrument d'arpentage, dont la construction est fondée sur les conditions d'équilibre d'un liquide pesant contenu dans des vases communiquants. Il se compose d'un tube de fer-blanc ou de laiton, coudé à ses deux extrémités ; à celles-ci sont adaptés deux tubes de verre D et E (fig. 195). Tout l'appareil est disposé

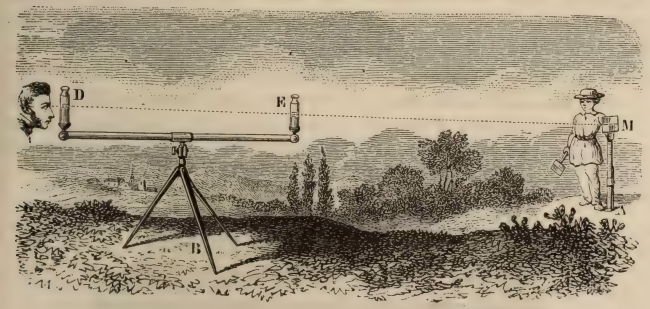


Fig. 195.

horizontalement sur un pied à trois branches, et l'on y verse de l'eau colorée jusqu'à ce que le liquide s'élève dans les deux fioles de verre jusqu'aux 3/4 environ de leur hauteur. L'équilibre étant établi, d'après le principe des vases communiquants les surfaces libres du liquide, en D et en E, sont dans un même plan horizontal.

Usage. — Cet instrument sert à *prendre des nivellements*, c'est-à-dire à déterminer la *différence de niveau* entre deux points, ou, autrement dit, leur distance verticale. Par exemple, si l'on veut trouver de combien un point B du sol est au-dessus d'un autre point A, on place en ce dernier point une *mire*. C'est une règle de bois formée de deux tiges à coulisse, et terminée par une plaque de fer-blanc M, qu'on appelle le *voyant*, et qui porte à son centre un point de repère. Cette mire étant disposée verticalement en A, un observateur, placé près du niveau, dirige, tangentiellement aux surfaces D et E, un rayon visuel vers la mire, et fait signe à un aide, qui la tient, de l'allonger ou de la raccourcir jusqu'à ce que le point de repère se trouve sur le prolongement de la ligne DE. Transportant alors la mire au point B, on répète la même opération. La distance entre la deuxième position de la mire et la première position mesure la distance verticale des points A et B.

On peut encore opérer en plaçant le niveau dans un lieu intermédiaire entre les deux points. On vise une mire placée successivement en ces deux points, et la différence des hauteurs du voyant, dans les deux visées, donne la distance verticale des deux points.

L'une ou l'autre de ces opérations constitue le *nivellement simple*. Elles suffisent dans tous les cas où les deux points sont assez rapprochés pour qu'on puisse faire la visée avec précision. Lorsque les points sont très éloignés, on établit entre eux des stations intermédiaires où l'on fait des nivellements successifs. La différence de niveau cherchée est la somme des nivellements partiels. Cette opération s'appelle le *nivellement composé*.

185. **Niveau à bulle d'air.** — *Principe, description et définitions.* — Le *niveau à bulle d'air* est un instrument de précision dont la construction est fondée sur la condition d'équilibre d'un liquide

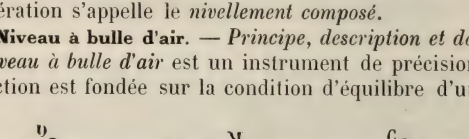


Fig. 196.

et d'un fluide superposés dans un même vase. Il consiste en un tube de verre AB faiblement cintré, qu'on remplit d'un liquide très fluide, comme l'alcool ou l'éther, en y conservant une petite bulle d'air (fig. 196). Ce tube, étant soudé à la lampe à ses deux extrémités, est renfermé dans un étui en laiton CD, muni

d'une large échancrure par où se voit une graduation tracée sur le verre, à sa partie supérieure. Cette gaine est ordinairement fixée sur une règle de même métal, dressée avec soin, qui sert de support à l'instrument.

Le niveau étant posé sur un plan quelconque, dès que les deux fluides intérieurs sont en équilibre, leur surface de séparation, qui est la surface du liquide, devient parfaitement horizontale, et la bulle d'air va se loger dans la partie la plus élevée du tube. La ligne idéale qui joindrait ses extrémités, étant une droite de la surface de séparation, est donc une ligne horizontale quelle que soit l'orientation du plan d'appui. Elle couperait l'échelle graduée du tube en deux traits, qui seraient variables avec l'orientation du plan d'appui. Mais si ce plan d'appui est horizontal, la bulle d'air vient se loger entre deux traits, qui définissent alors une ligne horizontale : ces deux traits seront toujours les mêmes toutes les fois que le niveau sera posé sur un plan horizontal; ils constituent donc des repères fixes *b* et *b'*, où (fig. 197) l'on marque ordinairement 0,0. La ligne *bb'* ou 00 s'appelle la *ligne des repères* du niveau.

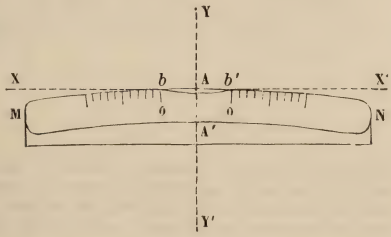


Fig. 197.

Réglage du niveau. — On dit qu'un niveau à bulle d'air *est réglé, lorsque la ligne des repères est parallèle à la base du niveau.* Le réglage est une opération qu'on doit faire soi-même et répéter de temps en temps avant de se servir de l'instrument. Voici en quoi elle consiste :

1° On vérifie d'abord si le niveau est réglé ou non. Pour cela, on le pose sur un plan fixe à peu près horizontal, puis on cherche, par tâtonnements, une position pour laquelle la bulle vienne se placer entre ses repères. On retourne alors l'instrument bout pour bout et sur place. S'il est réglé, la bulle vient se replacer entre ses points de repère.

En effet, soit MN la base du niveau et *bb'* la ligne des repères. Quand on retourne le niveau bout pour bout, il effectue un mouvement de rotation autour de l'axe YY', perpendiculaire au plan de la base MN : le point M vient en N, et réciproquement (fig. 198). Si la ligne *bb'* est parallèle à la base, elle sera perpendiculaire au même axe et exécutera autour de lui un mouvement de rotation : le point *b* viendra donc en *b'*, et réciproquement. Quant à la bulle, elle n'a pas bougé pendant le mouvement, parce qu'elle est assujettie à occuper toujours les points les plus élevés du tube; elle se retrouvera donc dans la même position par rapport aux repères.

2° Supposons, au contraire, que la ligne des repères soit oblique par rapport

à MN, par exemple, dans la position bb' (fig. 199). L'opération du retournement la mettra dans une position $b_1 b'_1$, symétrique par rapport à l'axe de rotation YY'. La bulle elle-même n'a pas changé de place : elle fait donc un angle bYb'_1, avec la nouvelle position de la ligne des repères. Cet angle est double de celui que fait celle-ci avec la ligne MN. Donc, en inclinant le niveau par rapport à son plan de l'angle $N_1Yb_1 = \frac{1}{2} bYb'_1$, on produira le parallélisme de bb' et de MN, et le niveau sera réglé.

On peut toujours obtenir ce résultat par tâtonnements. Dans les niveaux de

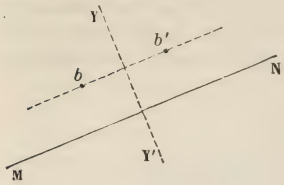


Fig. 198.

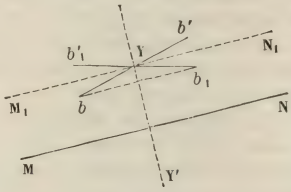


Fig. 199.

précision, la monture métallique est mobile autour d'un axe O. L'autre extrémité O' traverse librement une vis fixée à la base MN. Un ressort à boudin r tend à pousser cette extrémité de bas en haut, mais elle est maintenue dans une position fixée par un écrou mobile E (fig. 200).

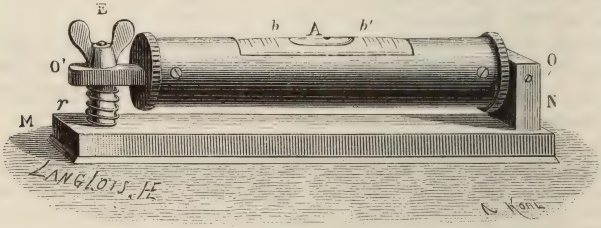


Fig. 200.

Conditions théoriques de perfection. — Un niveau à bulle d'air est théoriquement parfait lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :

1° Il doit être *parfaitement réglé;*

2° et 3° Il doit avoir une courbure *exactement circulaire* et *aussi faible que possible.*

Si la première condition est remplie, toutes les fois que la bulle viendra se loger entre les points de repère, on pourra en conclure sûrement que la base du niveau coïncide avec une horizontale du plan d'appui : cela résulte de la manière même dont le réglage a été fait.

Si la seconde condition est remplie, les déplacements de la bulle, sur l'échelle divisée, seront *exactement proportionnels* aux variations d'inclinaison de la base du niveau, et leur serviront de mesure.

En effet, soit bb' la position initiale de la bulle, lorsque le plan d'appui était horizontal ; elle coïncidait alors avec la ligne OO des points de repère (fig. 201, 1°). Si l'on aligne la base du niveau suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné sur l'horizon d'un angle α (fig. 201, 2°), tandis que la bulle garde sa position horizontale bb', la ligne des repères, qui reste toujours parallèle à la

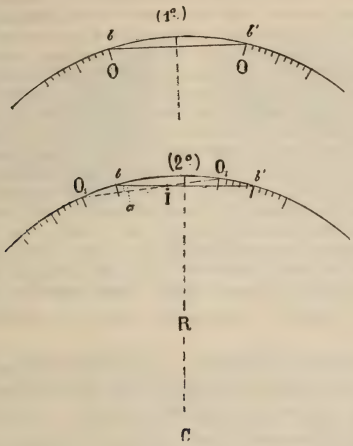


Fig. 201

base du niveau, s'incline comme celle-ci d'un angle α, et prend une nouvelle position O_1O_1 : l'angle I des lignes bb' et O_1O_1 est évidemment égal à α. Comme cet angle est ex-inscrit dans la circonférence à laquelle est censée appartenir l'arête circulaire du niveau, il a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés, c'est-à-dire $\frac{\text{arc } O_1b + \text{arc } O_1b'}{2}$. Or les arcs O_1O_1 et bb' sont égaux, comme étant sous-tendus, dans une même circonférence, par des cordes égales, les arcs O_1b et O_1b' sont aussi égaux ; on a donc

$$\frac{\text{arc } O_1b + \text{arc } O_1b'}{2} = \frac{2 \text{ arcs } O_1b}{2} = \text{arc } O_1b.$$

D'autre part, l'angle α serait mesuré dans la circonférence de rayon R (à laquelle appartient l'arête du niveau) par l'arc αR. On a donc

$$\text{arc } O_1b = \alpha R.$$

Or l'arc O_1b est précisément le déplacement apparent de la bulle : donc ce déplacement est *proportionnel à l'inclinaison du niveau*, et peut lui servir de mesure.

On voit, en outre, que le coefficient de proportionnalité R est le rayon de courbure du niveau. Par suite, le déplacement de la bulle sera d'autant plus grand, pour une même inclinaison du niveau, que le rayon de courbure du

niveau sera plus grand, et, par suite, *que la courbure sera plus petite*. La troisième condition, énoncée ci-dessus, est donc une *condition de sensibilité : un niveau sera d'autant plus sensible que sa courbure sera plus faible.*

Construction pratique du niveau. — Dans la construction du niveau, on doit s'attacher à réaliser autant que possible ces conditions théoriques de perfection. Les tubes en verre livrés par le verrier au constructeur ont tous, par suite de leur fabrication même, des courbures plus ou moins prononcées, plus ou moins régulières, suivant l'une ou l'autre de leurs génératrices. Le constructeur choisit, dans le tube qui doit servir à faire un niveau, la courbure qui paraît à la fois la plus régulière et la moins prononcée. Quelquefois il régularise la courbure en usant à l'émeri la surface interne du tube sur un mandrin en laiton de forme convenable. Le plus souvent il se contente de la courbure telle qu'elle résulte de la fabrication. Mais, dans l'un et l'autre cas, au lieu de placer le tube dans sa gaine de manière que cette courbure soit dans un plan vertical (ainsi que nous l'avons représenté dans la figure schématique 197), on place cette courbure à plat, c'est-à-dire dans le sens horizontal, puis, les deux extrémités étant fixées, on glisse une petite cale très mince, en papier ou en carton, sous la partie médiane du tube, de manière à la relever légèrement autour de la ligne des extrémités comme axe : c'est la très faible hauteur de cette cale qui constitue alors *la flèche de la courbure* du niveau, et non pas la courbure naturelle du tube ; celle-ci en effet, par cela seul qu'elle est appréciable, serait trop forte, et son emploi direct nuirait à la sensibilité de l'instrument.

Usages du niveau à bulle d'air. — L'instrument, ainsi construit et réglé, peut servir aux trois opérations suivantes :

1° Rendre un axe ou un plan horizontal ;

2° Mesurer l'inclinaison d'une droite donnée ;

3° Rendre un axe vertical.

1° Quand le niveau doit s'appliquer sur un axe horizontal, il est porté par deux fourchettes, pouvant s'adapter à deux tourillons de même diamètre. Nous verrons ce dispositif dans le cathétomètre, et nous décrirons, à propos du réglage de cet instrument, l'emploi du niveau pour rendre un axe horizontal.

Quand le niveau doit servir à rendre un plan horizontal, sa monture est munie d'une base plane que l'on place sur une droite quelconque du plan. Celui-ci est ordinairement un trépied en forme de triangle, muni de trois vis calantes (fig. 202). On commence par disposer le niveau parallèlement à la direction des têtes de deux vis (fig. 202, I), et l'on agit sur l'une de celles-ci jusqu'à ce que la bulle vienne se fixer entre ses repères : à ce moment, la base du niveau et, par suite, la ligne du plan d'appui, qui coïncide avec la base, est une horizontale. Cela fait, on place le niveau dans une position sensiblement perpendiculaire à la première (fig. 202, II), et l'on rend cette direction horizontale, en agissant sur la troisième vis du plan. Si cette deuxième opération n'a pas altéré l'horizontalité de la ligne des deux autres vis, on peut en conclure que le plan est horizontal, puisqu'il contient deux

lignes horizontales. Mais, en général, la première horizontale a été plus ou moins inclinée par la deuxième opération. On recommence alors la première opération, puis la seconde, méthodiquement, jusqu'à ce que le résultat de l'une ne soit nullement altéré

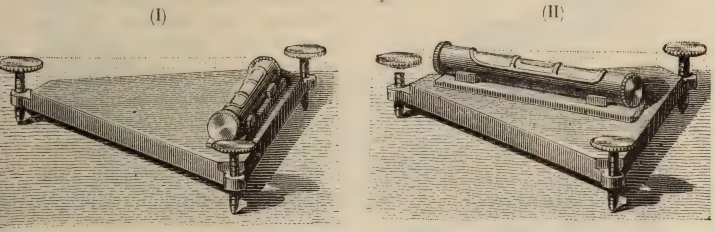


Fig. 202.

par l'autre, et l'on arrive ainsi, assez rapidement, à l'horizontalité permanente des deux directions : le plan d'appui est alors *horizontal*.

2° Pour mesurer l'inclinaison d'une droite, ou d'un plan, inclinés sur l'horizon, il faut connaître la valeur angulaire d'une division de l'échelle du niveau. On opère cette graduation préalable d'une manière empirique, à l'aide d'un appareil spécial, appelé *comparateur de niveau*. Cet appareil se compose d'un plan mobile autour d'un axe horizontal, et dont on peut modifier à volonté l'inclinaison de quantités connues, en lui communiquant son mouvement à l'aide d'une vis micrométrique verticale munie d'un tambour gradué comme celle du sphéromètre.

3° Enfin nous verrons, à propos du cathétomètre, comment le niveau peut servir à rendre un axe vertical.

186. **Cours d'eau. — Jets d'eau. — Puits artésiens.** — Les mers, les sources, les rivières, sont autant de vases communicants dans lesquels les eaux tendent sans cesse à prendre un même niveau. Il en est de même des jets d'eau artificiels et des bornes-fontaines.

La figure 203 suffit pour éclaircir la théorie de toutes ces applications naturelles ou industrielles. Si l'on verse de l'eau dans l'une des branches en U (I) du tube, le liquide s'élève dans l'autre branche, et, lorsque l'équilibre est établi, les niveaux *a* et *b* sont à une même hauteur. Supposons maintenant que le tube ait des branches inégales (II), la plus grande étant surmontée d'un réservoir plein d'eau, et la plus courte étant munie d'un robinet. Si celui-ci est d'abord fermé, et que le niveau dans la grande branche

dépasse de la hauteur *cd* le niveau dans la petite branche, le liquide exercera sur le robinet une pression équivalente au poids d'une colonne liquide ayant pour hauteur *cd* et pour base la section de la petite branche. Si donc on ouvre le robinet, l'eau jaillira verticalement, en vertu de cette pression. La hauteur du jet devrait être égale à *cd*, mais elle est plus ou moins diminuée par la résistance qu'opposent au mouvement ascensionnel de l'eau d'abord le frottement de l'eau contre les parois du tube et puis la masse d'air déplacée par le jet.

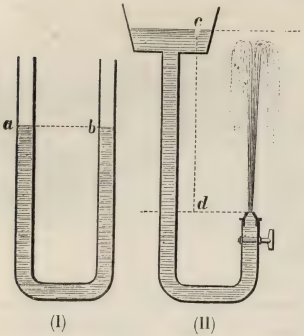


Fig. 203.

Le même principe s'applique à la théorie des *puits artésiens :* ce sont des sources artificielles, à eaux généralement jaillissantes[1].

Ces puits sont des trous très étroits, forés à la sonde, et d'une profondeur très variable, qui pénètrent jusqu'à une nappe d'eau souterraine emprisonnée entre des couches imperméables. Remarquons en effet que les terrains qui composent l'écorce du globe sont, les uns perméables aux eaux, comme les sables, les graviers; les autres imperméables, comme les argiles. Cela posé, soit un bassin géographique H, plus ou moins étendu, au-dessous duquel gisent deux couches imperméables, AB, CD (fig. 204), comprenant entre elles une couche perméable KK. Supposons cette dernière en communication avec des terrains plus élevés, à travers lesquels s'infiltrent les eaux des pluies. Ces eaux suivent la pente naturelle du terrain à travers la couche perméable et se rendent au-dessous du bassin géographique. Là elles s'accumulent, sans pouvoir communiquer avec la couche superficielle, dont elles sont séparées par la couche imperméable AB. Mais si, à partir du sol, on pratique un trou qui traverse cette couche, les eaux, tendant toujours à se mettre de niveau (fig. 203), s'élèvent dans ce trou à une hauteur d'autant plus grande, qu'elles communiquent avec un terrain plus élevé.

On appelle *niveau hydrostatique* d'un *puits foré*, la hauteur à

1. Ainsi nommés parce que c'est dans l'ancienne province d'Artois qu'ils ont d'abord été creusés. On y en rencontre dont l'origine paraît remonter à la fin du douzième siècle. A une époque beaucoup plus reculée, des puits de ce genre ont été creusés en Chine et en Égypte.

laquelle s'élève 'eau du puits dans le tube même qui a servi au forage. (On laisse ce tube dans le trou, comme un tuyau de conduite, pour empêcher la déperdition de l'eau à travers les couches per-

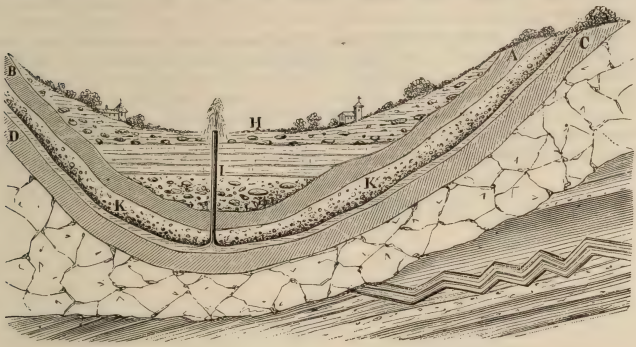


Fig. 204.

méables de la coupe.) Or on a constaté que le niveau hydrostatique d'un puits foré n'est pas invariable, mais qu'il monte ou qu'il descend suivant que les cours d'eau du pays où affleure la couche aquifère sont eux-mêmes en hausse ou en baisse. Ce fait est une preuve expérimentale de l'explication que nous avons donnée plus haut.

Puits forés de Grenelle et de Passy (*Paris*). — Les eaux qui alimentent les puits artésiens viennent souvent d'une distance de vingt à trente lieues. Quant à la profondeur, elle varie avec les localités. Les puits forés de Grenelle et de

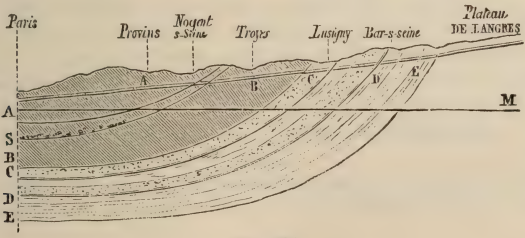


Fig. 205.

Passy sont les exemples les plus remarquables qu'on puisse citer de puits artésiens. Le premier a 548 mètres de profondeur; l'eau qui s'en échappe possède, en toute saison, une température de 27°, et son niveau hydrostatique

est d'environ 33 mètres. Celui de Passy a 570 mètres de profondeur; l'eau s'en échappe à la température de 28°.

Ces deux puits sont alimentés par une même couche de sable aquifère, qui est surmontée par une épaisse série de roches, notamment par un gisement de craie d'une épaisseur considérable. Toutes ces assises, superposées à Paris, se relèvent progressivement dans la direction de l'est et vont affleurer successivement en des points d'autant plus éloignés que leur profondeur est plus grande. Le sable aquifère des deux puits n'émerge qu'à la hauteur du plateau de Langres. C'est là, par conséquent, dans toute l'étendue de cet affleurement, que se trouve le bassin d'alimentation de ces puits, analogue au réservoir de la figure 203, 2°. La figure 205 montre la coupe géologique du bassin de la Seine entre Paris et Langres, et indique clairement l'ordre de superposition et d'émergement des différentes assises qu'il a fallu traverser dans le forage de ces puits.

LIVRE IV

PNEUMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

STATIQUE DES GAZ

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE ET BAROMÈTRES.

187. **Caractères physiques des gaz.** — On appelle *gaz* ou *corps gazeux* toutes les substances qui, dans les conditions atmosphériques ordinaires, se présentent sous le troisième état physique, ou *état gazeux*, défini précédemment (8). L'air est le type des gaz[1].

Parmi les propriétés qui caractérisent les gaz ou l'état gazeux au point de vue physique, les unes leur sont communes avec les liquides, les autres leur sont particulières. Les premières sont la *fluidité*, la *pesanteur*, l'*élasticité;* les autres sont la *compressibilité* et l'*expansibilité*.

Fluidité des gaz. — Les gaz sont fluides (comme les liquides), c'est-à-dire que leurs particules peuvent glisser aisément les unes sur les autres de manière à pouvoir se mélanger sans effort et changer à volonté la forme extérieure de la masse. Nous avons dit précédemment (8) que cette mobilité des particules, commune aux liquides et aux gaz, a fait donner aux uns et aux autres le nom générique de *fluides*. On désigne particulièrement les gaz sous le nom de *fluides aériformes*.

Pesanteur des gaz. — Les gaz sont pesants, comme les liquides et comme tous les autres corps. Cette proposition, qui paraît si

1. Du moins au point de vue physique, car on sait depuis Lavoisier que l'air n'est pas un gaz simple, mais un mélange de deux gaz simples, l'oxygène et l'azote. 100 parties d'air sont formées, *en volume*, de 20P,93 d'oxygène pour 79P,07 d'azote, ou bien, *en poids*, de 23 parties d'oxygène pour 77 parties d'azote.

évidente aujourd'hui, fut à peine soupçonnée par les anciens [1] et ne fut pas démontrée expérimentalement avant Galilée. Il établit que *l'air est pesant*, en faisant voir qu'un récipient où l'on comprime de l'air augmente de poids [2]; l'accroissement de poids représente évidemment le poids de l'excès d'air introduit.

On démontre aujourd'hui le même fait par une expérience inverse, due à Otto de Guericke, l'inventeur de la machine à faire le vide (machine pneumatique). On suspend au fléau d'une balance très sensible un ballon de verre de 3 à 4 litres, dont le col est muni d'un bon robinet pouvant fermer hermétiquement (fig. 206). On tare d'abord ce ballon plein d'air; puis on y fait le vide au moyen de la machine pneumatique. On constate alors que l'équilibre est détruit. Pour le rétablir, il faut ajouter du côté du ballon quelques grammes, qui représentent évidemment, avec l'exactitude d'une double pesée, le poids de l'air extrait du ballon.

Fig. 206.

On peut opérer autrement. On commence par faire le vide dans le ballon, puis on tare le ballon vide, en ayant soin de mettre préalablement quelques grammes dans le plateau, du même côté. On ouvre alors le robinet; l'air rentre dans le ballon avec un sifflement caractéristique, et le fléau s'incline de ce côté. On rétablit l'équilibre en

1. Aristote dit dans son traité *de Cœlo* : « Tous les corps, quand ils sont en leur lieu propre, ont de la pesanteur, excepté le feu. L'air lui-même est pesant. »

2. Galilée, *Dialogues des sciences naturelles*, première journée.

enlevant un certain nombre de grammes, qui représentent évidemment le poids de l'air rentré dans le ballon.

L'une ou l'autre de ces expériences donnent approximativement $1^g,3$ pour le poids d'un litre d'air, pris dans les conditions ordinaires. Un litre d'eau pris dans les mêmes conditions pèserait à peu près 1000 grammes. Cela prouve que si les gaz sont pesants, comme les liquides, ils sont beaucoup moins denses que ces derniers. En effet, le poids d'un litre de liquide peut s'élever jusqu'à 13 596 grammes (pour le *mercure*) et ne s'abaisse pas au-dessous de 715 grammes (pour l'*éther*), tandis que le poids d'un litre de gaz peut s'abaisser à $0^g,9$ (pour l'*hydrogène*) et ne s'élève pas au-dessus de $5^g,8$ (pour l'*acide iodhydrique*).

Élasticité et compressibilité des gaz. — *Briquet à air.* — Les gaz sont parfaitement élastiques, au même degré que les liquides; mais ils sont incomparablement plus compressibles que ceux-ci. Ces deux propriétés des gaz peuvent être mises en évidence à l'aide d'une même expérience, celle du *briquet atmosphérique* ou *briquet à air*. Elle consiste à enfoncer un piston de cuir dans un récipient de verre, en forme d'éprouvette à pied, où il peut pénétrer à frottement doux (fig. 207). La petite masse d'air qui y est contenue, se comprime à mesure que le piston avance, et se réduit à un volume aussi petit que l'on veut, — ce qui prouve sa grande compressibilité; — mais elle se détend aussitôt qu'on cesse de pousser le piston et repousse celui-ci jusqu'à l'orifice du récipient, — ce qui prouve en outre sa grande élasticité.

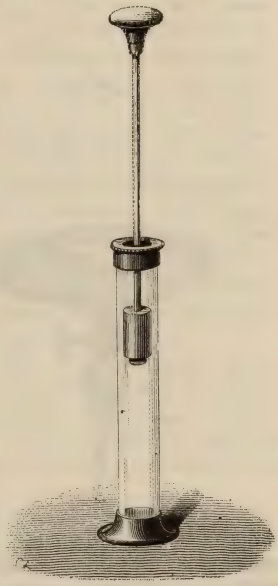


Fig. 207.

Lorsqu'on opère très brusquement la première phase de cette expérience, la compression du gaz est accompagnée d'un dégagement de chaleur plus ou moins vif, qui peut aller jusqu'à produire l'inflammation d'un morceau d'amadou placé au fond de l'éprouvette : de là le nom de *briquet à air* donné à ce petit appareil.

Expansibilité des gaz. — Force élastique. — Les gaz sont éminemment expansibles, c'est-à-dire qu'ils tendent toujours à prendre un volume plus grand et à occuper tout l'espace qui leur est ouvert. L'expansibilité des gaz est leur propriété la plus caractéristique; elle se démontre par l'expérience suivante :

On place sous le récipient de la machine pneumatique une vessie, munie d'un robinet, qui a été aplatie sous la main et ne contient plus qu'une faible quantité d'air ou d'un gaz quelconque (fig. 208, I). On a eu aussi la précaution d'en mouiller les parois, afin de les

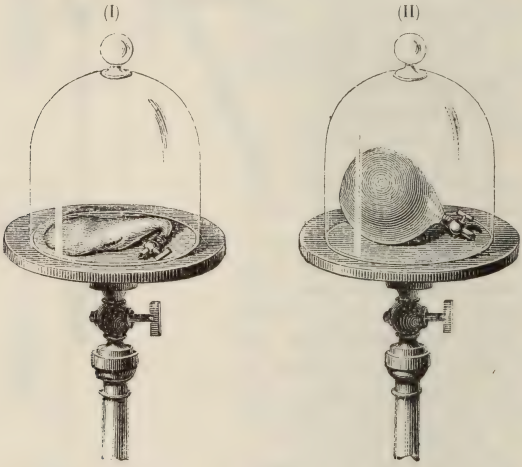


Fig. 208.

rendre plus flexibles. Il y a d'abord équilibre entre la force élastique de l'air qui est sous le récipient et celle de l'air renfermé dans la vessie; mais, aussitôt que l'on commence à faire le vide, la pression qui s'exerce sur la vessie s'affaiblit, et celle-ci se gonfle de plus en plus, comme si l'on soufflait dedans (fig. 208, II) : ce qui prouve l'*expansibilité* du gaz qu'elle contient. Lorsqu'on fait ensuite rentrer l'air extérieur dans la cloche, on voit la vessie, comprimée par le gaz rentrant, reprendre son volume primitif : ce qui est une nouvelle preuve de l'élasticité des gaz.

La distension des parois de la vessie par le gaz qui se détend met en évidence une force qui résulte de l'expansibilité des gaz : c'est ce qu'on appelle leur *force élastique*. Nous démontrerons plus

tard que la force élastique d'une masse de gaz est toujours égale et contraire à la pression qu'elle supporte, et que sous le même volume elle croît avec la température.

188. **Objet de la Pneumatique.** — L'étude de ces diverses propriétés des gaz, la manifestation expérimentale des phénomènes qui en résultent et la détermination des lois qui régissent ces phénomènes, constituent la partie de la physique que nous allons exposer sous le nom de *Pneumatique*. Elle se subdivise naturellement en deux parties. La première partie, qu'on pourrait appeler l'*Hydrostatique des gaz*, comprend l'étude des propriétés communes aux liquides et aux gaz (fluidité, pesanteur et élasticité) et de leurs conséquences mécaniques : conditions d'équilibre des gaz considérés comme des *fluides pesants*, pressions hydrostatiques exercées par les gaz pesants en équilibre, soit sur les parois des récipients qui les contiennent (pression atmosphérique, baromètres), soit sur les corps qui y sont immergés (principe d'Archimède, aérostats). La seconde partie comprend l'étude des propriétés particulières aux gaz (compressibilité et expansibilité) et de leurs conséquences ou de leurs applications physiques : loi de compressibilité (loi de Mariotte), mesure de leur force élastique (manomètres), procédés de raréfaction ou de condensation des gaz (machines pneumatiques et pompes de compression), exceptions aux lois de l'hydrostatique (diffusion et dissolution des gaz).

189. **Hydrostatique des gaz.** — Cette première partie de la pneumatique se résume dans l'énoncé de quelques-uns des principes de l'hydrostatique proprement dite, étendus au cas des gaz pesants, et dans l'application de ces principes à l'étude de l'un des phénomènes naturels les plus importants de toute la physique, la *pression atmosphérique*.

1° *Principe de Pascal appliqué aux gaz.* — Étant donnée une masse gazeuse en équilibre dans un récipient fermé, si l'on fait abstraction de son poids et de sa force élastique, le principe d'*égalité de pression* s'y applique rigoureusement. On peut l'énoncer de la même manière que dans le cas des liquides (140) :

Si l'on exerce une pression quelconque à la surface d'une masse gazeuse qui est en équilibre dans un vase clos, cette pression se transmet intégralement dans tous les sens à chaque portion plane de paroi, égale à la surface pressée.

On peut l'admettre *à priori* comme une conséquence nécessaire de la fluidité et de l'élasticité parfaite des gaz, et ne le vérifier qu'indirectement, par les conséquences expérimentales qu'on en tire. On pourrait aussi le vérifier directement, et avec une approximation beaucoup plus grande que dans le cas des liquides ; car ici

les causes d'erreur qui affecteraient l'expérience, par suite des pressions intérieures particulières à l'état gazeux, sont incomparablement plus faibles. En effet, ces pressions intérieures ont une double origine : 1° la force élastique de la masse gazeuse; 2° son poids. Or les premières, qui résultent de la répulsion réciproque des molécules, ont nécessairement la même intensité en tous les points de la masse, par suite de l'homogénéité du gaz; elles s'exercent donc conformément au principe même de l'égalité de pression, et par conséquent elles ne peuvent pas en infirmer la vérification. Quant aux pressions qui résultent du poids des molécules, elles sont nécessairement différentes aux divers niveaux de la masse; mais les perturbations qui résulteraient de ces différences de poids sont complètement négligeables dans un récipient de capacité ordinaire, à cause de la faible densité des gaz.

L'expérience de vérification consisterait à comprimer un gaz dans un vase clos, analogue au briquet à air (fig. 207) : on constaterait que des manomètres (instruments mesureurs de la force élastique), mis en communication avec la masse comprimée, en divers points de la paroi, indiqueraient partout la même pression.

2° *Condition d'équilibre des gaz pesants.* — On pourrait démontrer *à priori*, pour les gaz comme pour les liquides pesants, le théorème fondamental sur *la différence des pressions en deux points de la masse situés à des niveaux différents* (147). Les conditions d'équilibre des gaz pesants (du moins celles qui leur sont applicables) se déduisent rigoureusement de ce théorème fondamental.

Cas d'un seul gaz. — La condition générale d'équilibre est seule applicable, à savoir :

I. *La pression doit être la même en tous les points d'un même plan horizontal.*

La condition relative à la surface libre ne s'applique pas à ce cas, puisqu'il n'y a plus de surface libre, à cause de l'expansibilité du gaz; mais il faut joindre à la condition précédente une autre condition, qui en est une sorte de corollaire.

II. *Dans un gaz pesant en équilibre, la force élastique est la même en tous les points d'un même plan horizontal.*

En effet, par suite du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la force élastique, en chaque point d'une masse gazeuse en équilibre, doit être exactement égale et opposée à la pression qui s'exerce en ce point.

Cas de deux ou plusieurs gaz. — Les conditions générales (I) et (II) s'appliquent seules à ce cas; car il ne peut y avoir, à cause de

l'expansibilité des gaz, ni surfaces libres, ni surfaces de séparation, ni superposition par ordre de densités. Il se produit, dans ce cas, un mélange intime des gaz hétérogènes, ainsi qu'une égalisation de force élastique, que nous étudierons dans la deuxième partie de la pneumatique, sous le nom de *Diffusion des gaz*.

3° *Pressions dans les gaz pesants en équilibre.* — L'existence des pressions et la loi de variation de ces pressions dans les gaz pesants en équilibre se déduisent des principes d'hydrostatique étendus aux gaz. Mais, dans le cas des masses gazeuses contenues en vases clos, les pressions, qu'on peut appeler hydrostatiques, et qui résultent de la pesanteur, sont négligeables par rapport à la force élastique, commune à toute la masse, qui résulte de l'expansibilité et qui est égale à la pression extérieure. Les différences de pression résultant de la différence de niveau dans la masse gazeuse ne se manifesteraient nettement que dans le cas d'un récipient de dimensions considérables. C'est précisément le cas de l'atmosphère terrestre, au sein de laquelle nous vivons comme au fond d'un immense océan fluide. On peut y vérifier nettement les conditions d'équilibre des fluides pesants à l'aide d'un instrument spécial, que nous étudierons plus loin sous le nom de *baromètre*. La pression et la force élastique de l'air y sont sensiblement constantes en tous les points d'un même plan horizontal (en un même lieu du globe); la pression et la force élastique varient dans un même lieu en même temps que l'altitude, elles diminuent à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère : c'est cette pression qu'on appelle *pression atmosphérique*.

190. **Pression atmosphérique.** — *Définitions.* — L'étude de la pression atmosphérique est donc, au point de vue théorique comme au point de vue pratique, le sujet le plus important de l'hydrostatique des gaz.

Composition de l'atmosphère. — On donne le nom d'*atmosphère* (de ἀτμὸς, vapeur, et σφαῖρα, sphère) à la couche d'air[1] qui enveloppe de toutes parts le sphéroïde terrestre et qui est emportée avec lui dans son double mouvement dans l'espace.

1. L'air atmosphérique, dont nous avons donné ci-dessus la composition exacte, ne constitue pas à lui seul toute l'atmosphère. Il y entre encore normalement une certaine proportion d'acide carbonique (ordinairement de 4 à 5 dix-millièmes en volume) et de vapeur d'eau (de 4 à 5 millièmes en volume), qui varie d'ailleurs légèrement suivant les circonstances de temps, de lieu et de saison. On y trouve aussi (mais à l'état de traces seulement) : de l'ammoniaque, un carbure d'hydrogène (probablement le gaz des marais), de l'ozone, les acides azotique et azoteux, diverses particules salines, organisées ou inorganiques, germes ou poussières, qui n'ont d'importance qu'au point de vue des phénomènes organiques.

Hauteur approximative. — En vertu de la force expansive de l'air, il semble que les molécules de l'atmosphère devraient se répandre indéfiniment dans les espaces planétaires. Mais, par l'effet même de la dilatation, la force expansive de l'air décroît de plus en plus; elle est, en outre, affaiblie par la basse température des hautes régions de l'atmosphère; il en résulte que l'équilibre doit finir par s'établir entre la force expansive des molécules de l'air et l'action de la pesanteur qui les attire vers le centre de la terre; l'atmosphère doit donc être limitée.

Les évaluations approximatives de la hauteur de l'atmosphère, faites par différentes méthodes, ont conduit à des résultats très différents. Les nombres varient depuis 70 kilomètres jusqu'à 340 kilomètres. En s'en tenant à la limite minimum, on voit que la profondeur moyenne de cet océan fluide est plus de cent fois plus grande que celle des mers les plus profondes.

Poids approximatif. — Étant données la surface de la terre et la hauteur moyenne de l'atmosphère, on voit à quelle masse énorme de gaz elle correspond. Aussi, malgré la faible densité de l'air (1gr,3 par litre environ), le poids total de l'atmosphère est-il à peu près égal à celui de 581 000 cubes de cuivre de 1 kilomètre de côté.

191. **Pression atmosphérique : démonstration expérimentale de son existence.** — On conçoit donc que l'atmosphère doive exercer à la surface du globe une pression considérable. On démontre ordinairement l'existence de cette pression par les expériences suivantes.

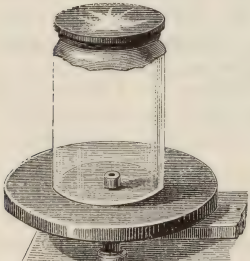


Fig. 209.

Expérience du crève-vessie. — Le *crève-vessie* consiste en un manchon de verre fermé hermétiquement, à sa partie supérieure, par une membrane de baudruche ou de vessie. L'autre extrémité, dont les bords sont bien dressés et graissés de suif, s'applique sur la platine de la machine pneumatique (fig. 209). Dès qu'on commence à faire le vide, la membrane se déprime sous la pression atmosphérique qu'elle supporte, et bientôt elle crève avec une vive détonation, due à la rentrée subite de l'air.

Expérience des hémisphères de Magdebourg. — Ce petit appareil classique[1] consiste en deux hémisphères creux, de laiton, ayant

1. Il est dû à Otto de Guericke, bourgmestre de Magdebourg.

de 10 à 12 centimètres de diamètre (fig. 210, I). Leurs bords sont garnis d'une rondelle annulaire de cuir, enduite de suif, qui rend la fermeture hermétique lorsque ces bords sont en contact. L'un des hémisphères porte un robinet qui se visse sur la machine pneumatique, et l'autre un anneau qui sert de poignée pour le saisir et le tirer. Tant que les hémisphères contiennent de

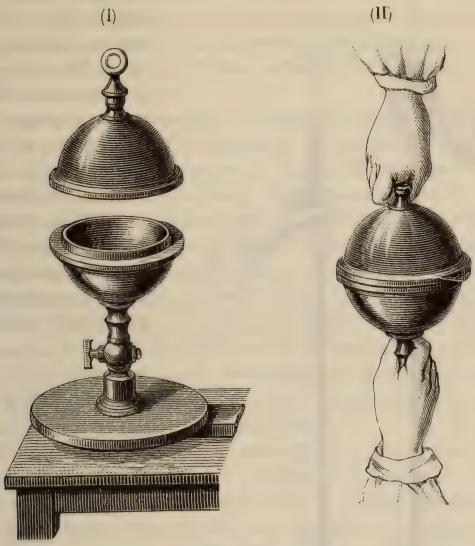


Fig. 210.

l'air, on les sépare sans difficulté, car il y a équilibre entre la force expansive de l'air intérieur et la pression de l'atmosphère ; mais, une fois que le vide est fait, on ne peut plus les séparer sans un puissant effort, dans quelque position qu'on les tienne (fig. 210, II). Cela prouve encore que la pression atmosphérique s'exerce en tous sens.

192. **Mesure de la pression atmosphérique : expérience de Torricelli.** — Les deux expériences précédentes démontrent l'existence de la pression atmosphérique, mais n'en font pas connaître la valeur. La suivante, faite pour la première fois en 1643 par Torricelli, élève de Galilée, donne la mesure exacte du poids de l'atmosphère.

Opération. — On prend un tube de verre long de 80 centimètres

au moins, d'un diamètre intérieur de 6 à 7 millimètres, et fermé à l'une de ses extrémités. Ayant posé ce tube dans une position verticale CD (fig. 211, I), on le remplit entièrement de mercure; puis, fermant l'ouverture C avec le pouce, on retourne le tube et on plonge l'extrémité ouverte dans une cuvette pleine de mercure (II). On retire alors le doigt et l'on voit la colonne mercurielle baisser aussitôt notablement et conserver une hauteur AB d'environ 76 centimètres.

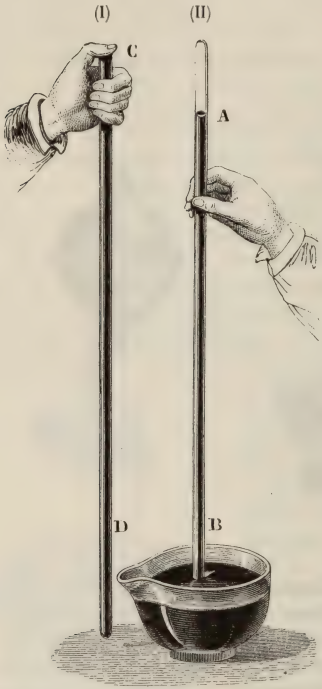


Fig. 211

Théorie. — Torricelli ne se contenta pas de découvrir ce curieux phénomène, il eut le mérite d'en donner tout de suite la véritable explication. Il affirma, et soutint contre de nombreux contradicteurs, que c'est la pression at-

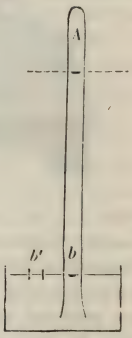


Fig. 212.

mosphérique qui soulève le mercure dans le tube et qui lui fait équilibre. Cette théorie n'est plus contestée aujourd'hui : elle est une conséquence nécessaire des principes de l'hydrostatique.

En effet, le tube et la cuvette forment un système de deux vases communiquants qui contiennent un liquide pesant en équilibre. La pression doit donc être la même en tous les points d'une

même tranche horizontale prise à un niveau quelconque dans le mercure. Considérons, en particulier, deux éléments de surface, b' et b, égaux à la section du tube, et pris sur le plan de la surface libre du mercure dans la cuvette, l'un à l'intérieur du tube et l'autre à l'extérieur (fig. 212). Sur l'élément b' c'est la pression atmosphérique qui s'exerce directement, tandis que sur l'élément b c'est le poids de la colonne mercurielle, et c'est ce poids seul, puisqu'il y a le vide en A au-dessus du mercure. On peut donc en conclure, avec Torricelli, que la pression atmosphérique équivaut, à surface égale, au poids d'une colonne de mercure d'environ 76 centimètres de hauteur.

193. **Expériences de Pascal.** — Il résulte de cette explication que, *si le poids de l'atmosphère augmente ou diminue, cela doit faire monter ou baisser en même temps la colonne de mercure.* Pascal, qui le premier tira cette conséquence de l'expérience de Torricelli, la fit vérifier par la célèbre expérience du Puy de Dôme. Le seul moyen de diminuer, pour ainsi dire à volonté, la pression que l'atmosphère exerce sur les corps consiste à les transporter à des altitudes plus ou moins élevées. C'est pourquoi Pascal pria son beau-frère Périer, qui habitait l'Auvergne, de répéter sur le Puy de Dôme l'expérience de Torricelli. Périer fit l'expérience le même jour, successivement au pied et au sommet de la montagne, et il constata que la colonne de mercure soulevée diminuait, conformément aux prévisions de Pascal, d'environ 8 centimètres.

Pascal déduisit une deuxième conséquence : c'est que, *si la pression atmosphérique soutient une colonne mercurielle d'une certaine hauteur dans le tube de Torricelli, elle y soutiendra de même une colonne plus haute d'un liquide moins dense.* Il vérifia lui-même cette conséquence, en répétant l'expérience de Torricelli à Rouen, en 1646, avec du vin rouge au lieu de mercure. Il prit un tube de 15 mètres de long, fermé à un bout; il le remplit de vin rouge et le dressa verticalement dans un réservoir plein du même liquide. Alors il observa que le liquide s'arrêtait dans le tube à une hauteur d'environ $10^{m},40$, c'est-à-dire 13,6 fois plus grande que celle du mercure; or, le vin rouge étant 13,6 fois moins dense que ce liquide, le poids de la colonne de vin était bien égale à celui de la colonne de mercure dans l'expérience de Torricelli. Donc, dans l'un et l'autre cas, les colonnes liquides faisaient équilibre à la même pression, celle de l'atmosphère.

194. **Valeur de la pression atmosphérique en kilogrammes.** — La hauteur à laquelle le mercure demeure en équilibre dans le tube de Torricelli fournit le moyen d'évaluer en kilogrammes la pression de l'atmosphère sur une surface donnée. Supposons, par

exemple, que la colonne ait 76 centimètres et que la section intérieure du tube soit d'un centimètre carré. La pression que l'atmosphère exerce sur un centimètre carré, pris en un point quelconque de la surface libre du mercure dans la cuvette, est égale au poids d'un cylindre de mercure ayant un centimètre carré de base et 76 centimètres de hauteur, et par suite un volume de 76 centimètres cubes. C'est ce que signifie l'expression abrégée : *La pression atmosphérique moyenne est de 76 centimètres de mercure.* Or, 1 centimètre cube d'eau pesant 1 gramme, 1 centimètre cube de mercure doit peser $13^{gr},6$, puisque ce liquide est 13,6 fois plus dense que l'eau; d'où l'on conclut que le poids de la colonne de mercure dans le tube équivaut à $13^{gr},6$ multipliés par 76, c'est-à-dire 1033 grammes, ou 1 kilogramme et 33 grammes. Telle est donc la pression atmosphérique sur un centimètre carré. Par suite, sur un décimètre carré, qui contient 100 centimètres carrés, la pression est de $103^{kil},300$, et sur un mètre carré, qui renferme 100 décimètres carrés, de 10 330 kilogrammes.

Remarque. — *Pression supportée par le corps humain.* — La surface totale du corps humain, chez un sujet de taille et de grosseur moyennes, étant d'un mètre carré et demi, la pression totale que supporte un homme, à la surface de la terre, est d'environ 15 500 kilogrammes. Il semble qu'une pression aussi considérable devrait nous écraser; mais notre corps y résiste par la réaction des fluides élastiques qu'il renferme. Nos membres n'en éprouvent même aucune gêne dans leurs mouvements, parce que, la pression atmosphérique s'exerçant dans toutes les directions, nous supportons en tous sens des pressions égales et contraires qui se font équilibre et sont plus propres à nous soutenir qu'à nous gêner. En effet, les jours où la pression atmosphérique est plus faible, nous éprouvons un malaise qui nous fait dire que *le temps est lourd;* c'est le contraire qu'il faudrait dire, car ces jours-là le poids de l'atmosphère est plus faible que d'habitude.

195. **Classification des baromètres.** — On nomme *baromètres* (de βάρος, poids, et μέτρον, mesure) des instruments propres à mesurer la pression atmosphérique. Le type des baromètres est le *baromètre à cuvette,* qui n'est autre chose qu'un tube de Torricelli fixé dans une cuvette à mercure. Tous les bons baromètres sont des perfectionnements de celui-ci : ce sont des *baromètres à mercure.* Ces instruments mesurent la pression par la hauteur d'une colonne de mercure soulevée dans un tube de verre, comme dans l'expérience de Torricelli. Tels sont : le *baromètre ordinaire* ou *baromètre à cuvette,* le *baromètre normal* ou *baromètre de Regnault,* le *baromètre de Fortin,* le *baromètre à siphon* ou *baromètre de Gay-Lussac,* le *baromètre à cadran* ou *baromètre d'appartement.* Parmi les baromètres à cuvette, l'un des plus intéressants est le *baromètre statique* ou *baromètre à poids* ou *barographe,* qui sert non

seulement à mesurer, mais à enregistrer les variations de la pression atmosphérique dans un lieu donné : c'est un instrument uniquement employé dans les observations météorologiques.

On construit aussi des baromètres sans mercure, appelés *baromètres anéroïdes* (de ἀ privatif et νηρὸς, humide, mouillé), ou *baromètres métalliques*, à cause de leur mode de construction. Nous décrirons le *baromètre de Vidi* et le *baromètre de Bourdon*. Ils sont plus commodes, pour certains usages, que les baromètres à mercure, mais ils sont beaucoup moins précis.

196. **Baromètre à cuvette.** — Tout *baromètre à cuvette* se compose d'un tube de verre fermé à son sommet, ayant 85 centimètres environ de longueur, rempli de mercure, et plongeant dans une cuvette pleine de ce liquide : c'est donc l'appareil déjà décrit sous le nom de *tube de Torricelli* (fig. 211), auquel on a adapté une échelle graduée en millimètres, qui permet de mesurer aisément la hauteur de la colonne soulevée. Cette division est tracée sur le tube même ou bien appliquée le long de sa surface, de manière que le zéro de la graduation corresponde au niveau du mercure dans la cuvette.

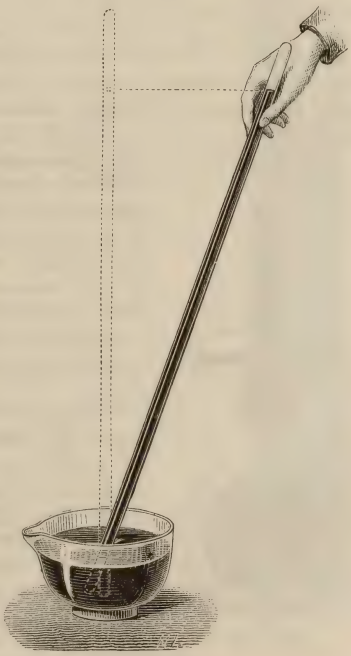


Fig. 213.

Cet instrument est très simple, mais il a un grave défaut. Le niveau dans la cuvette n'est pas fixe, parce que, la pression atmosphérique augmentant ou diminuant, une certaine quantité de mercure passe de la cuvette dans le tube, ou inversement. Or, le zéro de l'échelle étant fixe, la division qui correspond au niveau du mercure dans le tube n'indiquera pas, en général, la véritable hauteur barométrique. Ce défaut de coïncidence entre le zéro de l'échelle et le niveau dans la

cuvette et la nécessité de prévenir ou de corriger l'erreur de lecture qui en résulte ont fait imaginer divers dispositifs qui compliquent plus ou moins le baromètre primitif de Torricelli.

Remarques. — 1° *Lecture de la hauteur barométrique.* — Quel que soit d'ailleurs le baromètre dont on fasse usage, on nomme *hauteur barométrique* la *distance verticale* du niveau du mercure dans la cuvette au niveau dans le tube. C'est pourquoi le baromètre doit toujours être parfaitement vertical quand on fait la lecture de la hauteur barométrique; sinon, le tube étant incliné, la colonne de mercure s'allongerait et on lirait (fig. 213) sur l'échelle un nombre trop grand.

2° D'après les principes de l'hydrostatique, la hauteur barométrique est indépendante de la forme du tube ainsi que de son diamètre (pourvu que celui-ci ne soit pas capillaire): elle ne dépend absolument que de la distance verticale des deux niveaux; mais elle varie nécessairement en raison inverse de la densité du liquide. Avec le mercure, la hauteur moyenne, au niveau des mers, est de $0^m,76$; dans un baromètre à eau, elle serait de $10^m,33$.

197. **Baromètre à niveau invariable.** — L'erreur due aux variations du niveau dans la cuvette serait évidemment d'autant plus *faible* que la section de la cuvette serait plus *grande*. Mais on ne peut agrandir celle-ci indéfiniment, à cause du poids énorme de mercure qu'il faudrait employer. Aussi se sert-on quelquefois d'une cuvette, dite *à niveau invariable*, qui, tout en contenant peu de mercure, offre une grande surface.

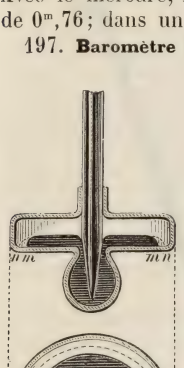


Fig. 214.

Description. — La cuvette, représentée ci-contre (fig. 214) en coupe et en projection, est divisée en deux compartiments : l'un, sphérique, est rempli de mercure dans lequel plonge l'extrémité du tube barométrique; l'autre, cylindrique et à grand diamètre, permet à la surface libre du mercure de s'étaler plus ou moins sur la paroi *nn*. Or on sait que, *lorsqu'on dépose sur une surface de verre, plane et horizontale et bien propre, une gouttelette de mercure, celle-ci prend une forme sphérique, mais que, si l'on augmente graduellement la quantité de mercure, la goutte s'aplatit et finit par prendre une épaisseur sensiblement constante.* C'est ce qui arrive ici, à la condition que la quantité totale du mercure soit telle, que, malgré les variations

de la pression, elle n'atteigne jamais la paroi latérale de la cuvette *nn*, et ne rentre jamais totalement dans le réservoir sphérique. Alors, si la pression diminue, un peu de mercure passe du tube dans la cuvette, mais le liquide ne fait que s'étaler davantage, par exemple de *m* en *n*, tout en conservant sensiblement le même niveau. Il en est encore de même lorsqu'une petite quantité de mercure passe de la cuvette dans le tube. Néanmoins l'on n'obtient pas ainsi un niveau rigoureusement invariable : on n'y arrive réellement qu'avec les baromètres à cuvette de Regnault ou de Fortin.

Fig. 215.

198. **Baromètre normal.** — Pour les observations de laboratoire, le véritable baromètre de précision est un baromètre à cuvette construit et employé par Regnault sous le nom de *baromètre normal*[1].

La cuvette est une auge de fonte parallélépipédique (fig. 215), qui est solidement fixée sur une planche épaisse scellée dans le mur. Un large tube, de $2^{cm},5$ à 3 centimètres de diamètre et de 1 mètre de hauteur, plonge dans le mercure de la cuvette ; il est fixé contre la planche d'appui par des tasseaux, de manière à être maintenu vertical.

Bien que la section de la cuvette soit assez grande par rapport à celle du tube pour que les variations de niveau y soient très petites, on en supprime absolument les inconvénients à l'aide d'un dispositif spécial, analogue à celui que nous retrouverons plus loin dans la cuvette de Fortin. A l'une des parois latérales de la cuvette est adaptée une pièce qui porte un écrou *e*. Dans celui-ci passe une vis, terminée en pointe à ses deux extrémités, dont la longueur a été relevée une fois pour toutes au cathétomètre. Pour avoir exactement le niveau dans la cuvette, et par suite le 0° de l'échelle, on tourne la vis dans un sens ou dans l'autre, jusqu'à ce que la pointe affleure à la surface libre du mercure. La coïncidence parfaite de la pointe et de la surface mercurielle ne s'obtient qu'à la suite de certains tâtonnements, que nous décrirons plus loin (199, 3°),

1. On l'appelle aussi quelquefois *baromètre de Regnault*.

à propos du baromètre de Fortin. On mesure alors, à l'aide d'un cathétomètre bien réglé, et installé à poste fixe en face du baromètre, la distance verticale de la pointe *a* de la vis au niveau *b* du mercure dans le tube, et l'on ajoute à cette distance la longueur de la vis : on a ainsi la hauteur barométrique avec une grande précision. Il n'y a plus d'erreur due au déplacement du zéro de l'échelle, puisqu'on le ramène en coïncidence avec le niveau inférieur avant chaque lecture.

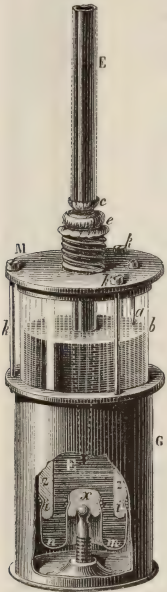


Fig. 216.

Il n'y a pas à craindre non plus, à cause du large diamètre du tube barométrique, l'erreur dite *capillaire*, qui affecte la lecture dans tous les autres baromètres. Enfin, un thermomètre, fixé sur la même planchette que l'instrument, donne la température ambiante au moment de l'observation, ce qui permet de corriger les erreurs dues à la variation de température (nous les étudierons plus loin en même temps que l'erreur due à la capillarité). C'est à cause de ces caractères de perfection que Regnault a donné à cet instrument le nom de *baromètre normal*.

199. **Baromètre de Fortin.** — 1° *Principe.* — Le *baromètre de Fortin*, sans être aussi précis que le baromètre de Regnault, peut cependant le remplacer dans un grand nombre de cas. Il a sur ce dernier l'avantage d'être beaucoup moins volumineux et de contenir moins de mercure, ce qui le rend portatif et moins coûteux.

Le caractère particulier de cet instrument est une cuvette *à fond mobile*, imaginée par le constructeur Fortin. C'est une cuvette cylindrique en verre, dont le fond est formé d'une peau de chamois, qu'on peut élever ou abaisser au moyen d'une vis de rappel C placée en dessous (fig. 216). Grâce à ce dispositif, on peut obtenir un niveau constant dans la cuvette, en faisant affleurer à volonté la surface libre du mercure à un point de repère fixe. On peut, en outre, rendre l'instrument portatif; pour cela, on soulève la peau de chamois, et le mercure avec elle, jusqu'à ce que le tube et la cuvette en soient complètement remplis; le mercure et son enveloppe ne forment alors qu'un seul bloc, de manière qu'on peut incliner ou même renverser l'instru-

ment sans qu'il puisse y rentrer de l'air ou que le choc du mercure risque d'en briser le verre.

2° *Description.* — Fortin, ayant voulu construire un baromètre portatif, s'imposa la condition de lui donner une faible capacité, afin qu'il contînt moins de mercure. Il adapta donc un tube étroit à une cuvette de petites dimensions. Celle-ci est formée d'un cylindre de verre *b*, ayant 4 centimètres de diamètre environ sur 3 de hauteur (fig. 216) ; il est fermé à sa partie supérieure par un disque de buis fixé au-dessous d'un couvercle de cuivre M. Ce couvercle est traversé par une pointe d'ivoire *a*, qui est visible à travers le verre, et qui est destinée au même usage que la vis à deux pointes du baromètre normal. Au centre du disque et du couvercle passe le tube barométrique E, qui a 7 millimètres environ de diamètre intérieur; il se termine par une pointe effilée qui va plonger dans le mercure de la cuvette. Celle-ci et le tube sont reliés ensemble au moyen de la peau de chamois *ce*, que deux fortes ligatures fixent, d'une part en *c*, à un étranglement du tube, d'autre part en *e*, à une tubulure de cuivre fixée au centre du couvercle. Cette fermeture suffit pour empêcher la sortie du mercure lorsqu'on renverse le baromètre; mais elle ne s'oppose pas à l'action de la pression atmosphérique, laquelle se transmet très bien, à travers les pores de la peau de chamois, au mercure de la cuvette.

A sa partie inférieure, le cylindre de verre *b* est mastiqué sur un cylindre de buis *zz*, et c'est sur le pourtour de celui-ci, en *ii*, qu'est fortement fixée, à l'aide d'une ligature, la peau de chamois *mn* qui forme le fond de la cuvette. A son centre, cette peau vient s'attacher à un bouton de buis *x*, lequel repose sur l'extrémité d'une vis C. Lorsqu'on tourne celle-ci dans un sens ou dans l'autre, le bouton monte ou descend, et avec lui le fond *mn*.

Un étui de laiton G enveloppe toute la partie inférieure de la cuvette et trois boulons à vis, *k*, *k*, *k*, le relient au couvercle M. De même, le tube barométrique est renfermé dans un étui de cuivre destiné à le protéger (fig. 217). Cet étui présente à sa partie supérieure deux fentes ou fenêtres longitudinales, opposées l'une à l'autre, qui laissent à nu le verre du tube et permettent de voir le niveau du mercure en A. L'une d'elles porte, gravées sur une arête, les

Fig. 217

divisions en millimètres de l'échelle, qui a son zéro au niveau constant marqué par la pointe de la cuvette. On peut apprécier le dixième ou le vingtième de millimètre à l'aide d'un vernier (au dixième ou au vingtième) qui est porté par un curseur AB (fig. 218). On fait monter ou descendre le curseur à l'aide d'un pignon B qui engrène avec une crémaillère pratiquée sur l'autre bord de la fenêtre graduée.

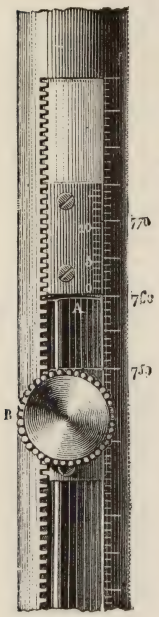


Fig. 218.

3° *Lecture du baromètre.* — On a vu (196, 1°) que le tube barométrique doit être parfaitement vertical pendant les observations. C'est pour cela qu'on commence par installer le baromètre verticalement. (Cela se fait de deux manières, suivant les cas : nous verrons plus loin comment.) On agit ensuite sur la vis C de manière à soulever le fond de la cuvette, jusqu'à ce que la surface libre du mercure vienne en contact avec la pointe d'ivoire *a* (fig. 216). Comme la surface métallique fait office de miroir plan et réfléchit la pointe *a*, il est plus facile d'apprécier l'instant précis où le contact est réalisé : *c'est l'instant où la pointe et son image se touchent.* Si l'on dépasse l'affleurement, on s'en aperçoit immédiatement à un autre phénomène de réflexion : la pointe, étant un peu mousse et n'étant pas mouillée par le mercure, déprime le liquide autour d'elle, et *on la voit entourée d'une auréole lumineuse* qui provient de la réflexion de la lumière sur la surface de la dépression. On fait alors redescendre le niveau mercuriel, jusqu'à ce que cette auréole ait disparu.

Il faut maintenant lire la hauteur du mercure dans le tube. Pour cela on se sert du curseur. Les bords supérieurs de ses deux fenêtres opposées étant situés dans un même plan horizontal, on amène ce plan à être tangent à la surface convexe du niveau mercuriel : ce contact est réalisé quand un rayon visuel, mené tangentiellement aux deux bords de ces fenêtres, rase en même temps le sommet convexe (ou ménisque) de la colonne. Supposons que le vernier du curseur soit un vernier au dixième. Le trait 0 coïncidant toujours avec le plan horizontal des bords supérieurs se trouve alors amené dans le plan horizontal du niveau. On n'aura donc qu'à lire sur l'échelle du tube barométrique le nombre entier de millimètres N, situé immédiatement au-dessous du trait 0 du vernier, puis à chercher quelle est la division *n* du vernier qui coïncide avec une division de l'échelle. On aura alors, pour la longueur *h* de la colonne barométrique, $h = \left(N + \frac{n}{10}\right)^{mm}$, à *un dixième de millimètre près* (d'après la formule ordinaire du vernier) [1].

1. Avec un baromètre de Fortin bien construit et bien établi on peut aisément répondre du dixième de millimètre. Le baromètre normal donne 1 cinquantième de millimètre ou même 1 centième de millimètre, suivant le degré de précision du cathétomètre dont on se sert. Mais les petites variations conti-

Il ne reste plus qu'à lire la température indiquée par un petit thermomètre (fig. 217) dont le réservoir est profondément enfoncé dans la gaine, de manière à donner exactement la température même du baromètre. Cette observation servira à la correction des erreurs dites *de température*.

4° *Corrections.* — L'observation de la pression atmosphérique pouvant se faire avec une grande précision à l'aide du baromètre de Fortin, il importe de connaître les causes d'erreur que ce genre de mesures comporte et le moyen de les corriger.

a. Il y a des erreurs provenant de la température et de la capillarité. Elles sont communes à tous les baromètres. Nous verrons plus loin la manière de les corriger.

b. Il y a une autre cause d'erreur qui est particulière au baromètre de Fortin : c'est le défaut de coïncidence qui peut exister entre le zéro de l'échelle et l'extrémité de la pointe d'ivoire. Pour s'en assurer, on relève au cathétomètre la distance verticale qui existe réellement entre la pointe et une division quelconque n de l'échelle. S'il y a coïncidence parfaite, cette distance, comptée sur l'échelle du cathétomètre, est trouvée égale à n millimètres. Sinon, on trouve $n \pm \varepsilon$: cette quantité ε représente l'écart qui existe dans l'instrument entre la pointe et le zéro ; on devra en corriger toutes les mesures ultérieures.

5° *Usages du baromètre de Fortin.* — Nous avons dit qu'on peut réaliser la verticalité de l'instrument par deux procédés, suivant l'usage auquel on le destine. En effet, le baromètre de Fortin peut servir aussi bien comme baromètre fixe, dans les laboratoires, que comme baromètre de voyage.

I. *Baromètre fixe.* — Dans le premier cas, on commence par l'installer le long d'un mur ou d'une planchette solide, bien verticale. Ce support est muni en haut d'un crochet, où l'on enfile un petit anneau, qui est placé au sommet de la gaine, et au bas un large anneau métallique, dans lequel passe librement le réservoir. Le baromètre ayant pris de lui-même la position verticale, on le saisit et on le fixe dans cette position à l'aide de trois vis de pression qui traversent l'anneau.

II. *Baromètre de voyage. — Suspension à la Cardan.* — Lorsqu'on veut se servir du baromètre dans une exploration scientifique, on l'installe verticalement à l'aide d'un support particulier appelé *suspension à la Cardan*, du nom de son inventeur.

Description. — L'étui métallique du tube est fixé par deux vis de pression a et b (fig. 219) à un manchon de cuivre X. Celui-ci porte deux tourillons o, o (dont un seul est visible dans la figure), lesquels tournent librement dans deux trous pratiqués dans un collier Y. Enfin, ce dernier porte lui-même, dans une direction perpendiculaire à celle des tourillons o, o, deux tourillons semblables, m et n, portés par un support Z. Par cette double suspension, le baromètre peut osciller librement dans deux directions rectangulaires autour des axes oo et mn, et il prend de lui-même une position d'équilibre dans laquelle son axe de figure est parfaitement vertical.

Théorie. — En effet, le baromètre et le manchon X, qui fait corps avec lui, forment une espèce de pendule composé dont l'axe de suspension est oo (fig. 219). Or on sait que, lorsqu'un pendule est en équilibre, son centre de gravité se trouve dans le plan vertical de l'axe de suspension. Comme le système est homogène et de forme régulière, les deux points d'attache o, o et le centre de gravité déterminent un des plans de symétrie du système. On peut donc dire que, lorsqu'il y a équilibre, l'un des plans de symétrie du baromètre coïncide avec le plan vertical de l'axe oo.

nuelles qu'éprouve la pression atmosphérique rendent illusoire une précision dépassant 1 dixième de millimètre. Le baromètre de Fortin doit suffire dans la plupart des cas. (Violle, *Cours de physique*, t. I.)

De même l'ensemble du baromètre et du collier Y forme un pendule composé, dont le centre de gravité se place, lorsqu'il y a équilibre, dans le plan vertical de l'axe *mn*. Comme la masse du collier Y est insignifiante par rapport à celle du baromètre, on peut admettre que le centre de gravité du second pendule coïncide sensiblement avec le centre de gravité du précédent. Par conséquent les deux points d'attache *m* et *n* et le centre de gravité déterminent un autre plan de symétrie du baromètre, qui, dans la position d'équilibre, coïncide avec le plan vertical de l'axe *mn*. Donc l'intersection des deux plans de symétrie du baromètre, *laquelle est l'axe de figure du baromètre*, coïncide avec l'intersection des deux plans verticaux *oo* et *mn*, *laquelle est une verticale*.

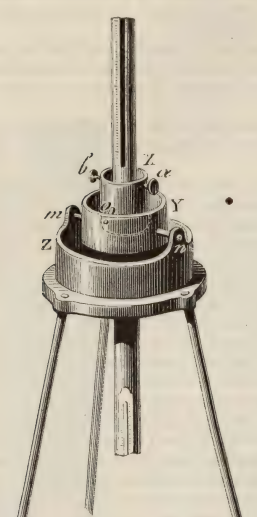


Fig. 219.

Remarque. — La suspension est souvent portée par un trépied en bois, dont les trois branches articulées sont évidées et forment, par leur réunion, une espèce de canne creuse qui sert d'étui pour serrer le baromètre et pour le transporter.

200. **Baromètres à siphon.** — 1° *Principe.* — Un *baromètre à siphon* consiste essentiellement en un tube de verre recourbé en deux branches inégales; la plus petite est ouverte et la plus grande, qui est fermée à son sommet, est remplie de mercure comme le tube d'un baromètre à cuvette. Dans cet instrument la hauteur barométrique est mesurée par *la distance verticale des niveaux dans les deux branches.*

Fig. 220.

On peut s'en rendre compte de deux manières.

Soit un baromètre à siphon *abc* (fig. 220) contenant du mercure jusqu'en *n* dans la petite branche *bc*, et jusqu'en *n'* dans la grande branche. Le liquide étant en équilibre dans l'instrument, on peut appliquer la condition générale d'équilibre des liquides pesants : la pression doit y être la même en tous les points d'un même plan horizontal, par exemple sur le plan du

niveau inférieur. Or, en n, dans la petite branche, c'est la pression atmosphérique qui s'exerce directement, et en n dans la grande branche, c'est le poids de la colonne mercurielle nn' : donc la hauteur de cette colonne est précisément la hauteur barométrique; or on voit qu'elle est égale à la distance verticale des deux niveaux nn'.

On peut aussi imaginer que le tube à siphon soit coupé en n (fig. 220) et placé sur une cuvette à mercure MM : le mercure s'y maintiendra, comme dans un baromètre ordinaire, jusqu'à une hauteur n', qui sera égale à la hauteur barométrique du moment. On ne changera rien à l'état d'équilibre actuel, si l'on solidifie tout le mercure de la cuvette, sauf dans l'intérieur d'un conduit recourbé tel que nbn, qu'on peut même prolonger jusqu'en c, au-dessus de la surface libre. Or l'ensemble du tube an et du conduit nbc constituera précisément un baromètre à siphon, et la hauteur barométrique, qui ne cessera pas d'être égale à nn', sera précisément égale à la distance des niveaux dans les deux branches.

2° *Baromètre de Gay-Lussac.* — Cette forme de baromètre est très ancienne. Pascal s'en servait déjà, et la regardait comme moins coûteuse et moins embarrassante que celle de Torricelli : Gay-Lussac y a attaché son nom (fig. 221) en apportant de notables perfectionnements à sa construction.

Description. — Il prenait pour les deux branches deux portions d'un même tube bien cylindrique et il les réunissait par un tube capillaire (fig. 222, I). Cela rendait l'instrument plus aisément transportable, car lorsqu'on le retournait (fig. 222, II) de manière à remplir complètement la grande branche, le tube capillaire ne se vidait pas et fermait aux bulles d'air l'accès dans la chambre barométrique.

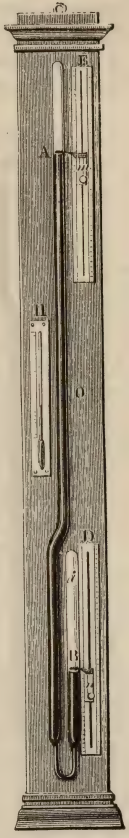


Fig. 221.

De plus, la courte branche est fermée à son extrémité supérieure comme la grande branche, de manière à empêcher l'entrée des poussières de l'air qui saliraient le mercure. Un petit trou conique i (fig. 223), pratiqué latéralement à l'aide d'une aiguille chauffée au rouge, suffit pour la pénétration de l'air et pour la transmission de la pression atmosphérique.

La hauteur barométrique se mesure au moyen de deux échelles ayant leur zéro commun en O (fig. 221), vers le milieu de la grande branche, et graduées en sens contraires, l'une de O vers A, l'autre de O vers B, sur deux règles de cuivre parallèles au tube barométrique. Deux curseurs à vernier, *m* et *n*, peuvent glisser sur les échelles, de manière à y indiquer les nombres de millimètres et de dixièmes de millimètre contenus entre O et A, puis entre O et B. La somme des deux nombres donne la hauteur AB.

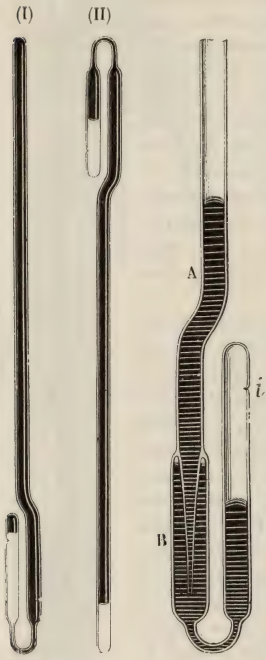


Fig. 222. Fig. 223.

Usages. — Le baromètre de Gay-Lussac, comme celui de Fortin, peut servir soit de baromètre fixe, soit de baromètre de voyage. Dans le premier cas, on le fixe sur une planchette, comme celui de la figure 221. Pour l'emporter en voyage, on commence par le retourner, comme cela est indiqué dans la figure 222 (II) : la grande branche se remplit alors de mercure, comme le tube du baromètre de Fortin, la jonction capillaire ne se vide pas et l'excès de liquide tombe au fond de la petite branche. Ainsi renversé, le siphon peut être transporté sans danger. Pour cela, on l'enferme dans un étui de cuivre entièrement semblable à celui du baromètre de Fortin, moins la cuvette. Pour que cet étui eût moins de largeur, Gay-Lussac avait eu soin de courber la branche capillaire de manière à ramener la petite branche dans le prolongement de la grande branche.

3° *Perfectionnement de Bunten.* — Pour se servir du baromètre il faut donc le redresser et le suspendre. Pendant cette opération, le mercure marche dans le tube capillaire en sens inverse de celui suivant lequel les bulles d'air tendent à rentrer ; mais en général, à cause de l'étroitesse du tube, l'air ne rentre pas, ainsi que l'avait prévu Gay-Lussac. Cependant il pourrait se faire que, par suite d'un choc trop brusque, la colonne de mercure qui reste dans le tube capillaire se divisât

et laissât passer de l'air. Pour prévenir cet accident, le constructeur Bunten imagina le perfectionnement suivant (fig. 223). Le tube capillaire n'est pas soudé directement à la grande branche, mais à un tube B, d'un fort diamètre, dans lequel cette branche pénètre en forme de pointe effilée. Grâce à ce dispositif, s'il passe des bulles d'air dans le tube capillaire, elles ne peuvent s'engager dans la pointe effilée du tube, et viennent se loger à la partie la plus élevée du renflement : là elles ne nuisent en rien à l'instrument, puisque le vide existe toujours au sommet.

201. **Construction des baromètres.** — 1° *Choix du liquide barométrique.* — On doit prendre le mercure de préférence à tout autre liquide, pour plusieurs raisons. D'abord, comme il est le plus dense des liquides, c'est celui qui prend la moindre hauteur pour faire équilibre à une pression déterminée : il en résulte que l'instrument a de moins grandes dimensions et est plus commode que s'il était construit avec tout autre liquide. De plus, le mercure est un liquide peu volatil, et les vapeurs qu'il émet à la température ordinaire n'ont qu'une tension insensible. Enfin il ne dissout pas les gaz. On n'a donc pas à craindre que les vapeurs du liquide barométrique ou les gaz dissous se répandent dans la *chambre barométrique* (on appelle ainsi l'espace vide qui se trouve au sommet de la colonne) et dépriment le mercure en vertu de leur force élastique.

2° *Purification du mercure.* — Pour que les baromètres à mercure soient des instruments non seulement précis, mais encore comparables, il faut avoir soin d'employer du mercure pur, c'est-à-dire purgé d'oxydes et de crasses métalliques, ainsi que de gouttelettes d'eau et de bulles d'air. Il faut aussi éviter avec soin l'interposition d'eau ou d'air entre les parois du tube et la colonne mercurielle.

Le mercure est ordinairement très pur quand il sort de la mine. On peut l'employer immédiatement à cet état, après l'avoir agité avec des cendres chaudes et filtré à travers une plaque poreuse. Mais quand le mercure a séjourné plus ou moins longtemps chez les marchands ou dans les laboratoires, il faut nécessairement lui faire subir une purification préalable avant de l'employer. On purifie le mercure impur soit par une distillation, soit par le procédé de Regnault.

Regnault chauffait le mercure dans une marmite en fonte, sous une couche d'acide azotique étendu de trois fois son poids d'eau. On arrêtait l'opération dès que l'on voyait apparaître les vapeurs rutilantes. Puis on laissait refroidir, on lavait à l'eau distillée et l'on séchait ensuite le métal avec beaucoup de soin.

Quant à l'expulsion de l'air et de l'eau qui ont pu s'interposer soit dans la colonne même, soit entre la colonne et les parois, c'est une opération qui se fait dans le tube même, après l'introduction du mercure.

3° *Remplissage des tubes barométriques.* — Le cas le plus simple est celui du baromètre à cuvette ordinaire. On prend un tube large, de 85 centimètres de longueur ; on le ferme à un bout, puis à l'autre bout on soude provisoirement une ampoule, qu'on en détachera après le remplissage. Quand le tube est ainsi préparé, on y verse, jusqu'au col de l'ampoule, du mercure parfaitement pur. Puis on le pose sur une grille de tôle inclinée (fig. 224), et on l'entoure de charbons incandescents, de manière à le porter à une

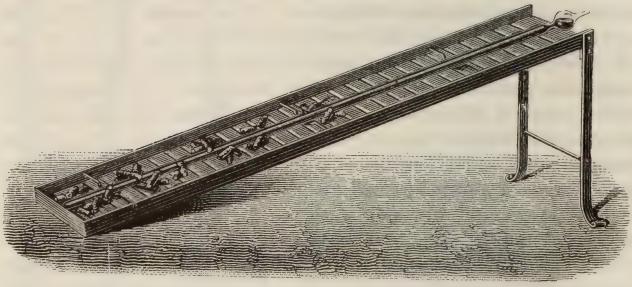


Fig. 224.

température voisine de celle de l'ébullition du mercure. On ajoute alors de nouveaux charbons vers la partie inférieure de la grille, afin de faire naître l'ébullition, et quand elle a été prolongée 4 à 5 minutes, on porte les charbons un peu plus haut; on poursuit l'opération jusqu'à ce que l'on ait fait bouillir le mercure successivement dans toute la longueur du tube. Pendant l'ébullition, les vapeurs mercurielles qui se dégagent occasionnent des soubresauts dans le tube et tendent à rejeter le mercure au dehors ; c'est à recevoir le mercure ainsi projeté qu'est destinée l'ampoule de l'extrémité supérieure.

Une fois le mercure refroidi, on enlève l'ampoule en donnant un trait de lime sur le col, on achève de remplir complètement le tube avec du mercure pur et chaud, puis on ferme hermétiquement en écrasant avec le doigt le bouton convexe qui émerge de l'orifice, comme dans l'expérience de Torricelli (fig. 211); on le renverse dans sa cuvette et le baromètre est construit.

Remarques. — 1° Après l'opération précédente, le mercure a complètement changé d'aspect : les bulles d'air et l'humidité qui adhéraient au verre ont disparu, et le tube présente l'éclat métallique d'un miroir bien étamé. C'est à ce signe qu'on reconnaît que le baromètre est bien purgé de gaz; de plus, lorsqu'on incline doucement le tube, on entend un son sec et métallique produit par le choc du mercure contre le sommet : s'il restait de l'air ou de l'humidité dans la chambre barométrique, le son serait amorti.

2° *Cas des baromètres à siphon.* — Le baromètre de Gay-Lussac se remplit de la même manière. Les deux branches sont d'abord réunies par le tube capillaire, de manière à former un seul et même tube, à peu près rectiligne; une fois le mercure introduit et bouilli, on courbe le tube dans sa partie capillaire, en le chauffant sur des charbons ou à la lampe d'émailleur.

202. **Corrections barométriques.** — Quelles que soient les précautions apportées dans la construction du baromètre, quelque précise que soit la lecture de la hauteur barométrique, toutes les observations sont nécessairement entachées de deux espèces d'erreurs, inhérentes à la nature même de l'instrument : les unes sont dues à la capillarité, les autres aux variations de la température. Appelons E_c la somme des premières et E_t la somme des autres; soit h la mesure barométrique initiale et H la mesure corrigée : on aura évidemment

$$H = h + E_c + E_t.$$

Nous allons déterminer successivement E_c et E_t.

I. *Corrections relatives à la capillarité.* — 1° *Dépression capillaire.* — Dans tous les tubes barométriques dont le diamètre est inférieur à 25 ou 30 millimètres, la colonne mercurielle, *qui ne mouille pas le verre*, subit une dépression plus ou moins forte; de plus, au lieu de se terminer par une surface plane horizontale, elle se termine par une surface (ou ménisque) convexe. Ce fait curieux, qui est une exception aux lois de l'hydrostatique, est un fait général. Il se reproduit toutes les fois qu'un liquide, *ne mouillant pas le verre*, est introduit dans un tube étroit. Il fait partie d'un ensemble de phénomènes que nous étudierons plus loin sous le nom de *phénomènes capillaires.*

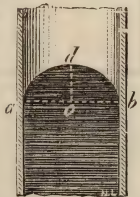


Fig. 225.

Il en résulte que dans tous les baromètres, sauf le baromètre normal, la hauteur observée est plus petite que la hauteur vraie; on commet donc, dans la lecture, une *erreur en moins*, et la correction E_c est une *quantité positive.* On démontre que cette dépression capillaire dépend à la fois du diamètre du tube et de la *flèche* du ménisque. On appelle ainsi la hauteur *od* (fig. 225) de la surface convexe du mercure au-dessus de la section horizontale *ab* qui sert de base au ménisque.

2° *Méthode générale de correction.* — Pour évaluer l'erreur capillaire, il faut donc déterminer, dans chaque cas, ces deux éléments.

Mesure de la flèche. — Pour un même tube, la longueur de la flèche n'est pas constante : elle varie selon que le ménisque est formé pendant un mouvement ascendant ou un mouvement descendant. On la mesure en faisant affleurer le bord supérieur du curseur successivement à la base du ménisque, puis au sommet. En lisant sur l'échelle le déplacement du curseur, on a la hauteur de la flèche.

Mesure du diamètre. — Le diamètre intérieur des tubes se détermine en les pesant successivement vides et pleins de mercure. La différence des poids donne le poids du cylindre de mercure contenu dans les tubes. La hauteur h de ce cylindre étant facile à mesurer, le volume et par suite la section se déduit de la formule $P = ShD$. Ce procédé ne peut d'ailleurs s'appliquer qu'à des tubes *bien calibrés*, c'est-à-dire parfaitement cylindriques. Ordinairement le constructeur joint à l'instrument un morceau du tube qui a servi à le construire. C'est à ce bout de tube qu'on applique aisément le procédé.

Si l'on n'a pas à sa disposition de morceau de tube, on peut évaluer le diamètre intérieur du tube à l'aide d'un procédé optique, qui est une application des lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Il consiste à mesurer l'épaisseur du tube; on n'a plus qu'à la déduire du diamètre extérieur, qu'il est facile d'obtenir directement.

Table de correction. — Quand on a ainsi déterminé la flèche du ménisque ainsi que le diamètre intérieur du tube, on n'a plus qu'à chercher la valeur de la dépression dans des tables à double entrée, calculées d'après des formules de Laplace. Nous en donnons un spécimen dans le tableau suivant, tiré des tables calculées par Delcros d'après les formules de Schleiermacher.

DIAMÈTRE intérieur en millimètres.	HAUTEUR DE LA FLÈCHE DU MÉNISQUE.											
	mil. 0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6
4	0,60	0,89	1,16	1,41	1,65	1,86	2,05	2,21	2,35	»	»	»
6	0,24	0,36	0,48	0,59	0,70	0,80	0,90	0,99	1,07	1,21	1,32	»
8	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,40	0,46	0,50	0,55	0,64	0,71	0,77
10	0,07	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,28	0,31	0,35	0,40	0,44
12	0,04	0,06	0,07	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16	0,18	0,21	0,23	0,25
14	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,14	0,15

La première colonne verticale à gauche contient les diamètres intérieurs des tubes; la première ligne horizontale, les hauteurs des flèches; et les autres colonnes, les dépressions. Pour tous ces nombres, l'unité est le millimètre.

On se sert de cette table comme de la table de multiplication ordinaire, qui est le type des tables à double entrée. Par exemple, si le diamètre intérieur du tube barométrique est 10 millimètres, et si la flèche est égale à $0^{mm},6$, on trouve, au point de croisement de la ligne commençant par 10 et de la colonne commençant par 0,6, le nombre $0^{mm},19$ pour la dépression cherchée.

3° *Application de la méthode générale aux baromètres à siphon.* — La correction E_c est dans ce cas la différence de deux erreurs : une *erreur en plus* provenant de la dépression du mercure dans la petite branche et une *erreur en*

moins provenant de la dépression dans la grande branche. Gay-Lussac avait supposé qu'en donnant à ces branches exactement le même diamètre, ces deux dépressions seraient égales et de signe contraire et que, par suite, l'erreur due à la capillarité serait annulée. Mais l'expérience n'a pas vérifié cette prévision. Les deux ménisques ont des flèches inégales, parce que l'un est ascendant, tandis que l'autre est descendant, et la différence est bientôt accrue par suite de l'altération du mercure au contact de l'air dans la petite branche. Donc, dans les baromètres à siphon, il faut effectuer *deux corrections capillaires, au lieu d'une.* Chacune des dépressions s'évalue par la méthode générale.

4° *Cas du baromètre Fortin : méthode particulière de correction.* — Nous avons vu que le baromètre Fortin est assez précis pour remplacer, dans la plupart des cas, le baromètre normal ; aussi l'usage des tables ne fournirait-il pas une correction suffisante de l'erreur capillaire, parce que les nombres qu'elles contiennent sont peu certains. On emploie alors une méthode de correction par comparaison, plus simple et plus précise. Étant donné le baromètre Fortin dont on doit se servir, on commence par l'observer pendant une quinzaine de jours comparativement avec un baromètre normal, lequel est affranchi, comme nous l'avons dit, de toute erreur capillaire. On constate nécessairement entre deux observations simultanées une différence de hauteur, qui correspond à la dépression capillaire. Si le baromètre de Fortin a été bien construit, et si la portion du tube où se meut le ménisque mercuriel est parfaitement cylindrique, la différence entre les deux observations simultanées est nécessairement un nombre *constant.* Supposons qu'il en soit ainsi. On note cette dépression constante, qui est une *constante* de l'instrument. Elle est égale à la correction qu'il faudra ajouter ultérieurement à chaque observation directe du baromètre, pour la corriger de l'erreur capillaire.

Il est évident que cette constante devra être déterminée à nouveau après toute réparation entraînant une modification matérielle de l'instrument[1].

II. *Corrections de température.* — 1° *Erreurs dues à la variation de température.* — La correction que nous avons désignée par E_t est la somme algébrique de deux corrections qui correspondent à des erreurs de signe contraire. L'une est due à la dilatation des règles métalliques qui servent à évaluer les hauteurs barométriques : c'est une *erreur en moins ;* l'autre est due à la dilatation du mercure lui-même : c'est une *erreur en plus.*

Formules de correction. — Dilatation de l'échelle. — L'échelle ayant été graduée à 0°, chacune de ses divisions ne vaut 1 millimètre qu'à cette température. Si t^0 est la température de l'observation, chaque division est devenue égale à $1^{mm} \times (1 + \lambda t)$ (comme on le démontrera plus tard dans le chapitre des Dilatations).

La hauteur totale, qu'on a trouvée égale à h, vaut donc en réalité $h(1 + \lambda t)$ (λ étant ce qu'on appelle le coefficient de dilatation linéaire du métal dont est faite la règle divisée ; pour le laiton, $\lambda = 0{,}000019$). En ne prenant que le nombre h, lu directement sur l'échelle, on commet donc une erreur en moins égale à $h\lambda t$: la correction correspondante doit donc être *positive.*

Dilatation du mercure. — De même, le mercure à t^0 étant moins dense que le mercure à 0°, la hauteur barométrique mesurée à la température t^0 est

1. Violle, *Cours de physique*, t. I.

plus grande, pour la même pression atmosphérique, que si le mercure du baromètre était à 0°. Soit h_0 cette dernière hauteur, D_0 le poids spécifique du mercure à 0° ; soit h la hauteur à t^0 et D le poids spécifique à t^0. D'après ce qu'on a vu plus haut, il existe entre ces quatre quantités la relation $\frac{h_0}{h} = \frac{D}{D_0}$. On verra plus tard que $D_0 = D(1 + mt)$, m étant ce qu'on appelle le coefficient de dilatation absolue du mercure ($m = 0{,}00018$). On a donc

$$\frac{h_0}{h} = \frac{D}{D_0} = \frac{1}{1 + mt}.$$

Si on effectue la division algébrique de l'unité par $1 + mt$, on trouve

$$1 - mt + m^2t^2 \ldots ;$$

tous les termes qui suivent le second contiennent le coefficient m à des puissances supérieures à la première et de plus en plus élevées ; on peut les négliger, à cause de la petitesse de m, et écrire $\frac{1}{1 + mt} = 1 - mt$. L'équation précédente devient alors

$$\frac{h_0}{h} = 1 - mt, \qquad \text{d'où} \qquad h_0 = h(1 - mt).$$

Donc, en prenant le nombre h lu sur l'échelle au lieu de h_0, on a commis une *erreur en plus* égale à hmt : la correction correspondante doit donc être *négative*.

3° *Réduction de la hauteur barométrique à 0°. — Hauteur réduite à 0°.* — En réunissant ces deux corrections successives, on a la correction de température complète

$$E_t = h(\lambda - m)\, t.$$

Comme le coefficient m est beaucoup plus grand que le coefficient λ, il en résulte que l'*erreur en plus*, due à la dilatation du mercure, est beaucoup plus grande que l'*erreur en moins*, due à la dilatation de l'échelle : la correction totale doit donc être négative, et il convient de l'écrire sous la forme suivante

$$E_t = -h(m - \lambda)\, t.$$

On aura enfin pour la hauteur barométrique corrigée des erreurs de température la formule définitive

$$h_0 = h + e_c - h(m - \lambda)\, t = h[1 - (m - \lambda)\, t] + e_c.$$

Le nombre h_0 est ce qu'on appelle la *hauteur réduite à zéro ;* la méthode de correction elle-même s'appelle *réduction de la hauteur barométrique à 0°*.

Enfin, la hauteur barométrique H_0, corrigée des deux sortes d'erreurs qui affectent la hauteur brute, sera donnée par la formule

$$H_0 = h_0 + E_c = h[1 - (m - \lambda)\, t] + E_c.$$

4° Remarque générale. — Pour être tout à fait rigoureux, on aurait dû faire porter la première correction de température, non pas sur la mesure brute h, mais sur cette mesure déjà corrigée de la capillarité. Cette première correction eût été alors $h\lambda t + E_c\lambda t$. De même, la deuxième correction de température eût dû porter, non pas sur la mesure initiale h, mais sur ce nombre déjà deux fois corrigé $(h + e_c)(1 + \lambda t)$, et l'on aurait eu alors la formule définitive

$$H = (h + E_c)(1 + \lambda t)(1 - mt);$$

elle ne diffère de la précédente que par des termes où entre soit le produit de E_c par l'un ou l'autre coefficient de dilatation, soit le produit de ces coefficients ; or ces termes sont négligeables à cause de leur petitesse.

203. **Réduction du baromètre à la latitude de 45° et au niveau de la mer.** — Si l'on fait subir les corrections précédentes aux observations barométriques, le baromètre devient un instrument de précision *toujours comparable à lui-même dans un même lieu :* autrement dit, les indications d'un même instrument, ou de deux instruments construits d'après les règles précédentes, seront constamment les mêmes pour une même pression atmosphérique dans un même lieu. Mais il n'en sera pas ainsi lorsqu'on transportera le même instrument à des altitudes ou sous des latitudes différentes. Comme le poids spécifique du mercure variera proportionnellement aux variations de g, tout se passera comme si l'on substituait au mercure primitif un autre liquide plus ou moins dense : on n'aura plus affaire au même instrument, et les hauteurs qu'on observera, en différents lieux, pour la même pression atmosphérique, ne seront pas les mêmes. Pour obvier à cet inconvénient, c'est-à-dire pour rendre le baromètre comparable à lui-même, en tout lieu, on est convenu, pour les mesures de précision, de réduire les hauteurs barométriques à ce qu'elles eussent été si le mercure de l'instrument avait toujours le poids spécifique normal qu'il possède au niveau de la mer et sous la latitude de 45°. A la hauteur corrigée, que nous avons désignée par H_0, on substitue donc une hauteur H, réduite *à la latitude 45° et au niveau de la mer.*

Formule de réduction. — Soit δ la densité mécanique du mercure, coefficient qui est le même partout; soient g la valeur de l'accélération dans le lieu de l'observation, et γ la valeur de l'accélération normale : le poids spécifique du mercure est δg dans le lieu de l'observation, et le poids spécifique normal est $\delta\gamma$. Soit P la valeur de la pression atmosphérique, évaluée en kilogrammes, sur l'unité de surface : quelle que soit la colonne barométrique qui lui fait équilibre, on doit avoir

$$P = H_0\,\delta g$$

et

$$P = H\delta\gamma.$$

On a donc l'équation

$$H\delta\gamma = H_0\,\delta g,$$

d'où

$$H = H_0 . \frac{g}{\gamma}.$$

Le rapport $\frac{g}{\gamma}$ a été déterminé à l'aide du pendule. Il est donné par la formule

$$\frac{g}{\gamma} = (1 - 0{,}00259 \cos 2\lambda)\,(1 - 0{,}00000000314\,z).$$

où λ est la latitude et z l'altitude du lieu. On a donc enfin pour la hauteur barométrique

$$H = H_0 (1 - 0{,}00259 \cos 2\lambda)(1 - 0{,}00000000514\, z).$$

204. **Pression atmosphérique en unités C. G. S. — Atmosphère C. G. S.** — Les considérations précédentes mettent en évidence ce fait que la même pression atmosphérique, étant représentée par un certain nombre de millimètres ou par un certain nombre de grammes, n'aura pas la même valeur numérique aux différents points du globe. Les météorologistes évitent cet inconvénient en réduisant la hauteur barométrique à la latitude 45° et au niveau de la mer. On arriverait au même résultat en exprimant les pressions en unités de poids C. G. S.

Nous avons vu que la hauteur barométrique de 76 centimètres correspond, à Paris, à un poids de 1033 grammes par centimètre carré : cela ferait, en dynes, $1033 \times 981 = 1{,}0136 \times 10^6$, c'est-à-dire un peu plus d'une *mégadyne*. On voit donc que le poids d'*une mégadyne* est très voisin de l'unité vulgaire de pression atmosphérique, représentée par une hauteur barométrique de 76 centimètres.

On appelle *unité de pression atmosphérique C. G. S.*, ou bien *atmosphère C. G. S*, la pression qu'exercerait un poids de 1 mégadyne par centimètre carré. Cette pression correspondrait, *à Paris*, à une hauteur barométrique de $74^{cm},978$.

205. **Prévision du temps par le baromètre.** — Un des principaux usages du baromètre, dans la pratique, est la prévision du temps, par les variations de la hauteur barométrique. Nous allons examiner jusqu'à quel point cet usage est légitime et rationnel.

On a observé, *dans nos climats*, que le baromètre se tient communément, par le beau temps, au-dessus de $0^m,758$, tandis qu'il se tient au-dessous de cette hauteur par les temps de pluie, de neige, de vent ou d'orage ; et enfin que, lorsqu'il est à $0^m,758$, il y a en moyenne autant de jours de beau temps que de jours de pluie. Cette concordance remarquable, bien constatée dans les climats tempérés, entre la hauteur barométrique et l'état du ciel justifie donc dans une certaine mesure l'emploi du baromètre pour la prévision du temps. On adapte à l'instrument, pour cet usage, une petite graduation spéciale. Elle se compose d'indications sur le temps probable qui correspond à des variations de pression de 9 millimètres sur l'échelle barométrique un peu au-dessus et un peu au-dessous de $0^m,758$.

Hauteur.	État de l'atmosphère.
785 millimètres	Très sec.
776 —	Beau fixe.
767 —	Beau temps.
758 —	Variable.
749 —	Pluie ou vent.
740 —	Grande pluie.
731 —	Tempête.

En consultant le baromètre pour prévoir les changements de

temps, il ne faut pas perdre de vue que cet instrument n'est réellement destiné qu'à mesurer le poids de l'atmosphère en un lieu déterminé, et que la colonne ne monte ou ne descend qu'autant que ce poids augmente ou diminue. Or, de ce que les changements de temps coïncident le plus souvent avec les variations de pression, cela ne veut pas dire qu'ils y soient invariablement liés. Cette coïncidence tient à des conditions météorologiques particulières à notre climat, et elle n'est pas sans offrir d'exceptions. Si les dépressions barométriques précèdent ordinairement la pluie dans nos contrées, cela tient à la situation géographique de l'Europe. En effet, les vents du sud-ouest qui font baisser le baromètre sont des vents chauds et humides : rencontrant un air plus froid, ils s'y refroidissent brusquement et abandonnent alors une partie de la vapeur d'eau dont ils étaient chargés ; celle-ci se condense et se résout en pluie. Au contraire, les vents du nord et du nord-est, qui sont froids et peu humides, font monter le baromètre ; comme ils rencontrent une atmosphère plus chaude, les vapeurs qu'ils contiennent ne peuvent se condenser et donner de la pluie.

Règle empirique. — Lorsque le baromètre monte ou descend d'une manière lente et continue pendant deux ou trois jours, vers le beau temps ou vers la pluie, *l'arrivée ou la persistance du beau temps ou de la pluie peut être considérée comme très probable.* Quant aux variations brusques, dans l'un ou l'autre sens, elles présagent la pluie ou le vent, ou même la tempête.

206. **Baromètre à cadran.** — L'un des instruments auquel on adapte le plus communément cette graduation météorologique est le baromètre très répandu sous le nom de *baromètre à cadran*. Il fut imaginé par Hooke, en 1665 ; c'est un baromètre à siphon.

L'organe apparent du baromètre est, en effet, un cadran plus ou moins orné, qui porte, étalée en cercle, une graduation météorologique : *beau temps*, *variable*, etc. ; une longue aiguille la parcourt (fig. 226), mise en mouvement par le mercure même de l'instrument, au moyen du mécanisme représenté à droite de la figure. A l'axe de l'aiguille est fixée un poulie O, sur laquelle s'enroule un fil qui porte à l'une de ses extrémités un poids P, et à l'autre un flotteur un peu plus pesant que ce poids, et soutenu par le mercure de la petite branche du siphon. Quand la pression atmosphérique vient à augmenter, le niveau baisse dans la petite branche, le flotteur descend et entraîne la poulie : l'aiguille marche de gauche à droite. Le mouvement contraire a lieu quand la pression diminue, parce que le mercure monte dans la petite branche et relève en même temps le flotteur. Il résulte de là que l'aiguille s'arrête aux indications *variable*, *pluie*, *beau temps*, *beau*

fixe, etc., qui sont marquées sur le cadran, lorsque le baromètre prend les hauteurs correspondantes, pourvu toutefois que l'instrument soit bien réglé. Cela a lieu très rarement; car, si l'instrument est *sensible*, c'est-à-dire si un léger déplacement du flotteur produit un déplacement considérable de l'aiguille, il n'a aucune précision, à cause des frottements et de l'altération rapide du ménisque mercuriel.

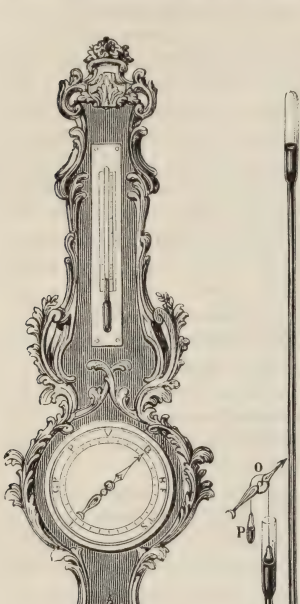


Fig. 226.

207. **Mesure des altitudes par le baromètre ou nivellement barométrique.** — Un autre usage très fréquent du baromètre, mais celui-là plus rationnel, c'est la mesure des altitudes. La théorie du baromètre fait prévoir, et l'expérience de Périer a démontré, que *la pression atmosphérique diminue à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère.* Comme la diminution de pression est accusée par la dépression barométrique, il en résulte qu'*il existe une relation entre l'altitude d'un lieu et la hauteur barométrique qu'on y observe.* On conçoit donc que l'on puisse déduire de l'observation du baromètre la distance verticale de deux lieux, situés sous la même latitude, mais à des altitudes différentes Cette opération géodésique, désignée quelquefois sous le nom de *nivellement barométrique*, est l'une des applications les plus intéressantes du baromètre de précision.

1° *Calcul approximatif.* — Si la densité de l'air restait la même à toutes les altitudes, l'opération se réduirait à un calcul très simple. En effet, la densité du mercure étant 10 466 fois plus grande que celle de l'air, une colonne barométrique de 1 millimètre fait équilibre à une colonne d'air de même section et 10 466 fois plus haute, c'est-à-dire égale à $10^{m},466$. Si donc la différence

des hauteurs barométriques, observées en deux stations, était de 1, 2, 3... millimètres, on en conclurait que la différence des altitudes est une fois, deux fois, trois fois... $10^m,466$. Mais, *comme la densité de l'air décroît lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère*, ce calcul ne peut s'appliquer qu'à de très petites hauteurs.

2° *Énoncé de la formule de Laplace* ou *formule barométrique*. — En tenant compte de cette variation de densité, Laplace a trouvé une relation numérique, assez complexe, entre les hauteurs barométriques H' et H, observées à deux stations, et leur différence d'altitude z. Cette relation, qu'on appelle *formule barométrique*[1], est la suivante :

$$z = 18405^m (1 + 0{,}002552 \cos 2\lambda) \left[1 + 2\,\frac{t + t'}{1000}\right] \log \frac{H}{H'};$$

H' et H sont les hauteurs barométriques, *corrigées et réduites*, à la station la plus élevée et à l'autre station, t' et t sont les températures, λ la latitude du lieu.

Cette formule suppose encore plusieurs conditions, qui ne sont jamais qu'imparfaitement réalisées : 1° que l'intensité de la pesanteur ne varie pas sensiblement entre les deux stations ; 2° que la température soit constante et égale à la moyenne des températures extrêmes ; 3° que la couche d'air interposée soit parfaitement calme et dénuée de vapeur d'eau ; 4° que le coefficient de dilatation de l'air soit égal à 0,004, au lieu de 0,00366.

Pour la latitude de 45°, $\cos 2\lambda = 0$, et la formule devient

$$z = 18405 \left[1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right] \log \frac{H}{H'}.$$

3° *Énoncé de la formule de Babinet*. — Pour les hauteurs moindres que 1000 mètres, Babinet a donné la formule simplifiée :

$$z = 16000^m \left(\frac{H' - H}{H' + H}\right) \left[1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right],$$

qui dispense de l'usage des logarithmes.

4° *Applications des formules*. — La plus fréquente application de ces formules consiste dans la mesure de la hauteur d'une montagne. Il faudra choisir un temps calme, afin de se rapprocher de l'état d'équilibre atmosphérique supposé par la formule. Si la hauteur à mesurer n'est pas très grande, on peut opérer seul ; mais si elle est un peu considérable et exige un temps d'ascension un peu long, pendant lequel la pression atmosphérique peut varier, il faut être deux, et avoir deux baromètres comparables. L'un des observateurs reste au pied de la montagne, l'autre se transporte au sommet ; puis, à une heure convenue, ils observent simultanément la hauteur du baromètre et la température. En prenant ces précautions, on fait une mesure exacte à quelques mètres près.

Remarquons que ces formules barométriques peuvent servir à réduire les hauteurs barométriques au niveau de la mer, quand on connaît les différentes altitudes z des lieux d'observation.

1. Voir dans l'*Annuaire du bureau des longitudes* la formule barométrique complète, avec les coefficients numériques, et telle qu'on l'emploie dans la pratique.

5° *Baromètres employés.* — Pour le nivellement barométrique, on doit employer de préférence les instruments qui, tout en étant portatifs, sont des baromètres de précision, tels que le baromètre de Gay-Lussac et surtout le baromètre de Fortin. Cependant les instruments les plus usuels sont les baromètres dits *métalliques* ou *anéroïdes :* leur infériorité au point de vue de la précision est compensée par leur grande supériorité au point de vue de la commodité : nous en décrirons plus loin les principaux types.

208. **Calcul de la formule barométrique.** — *Soit* z *l'altitude d'une station, où la hauteur barométrique réduite est* H ; *à un accroissement d'altitude* Δz *correspond un accroissement négatif de hauteur barométrique que nous appellerons* — ΔH ; H *est donc une fonction de* z *qu'il s'agit de déterminer.*

Exprimons que la diminution de poids de la colonne mercurielle est précisément égale au poids de la colonne d'air ayant même section que le baromètre et une hauteur Δz. Soit m le poids spécifique normal du mercure (c'est-à-dire au niveau de la mer, à la latitude de 45° et à la température de 0°) ; soit a le poids spécifique de l'air dans la région atmosphérique considérée, on aura

$$-m\Delta H = a\Delta z.$$

Si nous supposons que a fût une constante, comme m, nous retrouverions ici la même équation que dans le calcul approximatif que nous avons fait plus haut; mais ici a est une quantité variable, c'est une fonction de la pression atmosphérique, c'est-à-dire de H. D'après la loi de Mariotte (168), le poids spécifique d'un gaz est proportionnel à la pression qu'il supporte. En supposant que la pression soit H tout le long de la colonne Δz (ce qui sera vrai, à la limite, quand Δz tendra vers 0), on aura

$$a = KH,$$

K étant une constante qui représente le poids spécifique qu'aurait ce même air sous une pression égale à 1 mètre de mercure. L'équation ci-dessus devient alors

$$-m\,\Delta H = KH\Delta z,$$

ou

$$\frac{\frac{\Delta H}{\Delta z}}{H} = -\frac{K}{m},$$

ou bien, comme l'équation n'est vraie qu'à la limite,

$$\lim.\left(\frac{\frac{\Delta H}{\Delta z}}{H}\right) = -\frac{K}{m}.$$

On sait que le premier membre de cette équation est la dérivée de log nép. H, H étant une fonction de z.

Si l'on prend la fonction primitive de chacun des deux membres, considérés chacun comme une dérivée par rapport à z, il vient

$$L.\,H = -\frac{K}{m}z + \text{constante}.$$

Pour déterminer la constante, il suffit d'appliquer la formule à un cas particulier, par exemple à celui d'une station pour laquelle $z = 0$. Soit H_0 la hauteur barométrique réduite, observée en ce lieu, on a

$$L.H_0 = \text{constante},$$

d'où, en remplaçant la constante par sa valeur, et résolvant l'équation par rapport à z, il vient

$$[1] \qquad z = -\frac{m}{K} L.\frac{H}{H_0} = +\frac{m}{K} L.\frac{H_0}{H}$$

et, en remplaçant le log nép. de $\frac{H}{H_0}$ par le log vulgaire (qui est égal à $\frac{1}{\log e} \log \frac{H_0}{H}$), il vient

$$[2] \qquad z = \frac{m}{K \log e} \log \frac{H_0}{H}.$$

En remplaçant m, K et $\log e$ par leurs valeurs numériques, en faisant les simplifications indiquées ci-dessus, et en appliquant la formule à l'altitude inconnue z où la pression est H'_0, on aura la formule de Laplace.

Remarque. — De l'équation [1] on déduit, en appliquant simplement la définition des logarithmes népériens,

$$H = H_0 e^{-\frac{K}{m} z}.$$

Cette équation exprime la loi de variation de la hauteur barométrique avec l'altitude. On peut l'énoncer comme il suit :

Quand les altitudes croissent en progression arithmétique, les hauteurs barométriques décroissent en progression géométrique.

209. **Baromètres métalliques ou anéroïdes.** — 1° *Principe.* — Le principe de ces appareils a été donné par Vidi. Ils indiquent les variations de la pression atmosphérique par les déformations plus ou moins grandes qu'elle fait subir à une boîte métallique, à parois très élastiques, qui est vide d'air et parfaitement close. On les gradue par comparaison avec un baromètre à mercure ; mais cette graduation, peu précise, même au début, ne tarde pas à le devenir de moins en moins, par suite d'une variation lente dans l'élasticité du ressort métallique et d'une déformation correspondante de ce dernier.

2° *Baromètre de Vidi.* — L'application la plus heureuse de ce principe est celle que Vidi lui-même en a faite dans le baromètre qui porte son nom. Il se compose d'un tronc de cylindre métallique dont la base inférieure est plane et la base supérieure cannelée circulairement (fig. 227). On y fait le vide intérieurement et la pression atmosphérique s'exerçant, sans contrepoids, sur la face supérieure, tend à aplatir plus ou moins cette espèce de boîte. Les plis métalliques *n'augmentent pas la pression proportionnellement à leur surface*, car la résultante des pressions que l'atmosphère exerce sur eux ne dépend que de la superficie de leur projection horizontale, mais ils accroissent beaucoup la flexion correspondante à une même pression. Cette flexion produit le dé-

placement vertical d'un pilier métallique, court et gros, M, fixé au centre de la base cannelée. Ce mouvement se transmet à une aiguille L, mobile sur un cadran divisé par l'intermédiaire d'un ressort puissant R, des tiges articulées l et m, de l'axe r de la tige articulée t et de la chaîne s, laquelle vient s'enrouler

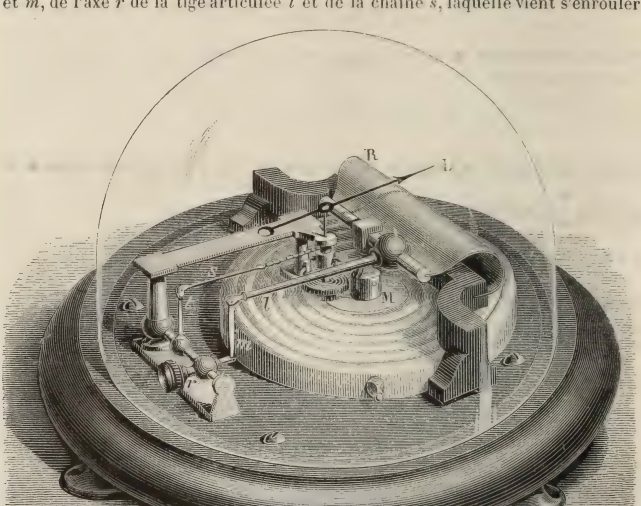


Fig. 227.

sur la poulie qui porte l'aiguille et y est tendue au moyen d'un petit ressort antagoniste. La figure 228 montre en perspective un de ces baromètres, dont le mécanisme est légèrement modifié : c'est une ancre, au lieu d'une chaîne, qui transmet le mouvement à l'aiguille.

3° *Baromètre de Bourdon.* — Il est formé (fig. 229) d'un tube métallique aplati (dont la section est représentée en S), dans lequel on a fait le vide et qu'on a fixé par son milieu. Quand la pression atmosphérique augmente, comme elle n'est pas équilibrée intérieurement, le tube s'aplatit davantage, sa section s'élargit et sa longueur diminue : il en résulte que la courbure s'accentue et que les deux extrémités se rapprochent. C'est le mouvement contraire qui se produit lorsque la pression atmosphérique diminue. Ces déplacements sont transmis à l'aiguille par l'intermédiaire de deux tiges articulées à un levier mobile autour de son point fixe.

Ce levier est fixé par ses deux bras aux tiges articulées et par son centre à un secteur denté, auquel il transmet les mouvements du tube métallique; le secteur engrène avec un pignon qui porte l'aiguille et là fait mouvoir sur un cadran divisé où l'on a marqué les indications *variable*, *beau*, *beau fixe*, etc.

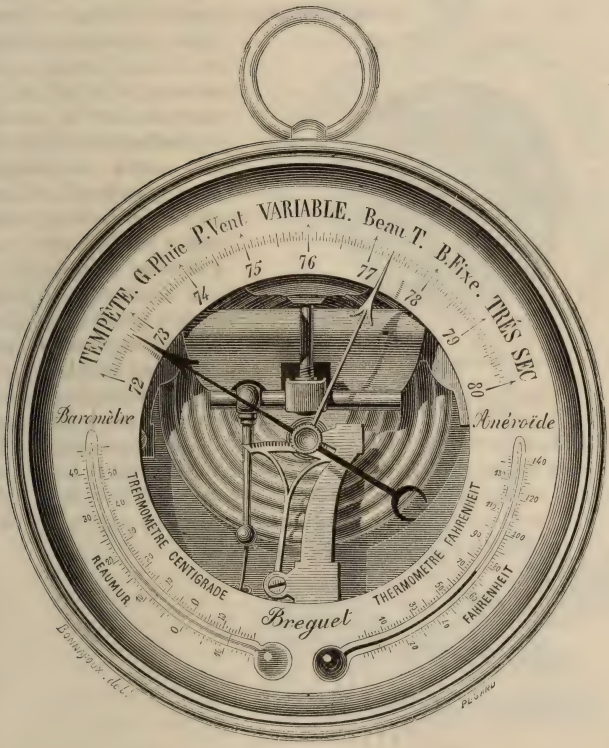


Fig. 228.

4° *Avantages et inconvénients des baromètres métalliques.* — Ces baromètres sont très commodes, très portatifs, très sensibles, mais peu précis. L'élasticité du métal se modifie, par le jeu même de l'instrument, de manière que celui-ci, après avoir été bien réglé au début, ne l'est plus au bout de peu de temps. Ce défaut est

particulièrement sensible dans les baromètres (de poche) qui servent aux courses et aux ascensions aérostatiques, où ils subissent des variations de pression brusques et considérables. Pour apprécier la précision d'un instrument de ce genre, il faut l'essayer, comparativement à un baromètre à mercure, dans un récipient où l'on fait varier graduellement la pression entre les limites pour lesquelles il est construit. Cet essai doit être répété de temps à autre, à titre de vérification.

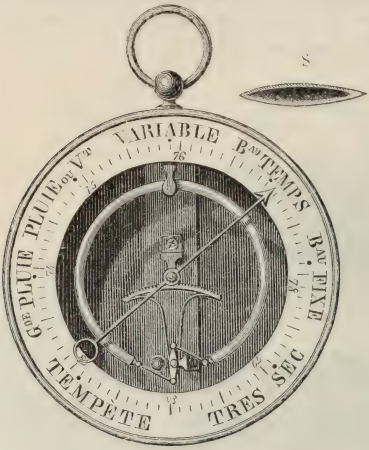


Fig. 229.

5° Remarque. — Il nous reste à décrire les *baromètres enregistreurs*, spécialement employés en météorologie, pour *enregistrer*, c'est-à-dire pour noter d'une manière continue, les variations incessantes de la pression atmosphérique en un lieu donné : tels sont le *baromètre statique* ou *barographe de Secchi*, le *baromètre Rédier*. Nous décrirons le premier de ces instruments, qui peut leur servir de type, dans le livre consacré à la Météorologie.

CHAPITRE II

STATIQUE DES GAZ

—

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE ET AÉROSTATS.

210. **Extension du principe d'Archimède au cas des gaz.** — Tous les gaz en général, et l'atmosphère en particulier, étant fluides et pesants, exercent, comme les liquides pesants en équilibre,

des pressions normales sur les corps solides qui y sont immergés. Ces pressions ont, dans chaque cas, une résultante unique, qui est déterminée, comme pour les liquides pesants, par le principe d'Archimède. On peut donc généraliser, comme il suit, l'énoncé de ce principe fondamental :

Lorsqu'un corps solide est entièrement plongé dans *un fluide pesant en équilibre*, les pressions qui s'exercent à sa surface ont une résultante unique, égale et directement opposée au poids *du volume fluide déplacé* et appliquée au centre de gravité de ce volume.

On peut démontrer ce principe *à priori* pour les gaz, comme on l'a fait précédemment (158) pour les liquides. On peut aussi le vérifier expérimentalement à l'aide d'un petit instrument appelé *baroscope*.

211. **Expérience du baroscope.** — 1° *Description.* — Cet appareil consiste en une sorte de petite balance dont le fléau supporte, au lieu de plateaux, d'un côté une petite masse de plomb *b*, et de l'autre une sphère de cuivre creuse *a*, dont le volume est environ d'un demi-centimètre cube (fig. 230). On peut régler la distance de la masse *b* de manière que les deux corps se fassent équilibre, soit dans l'air, soit dans le vide.

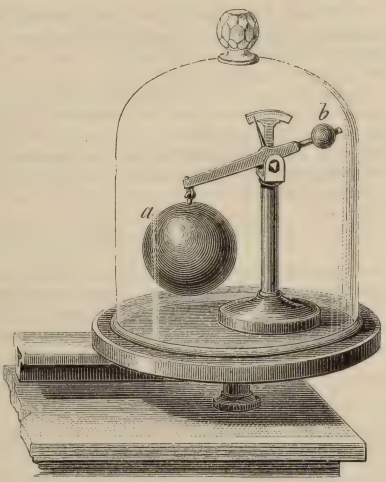


Fig. 230.

2° *Usages.* — Cet instrument avait été inventé par Otto de Guericke pour mesurer, ou tout au moins pour indiquer, les variations de la pression atmosphérique : et c'est de là que lui vient son nom (de βάρος, pesanteur, et σκοπεῖν, examiner). Cet usage a été abandonné depuis l'invention du baromètre, et le baroscope ne sert plus qu'à manifester l'existence de la poussée des gaz et à vérifier le principe d'Archimède, sous la forme suivante :

Tout corps plongé dans une atmosphère gazeuse paraît y perdre une partie de son poids égale au poids du gaz qu'il déplace.

On commence par établir dans l'air l'horizontalité du fléau; puis on place l'appareil sous un récipient où l'on fait le vide à l'aide d'une machine pneumatique : on voit alors le fléau s'incliner du côté de la grosse sphère (fig. 230). Cela prouve évidemment que le poids réel de la sphère est plus fort que celui de la petite masse de plomb, puisque actuellement elles ne supportent ni l'une ni l'autre aucune poussée sensible et qu'elles obéissent librement à la pesanteur. Si donc elles se faisaient équilibre dans l'air, c'est que l'excès de poids de la grosse sphère était compensé par l'excès de poussée qu'elle subissait de la part du gaz : ce qui prouve l'existence de cette poussée.

On pourrait faire l'expérience inverse, c'est-à-dire équilibrer la sphère d'abord dans le vide, à l'aide du contrepoids, puis laisser rentrer l'air sous le récipient : on verrait le fléau s'incliner, cette fois, du côté de la masse de plomb.

3° *Théorie du baroscope.* — En admettant d'avance le principe d'Archimède, on peut prévoir ces deux inclinaisons en sens contraires, et calculer les différences de poussée d'où ils résultent dans les deux cas : ce qui constitue une vérification complète du principe.

Soient P le poids réel de la boule et V son volume; soient p le poids réel du contrepoids et v son volume. Imaginons qu'on établisse l'équilibre du baroscope dans une atmosphère où la pression soit H et le poids spécifique de l'air a; on peut choisir le contrepoids p de manière que les bras de levier du fléau soient égaux lorsque l'équilibre a lieu. Alors l'équation d'équilibre, fondée sur le principe d'Archimède, est

$$[1] \qquad \mathrm{P} - \mathrm{V}a = p - va, \qquad \text{ou bien} \qquad (\mathrm{P} - p) - (\mathrm{V} - v)\,a = 0.$$

Si la pression atmosphérique devient H', soit qu'on laisse l'instrument dans l'atmosphère libre, soit qu'on le mette sous la cloche d'une machine pneumatique, le poids du litre d'air deviendra a' : alors l'équation d'équilibre cessera d'être satisfaite, puisque, le terme positif restant constant, le terme négatif varie en même temps que a. On aura

$$\mathrm{P} - p - (\mathrm{V} - v)\,a' \gtrless 0.$$

Le fléau s'inclinera dans un sens ou dans l'autre, suivant qu'on aura

$$\mathrm{P} - p - (\mathrm{V} - v)\,a' > 0 \qquad \text{et par suite} \qquad a' < a$$

ou bien

$$(\mathrm{P} - p) - (\mathrm{V} - v)\,a' < 0 \qquad \text{et par suite} \qquad a' > a.$$

Par conséquent l'inclinaison du fléau indiquera directement ces variations de densité. Or, les variations de la pression atmosphérique étant, comme nous le verrons bientôt, exactement proportionnelles aux variations de la densité de l'air, on comprend qu'on puisse utiliser l'instrument pour évaluer ces dernières, ainsi que l'avait imaginé Otto de Guericke.

212. **Conséquences du principe d'Archimède : Poids réels et poids apparents. — Correction des pesées faites dans l'air.** — Les corps perdant

dans l'air une partie de leur poids égale au poids du gaz qu'ils déplacent, il y a lieu de distinguer entre leur *poids réel*, c'est-à-dire leur *poids dans le vide*, et leur *poids apparent*, c'est-à-dire leur *poids dans l'air*. La balance ne donne pas le poids réel, mais seulement le poids apparent, à moins toutefois que le volume du corps ne soit précisément le même que celui des poids gradués qui lui font équilibre, car alors il y aurait perte égale des deux côtés.

On peut déduire du poids apparent d'un corps son poids réel. Soient p son poids réel en kilogrammes et d son poids spécifique, $\frac{p}{d}$ sera le volume du corps en litres (d'après la formule connue $P = VD$). Soit a le poids d'un litre d'air dans les conditions de température et de pression où s'est faite la pesée; celui de l'air déplacé par le corps est $a\frac{p}{d}$. Donc son poids apparent est

$$p - a\frac{p}{d} \quad \text{ou} \quad p\left(1 - \frac{a}{d}\right).$$

De même, les poids marqués qui servent dans la pesée ont été échantillonnés dans le vide : ils n'interviennent donc, dans l'équilibre du fléau, que par leur poids apparent. Soient P la somme de ces poids et D la densité de leur substance, on trouve de même que leur poids apparent est $P\left(1 - \frac{a}{D}\right)$. Si la balance est juste, ces deux poids apparents sont égaux, et l'on peut écrire l'équation d'équilibre

$$p\left(1 - \frac{a}{d}\right) = P\left(1 - \frac{a}{D}\right),$$

d'où l'on tirera la valeur de p.

Remarques. — 1° *Correction de température.* — Si la pesée était faite à zéro et sous la pression $0^m,76$, a serait égal au poids du litre d'air normal, qui est $0^k,001293$. Dans le cas général, on doit tenir compte non seulement des variations de température et de pression, mais aussi de la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère, car elle modifie le poids de l'air déplacé : alors la valeur de a s'obtient par une formule que nous verrons plus loin.

2° *Cas des corps très lourds.* — Cette rigueur dans les pesées n'est pas indispensable quand on pèse des corps très lourds, comme les métaux; mais elle le devient quand on pèse des gaz ou des vapeurs.

213. **Conséquences du principe d'Archimède : Équilibre des corps immergés dans l'atmosphère.** — On peut appliquer aux corps plongés dans l'air ou dans un autre gaz tout ce qui a été dit des corps plongés dans les liquides (161). Soient V le volume d'un corps, D son poids spécifique à la température de l'atmosphère ambiante et a le poids spécifique actuel de l'air atmosphérique : le corps est soumis à deux forces verticales et opposées, son poids VD et la poussée de l'air Va, dont la résultante est une force verticale, d'intensité égale à $V(D - a)$ et dirigée dans le sens de la plus grande. Il y a trois cas à considérer.

1° D *est plus grand que a*, c'est-à-dire que *le corps est plus dense que l'air*, ce qui est le cas le plus général : il tombe à terre, entraîné, non par son poids réel VD, mais par son poids apparent $V(D - a)$.

2° $D = a$, c'est-à-dire que *le corps a la même densité que l'air :* son poids et la poussée de bas en haut se font équilibre, et le corps flotte dans l'atmosphère.

3° $D < a$, c'est-à-dire que *le corps est moins dense que l'air :* c'est la poussée qui l'emporte et le corps s'élève jusqu'à ce qu'il rencontre des couches d'air de même densité que lui. La force d'ascension est égale alors à $V(D - a)$: c'est l'excès de la poussée sur le poids du corps.

Ces deux derniers cas s'appliquent aux corps flottant dans l'atmosphère, parmi lesquels on peut citer la fumée, les vapeurs, les nuages et surtout les aérostats.

214. **Aérostats : montgolfières et ballons.** — Les *aérostats*[1] sont des globes d'étoffe légère et imperméable, qui, remplis d'air chaud, d'hydrogène ou de tout autre gaz plus léger que l'air, s'élèvent dans l'atmosphère ou s'y tiennent en équilibre, conformément aux conditions d'équilibre des corps flottant dans les gaz.

Les premiers aérostats furent gonflés à l'air chaud : on les appelle plus particulièrement *montgolfières* (du nom de leurs inventeurs, les frères *Montgolfier*). On ne les remplit guère aujourd'hui qu'à l'hydrogène ou au gaz d'éclairage ; et on les appelle ordinairement *ballons*[2].

Les hommes qui montent dans l'aérostat, et exécutent la manœuvre de cette sorte de navigation aérienne, se nomment des *aéronautes* (de ἀὴρ, air, et ναύτης, navigateur).

215. **Principaux organes d'un aérostat : description.** — Les principaux perfectionnements de l'invention des Montgolfier furent apportés, dès le début, par le physicien Charles, qui répéta leur expérience immédiatement.

1° *Forme des aérostats.* — La première forme qui ait été donnée aux aérostats est celle d'un globe à peu près sphérique, terminé à sa partie inférieure par un appendice cylindrique ou conique. Dans la montgolfière (fig. 238), cet appendice est percé d'une large ouverture par où s'introduit l'air chauffé ; dans le ballon (fig. 231 et 235), l'appendice se termine par une pointe munie d'un étroit orifice, par où le gaz hydrogène peut s'échapper en cas de dilata-

1. Ce mot vient de ἀὴρ, air, et στατὸς, arrêté (de στάω, je suis debout, en latin *stare*).

2. On peut faire rentrer dans la catégorie des aérostats les machines volantes qu'on appelle *aéronefs*. Mais ce sont des aérostats *plus lourds que l'air*, des sortes d'*oiseaux artificiels*, qui empruntent au mécanisme physiologique du vol les moyens de se soutenir et de progresser dans l'air. La construction de ces appareils *plus lourds que l'air*, qui constitue le problème de l'*aviation*, est encore peu avancée.

tion exagérée, de manière à éviter une rupture par excès de pression. De plus, tous les ballons sont percés, à leur partie supérieure, d'une autre ouverture, mais celle-ci fermée à l'aide d'une soupape à ressort. L'aéronaute peut ouvrir à volonté cette soupape, à l'aide d'une corde qui y est attachée et qui descend dans la nacelle jusqu'à sa portée (fig. 231). Cette forme sphérique est encore la plus ordinairement employée : c'est celle que tendrait naturellement à prendre l'enveloppe sous la pression du gaz qu'elle renferme, si elle était partout également extensible; mais ce n'est pas la plus avantageuse au point de vue de la résistance que l'air oppose à la progression du ballon. Aussi les aéronautes qui ont essayé, dans ces derniers temps, de construire des ballons dirigeables, leur ont-ils donné une forme ellipsoïdale, plus ou moins allongée dans le sens du mouvement de progression (fig. 241). On réduit ainsi au minimum la résistance de l'air; mais on diminue également la solidité de l'enveloppe. On est alors obligé d'employer pour ces ballons allongés des étoffes plus solides, plus résistantes et partant plus lourdes que pour des ballons sphériques de même capacité : de sorte qu'on perd en partie, du côté de la force d'ascension, ce qu'on gagne du côté de la facilité de progression.

2° *Structure de l'enveloppe.* — L'enveloppe des aérostats doit être faite avec une étoffe à la fois solide et imperméable aux gaz, surtout pour les ballons à hydrogène. Montgolfier avait pris simplement de la toile doublée de papier, qu'il avait cousue sur un réseau de ficelles. Cette enveloppe, qui suffisait à peu près pour conserver de l'air chaud, eût été absolument incapable de garder un gaz plus léger. Aussi dès sa seconde expérience il employa de la toile d'emballage doublée à l'extérieur et à l'intérieur d'un papier très fort. Le physicien Charles construisait ses ballons avec du taffetas de soie, recouvert d'un enduit de caoutchouc. Les derniers progrès en ce genre ont été réalisés par l'ingénieur Giffard. Il obtint une imperméabilité presque parfaite en fabriquant l'enveloppe avec deux tissus de toile, séparés par une feuille de caoutchouc, et recouverts d'une feuille de mousseline, vernie elle-même à la gomme laque et peinte de plusieurs couches à l'huile.

3° *Filet* et *nacelle.* — Tous les aérostats destinés à enlever des aéronautes sont munis d'une nacelle et d'un filet. Celui-ci protège le ballon, dont il recouvre tout l'hémisphère supérieur; un peu au-dessous du grand cercle équateur, toutes les cordes du filet se détachent, en s'écartant de la surface du ballon, et viennent aboutir et s'attacher à la circonférence d'un cercle en bois très dur, auquel est suspendue la nacelle (fig. 231). Le filet enveloppe le

ballon sans y être fixé ; il le protège sans le comprimer, il se prête à tous ses mouvements de contraction ou de dilatation, enfin il

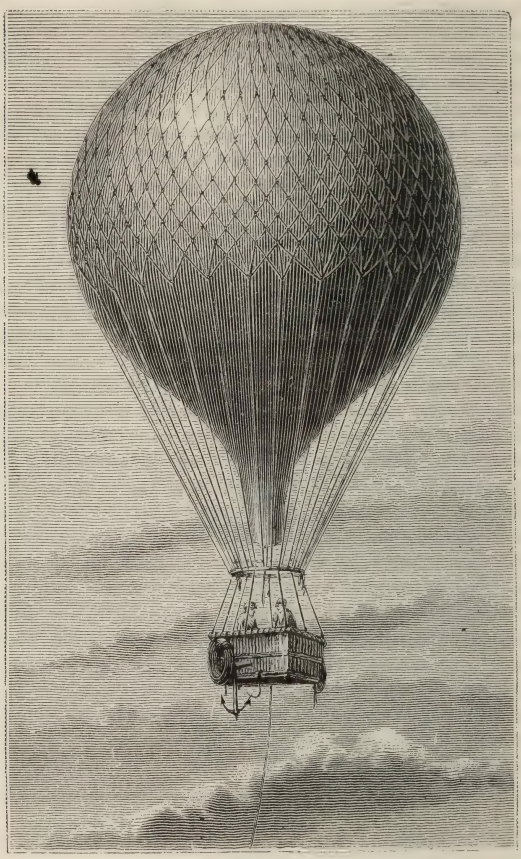


Fig. 231

répartit également sur toute sa surface la charge de la nacelle. Celle-ci se compose d'une sorte de panier en osier, plus ou moins vaste, suivant l'usage auquel on la destine, suivant le nombre des

aéronautes qu'elle doit contenir ou la quantité des accessoires, des agrès et des instruments qui doivent servir dans l'ascension (fig. 232).

4° *Accessoires usuels.* — Parmi ces accessoires ou instruments, il y en a deux qui sont pour ainsi dire indispensables : le *lest* et un *baromètre*.

Le *lest* se compose d'un certain nombre de sacs de toile pleins de sable. Ils ne servent pas en réalité à *lester* le ballon, c'est-à-dire à augmenter sa stabilité, comme fait le lest des navires;

Fig. 232.

mais on peut, en les vidant à propos, diminuer à volonté le poids du ballon, et augmenter en proportion sa force d'ascension. Le lest permet donc de régler l'ascension, de modérer la vitesse de chute ou de l'annuler à propos. Quant au *baromètre*, il est le compagnon obligé de toutes les ascensions : c'est la marche de la colonne barométrique qui peut seule indiquer à l'aéronaute, à partir d'une certaine altitude, si l'aérostat monte ou descend.

Enfin, on emporte généralement un rouleau de corde à nœuds, d'une cinquantaine de mètres (*guide-rope*), avec une ou deux ancres (fig. 232), qui peuvent servir à régler la descente du ballon et à l'arrêter dans sa course.

216. **Construction et remplissage des aérostats.** — Le tissu qui doit former l'enveloppe est découpé d'abord en longs fuseaux, qui constituent comme les méridiens d'une sphère. On les coud ensemble, avec beaucoup de soin, de manière à ne laisser entre eux ni interstices, ni fissures, ni même les trous des piqûres d'aiguilles, par où le gaz intérieur pourrait s'échapper. Il reste alors à gonfler l'aérostat.

1° *Montgolfières.* — Dans ce cas l'opération est très simple. Il suffit de placer un réchaud au-dessous de l'ouverture de l'enveloppe et d'y brûler des matières combustibles. L'air échauffé s'élève au-dessus du foyer, s'engouffre dans l'ouverture de l'enveloppe, en distend les parois et finit par remplir l'aérostat en lui donnant la forme sphérique.

Mais ce procédé de gonflement, si simple et si commode, a le grave inconvénient de n'être pas définitif. L'aérostat ne peut rester gonflé qu'autant que l'air intérieur y reste chaud, et l'on ne peut conserver à celui-ci sa température initiale qu'en l'entretenant à l'aide d'un foyer permanent, que doit emporter la montgolfière, en même temps que la nacelle : ce qui constitue un danger continuel d'incendie. Cependant l'usage des montgolfières est si commode et si économique, par rapport à celui des ballons, qu'on a cherché à le conserver en perfectionnant le mode de gonflement. On a substitué d'abord une éponge imbibée d'alcool au combustible encombrant de la paille et de la laine ; de plus, l'aéronaute Godard a adapté au foyer une cheminée fermée par un tube métallique, qui, dans une certaine mesure, paré au danger d'incendie.

2° *Ballons à hydrogène.* — On prépare le gaz par la méthode ordinaire, c'est-à-dire par la réaction de l'acide sulfurique dilué sur le zinc ou le fer. Il est important que l'hydrogène soit purifié de vapeurs acides, qui pourraient attaquer les tissus ou les enduits de l'enveloppe et en altérer la solidité ou l'imperméabilité.

La figure 233 représente l'ancien dispositif longtemps employé pour cette opération. On y voit, sur la droite, une série de tonneaux qui contenaient les copeaux de fer, l'eau et l'acide sulfurique nécessaires pour la préparation de l'hydrogène. De chaque tonneau le gaz se rend dans une espèce de gazomètre formé par un plus grand tonneau central, défoncé à la partie inférieure et plongeant dans une cuve remplie d'eau ; le gaz se lave dans cette eau, puis il se rend dans l'aérostat par un long tube abducteur en toile. A mesure que le ballon se remplit, des hommes le retiennent au moyen de cordes fixées au filet. Quand il est suffisamment plein, il ne reste plus qu'à enlever le tube. L'aéronaute se place

enfin dans la nacelle ; au cri de *lâchez tout!* on lâche les cordes, et le ballon s'élève avec une vitesse d'autant plus grande, qu'il est plus léger par rapport à l'air déplacé.

La figure 234 représente les perfectionnements qui ont été apportés à l'ancien dispositif. Les tonneaux à acide sulfurique sont proprement alignés sur des supports et sous un appentis ; le gaz qui s'en dégage vient s'accumuler et se laver dans un véritable

Fig. 233.

gazomètre, analogue à ceux des usines à gaz. C'est de là que l'hydrogène purifié est amené par un tube abducteur dans l'appendice inférieur de l'enveloppe. Celle-ci est solidement amarrée au sol dans l'intérieur d'une enceinte destinée à la préserver de tout accident. L'expérience a démontré en effet que l'amarrage le plus solide n'était pas suffisant pour garantir des déchirures et autres avaries causées par le vent un ballon de grandes dimensions. Il faut nécessairement un hangar ou quelque autre

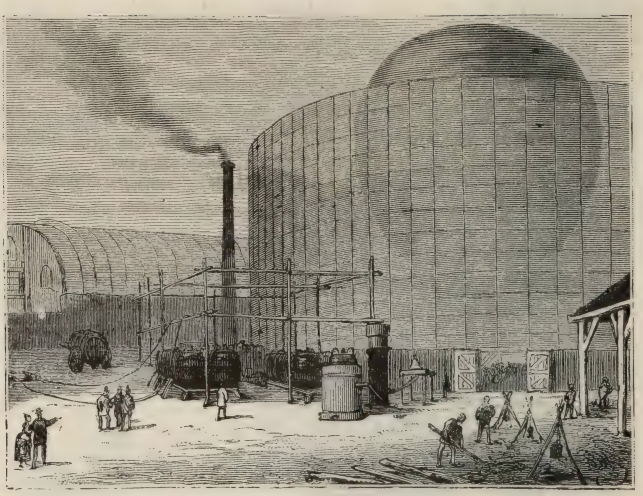


Fig. 234.

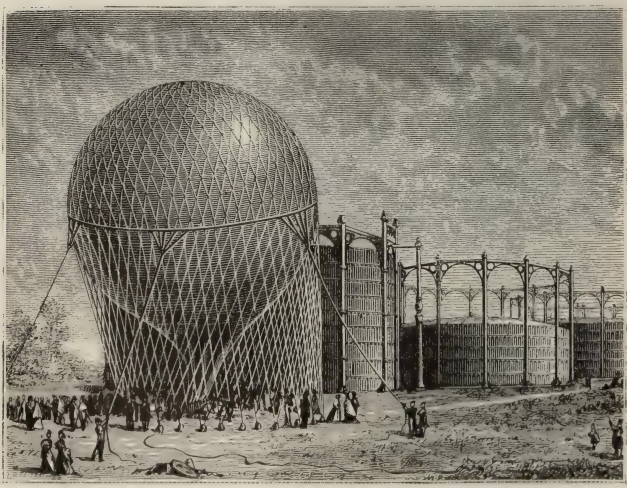


Fig. 235.

abri pour remiser l'appareil, soit au repos, soit pendant le gonflement.

3° *Ballons au gaz de l'éclairage.* — L'hydrogène est le plus avantageux des gaz au point de vue aérostatique, parce qu'il est le plus léger des gaz; mais les difficultés de sa préparation et son prix de revient élevé lui font préférer ordinairement le gaz de l'éclairage, dont la densité est beaucoup plus grande (environ 0,63), mais qu'on peut obtenir aisément, et à peu de frais, partout où il y a des usines à gaz. La figure 235 montre le dispositif d'un gonflement de ballon au gaz de l'éclairage dans l'enceinte même d'une usine à gaz. On peut y remarquer le mode d'arrimage du ballon, ainsi que la disposition du filet autour de l'enveloppe.

Remarque. — Dans aucun cas l'on ne gonfle complètement l'aérostat. On cesse soit d'en chauffer l'air, soit d'y introduire du gaz avant que l'enveloppe ait acquis son maximum de tension. Cette précaution offre deux avantages : le premier, de laisser le gaz intérieur se dilater librement et sans danger de rupture pour l'enveloppe à mesure que la pression extérieure diminue par suite de l'ascension dans les couches supérieures de l'atmosphère; le second, de conserver à l'aérostat une force d'ascension, ou, comme on dit, une *force ascensionnelle* à peu près constante : c'est ce que nous allons démontrer ci-dessous.

217. **Théorie des aérostats. — Force ascensionnelle.** — La théorie des aérostats est une conséquence directe des conditions d'équilibre d'un corps immergé dans un fluide pesant. En effet, tout aérostat plongé dans l'atmosphère y est soumis à deux forces :

1° Son poids P, force verticale et dirigée de haut en bas, résultante de plusieurs poids partiels, qui sont le poids du gaz enfermé dans l'enveloppe, le poids de cette enveloppe elle-même et celui des accessoires (nacelle, aéronautes, agrès, instruments, etc.).

2° La poussée P′, force verticale et dirigée de bas en haut, qui, d'après le principe d'Archimède, est égale au poids du volume d'air déplacé par l'aérostat *tout entier*.

Si la poussée P′ est plus forte que le poids P, l'aérostat montera dans l'atmosphère, sous l'influence d'une force F, verticale et dirigée de bas en haut, égale à la résultante des deux forces P′ et P, c'est-à-dire à leur différence. Cette force accélératrice F s'appelle la *force ascensionnelle* de l'aérostat. On a, par définition,

$$F = P' - P.$$

Il suffit que la force F soit de 4 à 5 kilogrammes au départ pour que l'aérostat s'enlève.

Remarque. — La force ascensionnelle reste *sensiblement constante* tout le temps que le ballon n'est pas complètement gonflé par la dilatation du gaz intérieur, à la condition toutefois de négliger le poids de l'enveloppe et des agrès (qui sont d'ailleurs négligeables par rapport au poids total). En effet, si la pression atmosphérique est devenue, par exemple, deux fois plus petite à une certaine altitude, le gaz de l'aérostat (d'après la loi de Mariotte, que nous étudierons plus loin) a doublé de volume. Il en résulte que le volume d'air déplacé est lui-même devenu deux fois plus grand; en même temps, les densités des deux gaz sont devenues deux fois moindres : donc ni le poids intérieur P ni la poussée P′ n'ont changé, ni par suite la force ascensionnelle F qui est égale à P′ — P. Mais une fois que le ballon est complètement gonflé, s'il continue à s'élever, la force ascensionnelle décroît nécessairement; car, le volume d'air déplacé restant le même, sa densité diminue, et il vient un moment où la poussée est égale au poids du ballon. On est alors dans le cas d'équilibre, ou P = P′; la force F est nulle, et l'aérostat ne peut monter; il ne peut que suivre une direction horizontale, emporté par les courants aériens qui règnent dans l'atmosphère.

Calcul de la force ascensionnelle. — Quant on connaît la capacité de l'aérostat, la densité de l'air atmosphérique et celle du gaz intérieur, le poids spécifique moyen de l'enveloppe et le poids des accessoires, il est facile de calculer la force ascensionnelle de l'appareil. Il suffit d'appliquer la formule de définition, et de calculer séparément P et P′.

Soient V la capacité du ballon (supposé complètement gonflé), exprimée en mètres cubes; a le poids du mètre cube à 0° et sous la pression normale, et a' le poids du mètre cube du gaz, dans les mêmes conditions; S la surface de l'enveloppe extérieure (non compris celle de la nacelle et des agrès), δ le poids moyen de l'unité de surface de l'enveloppe, et Π le poids total de l'ensemble des accessoires. On aura évidemment

$$P' = Va' \quad \text{(en négligeant la poussée de l'air déplacé par les accessoires)}$$

et

$$P = Va + \Pi,$$

d'où

$$F = V(a' - a) - \Pi.$$

Force ascensionnelle des gaz. — Le terme positif de cette formule est de beaucoup le plus important. Le facteur $(a' - a)$, qui est égal à la différence des poids de l'air et du gaz dans les conditions normales, s'appelle quelquefois *force ascensionnelle spécifique* du gaz. Ce coefficient, en effet, est caractéristique de ce gaz, au point de vue aérostatique.

Ainsi, pour l'*air chaud* des montgolfières, on a les valeurs suivantes du poids, par mètre cube :

1293 grammes à	. . . . .	0°
1247 —	. . . . .	10°
935 —	. . . . .	50°
278 —	. . . . .	100°

Par conséquent, la *force ascensionnelle spécifique* de l'air chaud est

46 grammes à	. . . . .	10°
538 —	. . . . .	50°
1015 —	. . . . .	100°

Pour l'*hydrogène*, le coefficient $(a' - a)$ est notablement plus élevé : il est de 1205 grammes à 0°.

Pour le *gaz de l'éclairage*, la valeur moyenne est de 695 grammes.

Ce coefficient varie nécessairement avec la température et la pression : il diminue quand la pression diminue et quand la température s'élève. Ainsi, à la température assez ordinaire de 10°, il n'est plus que de 1160 grammes pour l'hydrogène et de 670 grammes pour le gaz de l'éclairage.

Exemple numérique. — On peut citer le ballon captif, construit par Giffard en 1878, et qui fit plusieurs ascensions par jour, dans la cour des Tuileries, pendant toute la durée de l'Exposition universelle.

L'enveloppe sphérique avait 36 mètres de diamètre; par suite, lorsqu'elle était entièrement gonflée d'hydrogène, sa capacité était de 25 000 mètres cubes. Le terme positif $V(a' - a)$ de la force ascensionnelle s'élevait donc au moins à 25 000 kilogrammes, car la force ascensionnelle spécifique de l'hydrogène, à la température des expériences, était toujours supérieure à 1 kilogramme. Ce terme $V(a' - a)$ donne la mesure du poids que l'aérostat est capable d'enlever. Ce poids total, que nous avons représenté par Π dans la formule, s'élevait à 18 850 kilogrammes. Il se décomposait de la manière suivante :

Enveloppe et soupapes.	5000	kilogrammes
Filet et cordages.	4500	—
Nacelle avec son arrimage.	1600	—
Câble accessoire.	750	—
Câble de 600 mètres retenant le ballon. . . .	3000	—
Poids moyen de 50 voyageurs.	4000	—
	18 850	poids total

En portant ces différentes valeurs dans la formule de F, il vient

$$F = 25\,000 - 18850 = 6150 \text{ kilogrammes.}$$

Il restait donc un excédent de force qui dépassait 6000 kilogrammes [1]. Ajoutons, à titre de curiosité, que le câble de 600 mètres, à l'aide duquel le ballon colossal était retenu captif, était enroulé sur un treuil pendant la descente, et qu'il ne fallait pas moins de deux machines à vapeur de 300 chevaux pour exécuter ce travail.

218. **Manœuvres aéronautiques.** — Nous avons dit précédemment (216) que lorsque l'aéronaute juge le ballon suffisamment gonflé, il s'installe dans la nacelle; puis sur son ordre, devenu proverbial, de *lâchez tout!* l'aérostat est démarré et s'enlève aussitôt avec une vitesse qui s'accélère aussi longtemps que la force ascensionnelle reste constante. Dès que celle-ci diminue et que la vitesse se ralentit par suite de la raréfaction croissante des couches d'air traversées, l'aéronaute peut augmenter dans une certaine mesure la force ascensionnelle, de manière à faire monter l'aérostat plus vite ou plus haut. Il peut également diminuer la force ascensionnelle, de manière à ralentir la marche ascendante ou à provoquer la descente. Mais là se borne son intervention : il

1. Guillemin, *Monde physique*, t. Ier.

ne peut en aucune façon, comme nous l'expliquerons plus loin, pousser l'aérostat, comme un navire, en avant ou en arrière, dans le sens horizontal, ni le soustraire à l'action des vents qui le repoussent ou qui l'entraînent dans leur propre direction. Tout au plus peut-il manœuvrer de manière à se déplacer verticalement, jusqu'à ce qu'il rencontre, s'il en existe, une couche d'air animée d'une vitesse voisine du chemin qu'il voudrait parcourir. Toutes les manœuvres aéronautiques se réduisent donc à deux, ayant pour objet de faire monter ou de faire descendre verticalement l'aérostat.

Si c'est une montgolfière, on n'a qu'à activer le feu ou bien à le ralentir Dans le premier cas, la température de l'air chaud s'élève, sa densité diminue et la force ascensionnelle augmente : on remonte; dans le second cas, la température s'abaisse, le poids de l'air intérieur augmente : on redescend.

Si c'est un ballon, on ne peut accroître la force ascensionnelle qu'en diminuant le poids des accessoires. On jette alors une partie du lest : les sacs de sable sont vidés lentement, petit à petit, de manière que l'impulsion donnée au ballon ne soit pas trop brusque et que la chute du lest ne produise pas d'accident sur le sol. On comprend d'ailleurs que, la provision de lest ayant été nécessairement limitée au départ, ce moyen d'action soit très vite épuisé. Pour descendre, l'aéronaute laisse échapper une partie de l'hydrogène, en ouvrant la soupape supérieure. La force ascensionnelle diminue nécessairement, et l'aérostat redescend jusqu'à ce que l'accroissement de densité de l'air ait compensé la diminution de volume du ballon. Si la descente doit être définitive, l'aéronaute se garde bien de l'opérer d'un seul coup, car la vitesse croissante de cette chute communiquerait à l'aérostat une force vive considérable qui le briserait infailliblement sur le sol. Il descend, comme on dit, *par cascades*, c'est-à-dire que, après une descente de 500 mètres par exemple, il s'arrête ou même il remonte d'une centaine de mètres, de manière à épuiser sa force vive, puis il redescend d'une notable hauteur pour remonter encore d'une faible hauteur, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il arrive à terre. C'est alors qu'il déroule la corde à nœuds ou *guide-rope* et qu'il laisse traîner les ancres pour s'accrocher aux aspérités du sol.

Remarque. — Au départ, l'aéronaute peut apprécier son mouvement d'ascension par la vue des objets terrestres; mais cette ressource lui manque complètement à partir d'une altitude relativement faible. Il ne peut alors savoir s'il monte ou s'il redescend que par l'observation du baromètre : la colonne baisse quand l'aérostat s'élève, et elle monte quand il redescend.

219. **Parachute.** — Nous n'avons pas parlé jusqu'ici d'un accessoire des aérostats qui a joui d'une grande vogue à l'époque de son apparition, mais qui est totalement abandonné aujourd'hui : c'est le *parachute*. Cet appareil, comme son nom l'indique, était destiné à parer aux éventualités d'une chute provoquée soit par déchirure du ballon, soit par tout autre accident. Il se compose d'une large toile circulaire, formée de fuseaux cousus ensemble comme l'enveloppe d'un ballon, et qui peut se ployer ou se déployer comme un vaste parapluie (fig. 236 et 237). Au centre de la toile, on a ménagé une petite ouverture circulaire, dont nous verrons l'utilité tout à l'heure, et sur le pourtour est fixé un système de cordes, qui vont se rattacher à la nacelle de l'aérostat de manière à l'envelopper et à le soutenir, en cas de besoin, comme les cordes mêmes du ballon.

Pendant l'ascension, le parachute, plié comme un parapluie, est fixé par un point de son enveloppe à celle du ballon (fig. 236). Quand l'aéronaute veut s'en servir, il rompt d'une part les attaches du ballon avec la nacelle, et celle du ballon avec le parachute. Celui-ci, emporté par la nacelle, tombe d'abord d'un mouvement accéléré ; mais la résistance de l'air force le parapluie à s'ouvrir de plus en plus (fig. 237) et ralentit la chute du système dans une proportion considérable. On peut se faire une idée de ce ralentissement par la vitesse d'une descente en parachute que l'aéronaute Sivel exécuta à Naples, il y a quelques

années : il mit 43 *minutes pour tomber d'une hauteur de* 1800 *mètres ;* or il n'aurait mis en chute libre (abstraction faite de la résistance de l'air) qu'environ 19 *secondes :* il serait donc tombé 135 *fois et demie* plus vite.

La première idée du parachute remonte à une haute antiquité. L'invention paraît due au physicien Lenormant, de Montpellier ; mais le premier essai fut

Fig. 236.

tenté à Paris, en 1802, par l'aéronaute Garnerin. Voici comment cette curieuse expérience est racontée par l'astronome Lalande :

« Garnerin s'éleva, à ballon perdu, dans la plaine Monceau, jusqu'à une hauteur de 350 toises (environ 700 mètres). Là, il coupa la corde qui joignait le parachute et son char avec l'aérostat [1] ; ce dernier fit explosion, et le parachute,

1. Les parachutes primitifs étaient munis eux-mêmes d'une petite nacelle qui

dans lequel le citoyen Garnerin était place, descendit très rapidement. Il fit un mouvement d'oscillation si effrayant, qu'un cri d'épouvante échappa aux spectateurs, et les femmes sensibles se trouvèrent mal. Cependant le citoyen Garnerin descendit tranquillement ; il monta à cheval aussitôt, revint au parc recevoir les félicitations de la foule et continua son chemin jusqu'à l'Institut national, qui était en séance, et où il annonça son succès. » Ces mouvements d'oscillation, si effrayants et si dangereux, qui accompagnent la chute de l'appa-

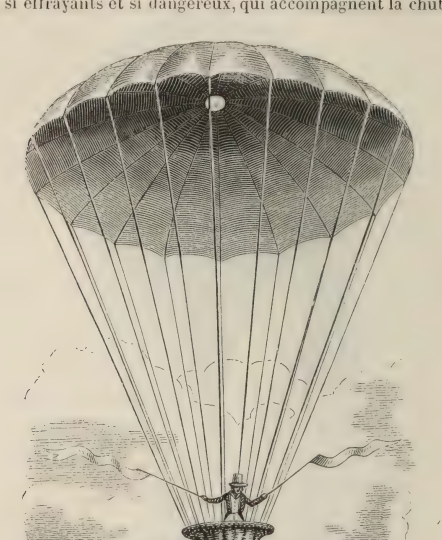


Fig. 237.

reil, furent évités ultérieurement grâce à une ouverture circulaire pratiquée au sommet du dôme (fig. 237) : cela permet à l'air comprimé de s'échapper régulièrement par le haut, au lieu de s'échapper latéralement avec des secousses plus ou moins brusques. Malgré ce perfectionnement, le parachute n'est pas entré dans la pratique des aéronautes, qui s'accordent à le considérer comme un accessoire embarrassant et une charge inutile dans la grande majorité des cas.

220. **Historique de l'invention des aérostats**. — L'invention des aérostats

entrait dans la grande nacelle du ballon. L'appareil était attaché au filet au moyen d'une corde, qui passait sur une poulie pour venir se fixer à la petite nacelle. Il suffisait de lâcher la corde pour que le système du parachute et de sa nacelle abandonnât l'aérostat (fig. 237).

est due aux frères Joseph et Étienne Montgolfier, fils de Pierre Montgolfier, riche fabricant de papier à Annonay. C'est Joseph, l'aîné, qui en eut la première idée ; il s'associa son frère Étienne pour la réaliser. Leur première expérience publique eut lieu le 5 juin 1783, devant « Messieurs des États du Vivarais ». Joseph Montgolfier a écrit lui-même une description de l'aérostat (ou *machine aérostatique*) qui fut lancé ce jour-là.

« La machine aérostatique était construite en toile doublée de papier, cousue sur un réseau de ficelles fixé aux cordes, à peu près de forme sphérique, et sa circonférence était de 110 pieds ; un châssis en bois la tenait par le bas. Ce châssis laissait libre au bas du ballon une ouverture pour l'introduction *du gaz intérieur, qui pesait moitié moins que l'air extérieur ;* la machine pouvait s'élever et entraîner un poids de 490 livres. »

Elle s'éleva environ à 1000 toises (à peu près 2000 mètres), et resta 10 minutes en l'air ; mais elle se dégonfla peu à peu et redescendit à terre, « si légèrement qu'elle ne brisa ni les épis, ni les échalas de vigne sur lesquels elle reposa. » Ce gaz intérieur, qui pesait moitié moins que l'air extérieur, et dont Montgolfier fait un mystère, c'était tout bonnement de l'air chaud, qu'il avait introduit dans l'enveloppe en allumant, au-dessous de l'orifice inférieur, un feu de paille mêlée de laine mouillée.

Cette expérience, si belle et si neuve, eut un immense retentissement, et dans ce temps où les journaux n'existaient pas, la nouvelle en fut rapidement connue dans tout le pays. Le physicien Charles se mit immédiatement en mesure de la répéter ; mais comme il ignorait la nature du gaz dont les Montgolfier s'étaient servis, il eut l'idée d'employer l'hydrogène, gaz éminemment léger, découvert quelques années auparavant par Priestley, et qu'on appelait alors *air inflammable*. Son ballon était beaucoup plus petit que celui des Montgolfier ; il n'avait que 38 pieds de circonférence, et pourtant le gonflement, commencé le 23 août, était loin d'être terminé le 25. Cependant l'enveloppe était faite d'une étoffe de soie, solide, bien cousue et vernie. On constatait donc, dès la première expérience, l'inconvénient de l'hydrogène au point de vue aérostatique : c'est son extrême *pouvoir endosmotique ;* mais on peut apprécier également la supériorité de sa force ascensionnelle spécifique, car le ballon, incomplètement gonflé, s'enleva aussi aisément que la montgolfière, aux applaudissements d'une foule immense qui se pressait dans le Champ de Mars.

« On ne peut imaginer la frénésie d'admiration qui s'empara de la population parisienne à la suite de ces premières expériences. Le roi voulut être témoin d'un départ. On prépara pour lui dans la cour de Versailles une grande montgolfière de 57 pieds (19 mètres) de hauteur ; elle était marquée à son chiffre, et ornée d'attributs et emblèmes mythologiques (dans le genre de celle qui est représentée fig. 238) [1]. » Ce fut la première qui enleva des êtres animés : c'étaient un mouton, un coq, un canard, qu'on avait mis dans la nacelle, et que l'aérostat alla déposer, sains et saufs, dans la forêt de Vaucresson, huit minutes après son départ de Versailles.

L'idée de faire servir les aérostats à transporter des voyageurs ne vint que quelques mois plus tard. C'est en novembre 1783 que Pilâtre de Rozier et le marquis d'Arlandes firent le premier voyage aérien, après y avoir préparé eux-mêmes et le public par des expériences antérieures en ballon captif. Ils partirent des jardins de la Muette (Bois de Boulogne, près Paris) dans une montgolfière (fig. 238) qui les enleva jusqu'à 3000 pieds (1 kilomètre) et alla retomber, sans accident, à 2 lieues environ du point de départ, après avoir traversé tout Paris.

Cette expérience mit nettement en évidence l'inconvénient pratique des montgolfières. Si l'air s'échauffait rapidement, il se refroidissait encore plus vite, et

1. J. Jamin, LES BALLONS, *Revue des Deux Mondes* 1er janvier 1885.

l'on ne pouvait maintenir en l'air l'aérostat qu'à la condition de forcer le feu et d'épuiser en peu de temps toute la provision de combustible. Aussi le physicien Charles, qui voulut immédiatement répéter l'ascension de Pilâtre de Rozier, employa-t-il encore une fois un ballon à l'hydrogène, mais mieux construit et surtout mieux vernissé que le premier. Il s'enleva du Jardin des Tuileries, avec un aide nommé Robert. Ce fut une remarquable ascension. En deux heures, le ballon avait atteint la petite ville de Nesles, à 9 lieues de Paris. Là Charles fit les manœuvres de descente, déposa à terre son compagnon de voyage, puis remonta

Fig. 238.

en l'air. Il eut la chance de rencontrer un courant exactement contraire à celui qui l'avait amené, et il fut ramené à Paris au point de départ.

A partir de ce moment la supériorité du ballon sur la montgolfière ne fut plus contestée, et l'usage de l'air chaud fut de plus en plus abandonné. D'ailleurs Charles avait considérablement perfectionné la construction des ballons. « Il avait inventé la soupape, le lest, le filet et la nacelle ; il avait rendu l'enveloppe imperméable et accéléré le gonflement ; enfin il avait amené déjà l'art de l'aérostation à un degré de perfection qui n'a guère été dépassé. »

221. **Ascensions célèbres**. — Depuis cette époque, un nombre considérable de voyages aériens ou d'ascensions en ballons libres ont été exécutés. Quelques-unes sont restées célèbres, soit par l'importance des découvertes scientifiques

qu'elles ont amenées, soit par les catastrophes terribles qui les ont terminées.

Catastrophe de Pilâtre de Rozier et Romain. — La plus fameuse à ce dernier point de vue est celle où le premier aéronaute, Pilâtre de Rozier, trouva la mort, à l'âge de vingt-six ans. Il voulut répéter une expérience heureuse de deux autres aéronautes, Blanchard et Jeffries, qui avaient traversé la Manche, entre Douvres et Calais, au mois de janvier 1785. Il partit de Boulogne, le 15 juin 1785, en montgolfière. Il avait emporté avec lui, à titre d'essai, pour avoir une force ascensionnelle variable, des ballonnets pleins d'air inflammable. C'était une grave imprudence, à cause de la proximité du foyer de la montgolfière. Pilâtre n'ignorait pas le danger de sa tentative, car il ne prit avec lui qu'un aide nommé Romain, et refusa obstinément le concours d'un gentilhomme, le marquis de Maisonfort, qui lui offrait de l'argent pour monter avec lui. Il s'enlevèrent le soir, à deux heures. Une brise de terre les emporta à quelques kilomètres en mer, puis on vit une flamme bleuâtre surgir au sommet de l'aérostat, qui fut ensuite ramené à la côte par un vent contraire et vint tomber à trois cents pas du rivage.

Pilâtre était fracassé, et Romain respirait encore. Ce fut le marquis de Maisonfort qui leur rendit les derniers devoirs et qui raconta l'accident.

Ascension de Gay-Lussac, en 1804. — Celle-ci fut très heureuse, et de plus très fertile en résultats scientifiques. Le célèbre physicien atteignit l'altitude de 7016 mètres au-dessus du niveau de la mer. A cette hauteur, le baromètre était descendu à 32 centimètres, et le thermomètre centigrade, qui marquait + 31° à la surface du sol, était à 9°,6 au-dessous de zéro. Gay-Lussac n'eut pas seulement très froid, il eut aussi fort soif, à cause de la sécheresse de l'air; celle-ci était si extraordinaire, que les substances hygroscopiques, telles que le papier, le parchemin, se desséchaient et se tordaient comme si on les eût présentées au feu. Il éprouva aussi le malaise connu sous le nom de *mal des montagnes :* ce sont des troubles dans la respiration et dans la circulation, qui résultent de la raréfaction de l'air. Sa respiration s'activa, et son pouls, qui n'avait normalement que 66 pulsations, monta un moment jusqu'à 120. D'ailleurs il recueillit de l'air à cette hauteur, et démontra ensuite par l'analyse chimique que sa composition était la même qu'à la surface du sol. Il remarqua que le ciel prenait une teinte bleue très foncée, tirant sur le noir, et il fut frappé du silence absolu et solennel qui régnait dans ces hautes régions.

Il était parti tout seul des jardins du Conservatoire des Arts et Métiers; il descendit auprès de Rouen au bout de six heures, ayant fait environ 30 lieues.

Ascension de Barral et Bixio. — En 1850, Barral et Bixio entreprirent, sur les instances de Gay-Lussac, deux ascensions ayant pour objet l'exploration scientifique des couches supérieures de l'air. Ils avaient perfectionné le vernissage du ballon, de manière à maintenir la force ascensionnelle constante en supprimant l'exosmose de l'hydrogène. Dans l'une de ces ascensions, ils s'élevèrent jusqu'à l'altitude de 7049 mètres; mais, quoiqu'on fût au mois de juillet, ils eurent un fort mauvais temps, et ils entrèrent, presque au départ, dans une brume épaisse, qui avait près de 7000 mètres de profondeur. Ce fut au sortir de cette région que se produisit la particularité la plus curieuse du voyage : le thermomètre, qui était resté stationnaire à — 9°, baissa rapidement jusqu'à — 39°, et en même temps des aiguilles de glace vinrent s'accumuler sur les carnets d'observation. Cela prouvait l'importance des nuages pour empêcher le rayonnement de l'atmosphère vers les espaces célestes et en modérer le refroidissement.

Ascensions de Glaisher. — L'Association britannique pour l'avancement des sciences, réunie à Leeds en 1858, vota les fonds nécessaires pour une série d'ascensions scientifiques, dont elle confia l'exécution à Glaisher, astronome attaché à l'Observatoire de Greenwich. M. Glaisher s'adjoignit un aéronaute de profession, M. Coxwell, et fit avec lui une trentaine d'ascensions, de 1862 à 1865. Dans

l'une d'elles on constata l'existence, en plein été, de nuages entièrement formés d'aiguilles de glace, sur une épaisseur de 4 kilomètres. Dans une autre, ils ressentirent à un très haut degré le *mal des montagnes*. Glaisher en a décrit tous les symptômes, qu'il observa sur lui-même.

« La respiration devenait de plus en plus pénible et courte, et les pulsations du cœur plus fréquentes; les tissus se gonflaient sous l'action d'une pression intérieure devenue prédominante, la face paraissait plus grosse, les lèvres plus épaisses et noires; puis la paralysie survint, élective et progressive; elle se prit aux bras, aux jambes, aux muscles du cou; la tête tomba; on était dans l'impossibilité d'agir, de soulever même un doigt pour éviter la mort; la vue s'obscurcissait et, quoique les idées fussent saines, nettes et sans souffrances, le corps peu à peu cessait de vivre; enfin l'évanouissement fut complet et dura treize minutes. Les dernières observations furent faites à l'altitude de 8835 mètres et ne furent reprises qu'au réveil. Pendant cette éclipse de l'intelligence, le ballon avait continué de monter jusqu'à son maximum et commencé de descendre. M. Glaisher croit avoir atteint 11000 mètres [1]. »

Expériences de M. Paul Bert. — La conséquence indiscutable de ces observations physiologiques, c'est que l'homme ne peut dépasser l'altitude de 8000 mètres sans perdre ses facultés, en totalité ou en partie. M. Paul Bert analysa, par l'expérience, la cause de ce phénomène. Il fit construire une enceinte en tôle de fer, assez vaste pour qu'on pût y enfermer des hommes, où l'on pût comprimer ou dilater l'atmosphère, ou bien en faire varier la composition. Or, quand on y raréfie l'air, dans les proportions où cela arrive dans les ascensions, on voit naître et se développer chez les personnes enfermées tous les troubles circulatoires observés par Glaisher. Mais si la raréfaction de l'atmosphère ne porte que sur l'élément azote, l'élément oxygène conservant sa valeur initiale, on remarque au contraire que les hommes et les animaux continuent à vivre dans cette atmosphère raréfiée. M. Paul Bert se soumit lui-même à l'expérience jusqu'à un degré de raréfaction très élevé, et sans ressentir aucun malaise. Ce n'est donc pas à la diminution même de la pression atmosphérique qu'on doit attribuer les troubles physiologiques décrits par Glaisher, mais surtout à l'insuffisance d'oxygène, c'est-à-dire d'air respirable, qui en est la conséquence.

Ascensions de Sivel, Crocé-Spinelli et Gaston Tissandier. — La conclusion pratique de ces expériences, c'est qu'il était possible de répéter sans danger les ascensions de Glaisher, dans les plus hautes régions de l'atmosphère, à la condition de se prémunir contre l'insuffisance d'air respirable. C'est ce que firent les aéronautes Sivel et Crocé-Spinelli, en mars 1874. Ils montèrent jusqu'à l'altitude de 7520 mètres, sans aucun accident. Ils avaient emporté avec eux plusieurs ballonnets remplis d'air suroxygéné à divers degrés, et qu'ils commencèrent et continuèrent à respirer dès l'altitude de 3600 mètres. La vérification des résultats de M. Paul Bert fut complète. Les premiers symptômes du mal des montagnes apparaissaient dès qu'on respirait l'air raréfié de l'atmosphère ambiante; au contraire, le retour des forces, de la vision, de la vigueur générale suivait immédiatement l'inhalation de l'air suroxygéné contenu dans les ballonnets.

Cette expérience personnelle, si concluante, aurait dû détourner ces mêmes aéronautes de l'ascension qu'ils firent l'année suivante, en avril 1875, dans des conditions défectueuses et avec des idées préconçues qui amenèrent une terrible catastrophe. Leur ballon s'appelait *le Zénith* [2]; ils s'adjoignirent, pour le

1. C'est une hauteur supérieure à celle du *Gaurisankar* (8889 mètres), montagne du Népaul, le plus haut sommet du globe (J. Jamin, *les Ballons*).

2. Ce nom a été illustré par un petit poème que M. Sully-Prudhomme a dédié « aux victimes de l'ascension du ballon *le Zénith* », et qui est une de ses plus belles inspirations.

diriger, un autre aéronaute très expérimenté, M. Gaston Tissandier. Mais ils n'emportèrent avec eux que 150 litres d'oxygène, provision notoirement insuffisante, puisque, dans les hautes régions, il en eût fallu 150 litres par minute pour suffire à la consommation de trois personnes. De plus, ils partirent avec l'intention bien arrêtée de n'avoir recours à leur provision qu'à la dernière extrémité. C'est ce qui causa leur perte. Quand ils sentirent la nécessité d'employer le remède, il n'était déjà plus temps, leurs bras étaient paralysés, et ils ne purent lutter contre le mal des montagnes, qui les envahit complètement. M. Gaston Tissandier s'évanouit le premier. « Quand il revint à lui, après une heure de sommeil léthargique, il se rappelle avoir vu ses deux amis évanouis au fond de la nacelle ; puis, quelque temps après, Crocé, qui s'était réveillé, jeta par-dessus bord les instruments, les couvertures, tous les objets à sa portée, sans qu'on pût savoir à quelle ivresse il obéissait. Aussitôt le ballon remonta jusqu'à une hauteur inconnue, et quand finalement il redescendit et que M. Tissandier fut revenu de son évanouissement, ses deux compagnons étaient sans vie. Sivel avait la figure noire, les yeux ternes, la bouche ouverte et remplie de sang; Crocé les yeux à demi fermés et la bouche sanglante. M. Tissandier survécut seul à ce lamentable événement, qu'un peu de prudence aurait conjuré. Il évalua à 8600 mètres, grâce à des tubes témoins qu'ils avaient emportés, l'altitude à laquelle leur ballon s'était élevé. »

On paraît avoir renoncé, depuis cette catastrophe, aux ascensions dans les hautes régions. Tous les efforts des aéronautes se sont portés sur le problème de la navigation aérienne ou de la direction des ballons dans les hauteurs moyennes de l'atmosphère.

222. **Navigation aérienne** ou **direction des ballons.** — 1° *Définitions.* — Nous avons dit que l'aéronaute, avec les moyens dont il dispose, ne peut qu'agir sur la force ascensionnelle de l'aérostat, de manière à ralentir ou à accélérer son mouvement dans le sens vertical, mais que les mouvements de progression ou de recul dans le sens horizontal sont soustraits à sa volonté et entièrement soumis aux vents qui règnent dans la région où il se trouve. Or le problème de la *navigation aérienne* ou de la *direction des ballons* consiste précisément dans la possibilité de pousser l'aérostat horizontalement dans tous les sens, quelle que soit la direction du vent, comme on fait d'un bateau sur l'eau. Ce problème est-il donc insoluble?

Nous allons montrer, au contraire, que la solution en est parfaitement possible au point de vue théorique, et qu'il n'y a de difficultés — presque insurmontables d'ailleurs — que dans la réalisation pratique de la solution rationnelle.

2° *Historique.* — Le problème s'est posé dès l'origine même de l'invention des aérostats, et la solution en a paru tout d'abord très simple. Un certain docteur van Hecke avait affirmé qu'il existe toujours dans l'atmosphère, à des altitudes plus ou moins grandes, mais accessibles, des courants d'air soufflant dans toutes les directions, et qu'il suffit de monter assez haut pour trouver la bonne direction, c'est-à-dire celle qu'on veut donner à l'aérostat. En se fondant sur cette assertion, — qu'aucune expérience n'avait justifiée, — Meusnier, officier distingué des armées de la République, proposa la construction d'un aérostat parfaitement dirigeable. Il aurait été constitué par un ballon à double enveloppe, dont on aurait pu faire varier à volonté la force ascensionnelle, de manière à monter ou à descendre jusqu'à la rencontre des vents favorables. Mais la construction de cet appareil n'était pas plus pratique que son emploi n'était légitime : cette première solution n'eut pas de suites.

Après Meusnier, qui était un homme instruit et fort intelligent, il n'y eut guère, pendant longtemps, que des ignorants qui s'occupèrent du problème.

Toutes les solutions proposées étaient fondées sur une assimilation complètement illégitime de la navigation aérienne à la navigation terrestre. On partait de cette idée fausse que, si les vents suffisent à diriger les vaisseaux, ils peuvent rendre le même service aux ballons. Or les conditions ne sont pas du tout les mêmes pour ceux-ci et pour ceux-là. Les navires peuvent être dirigés par le vent, parce qu'ils prennent un point d'appui sur l'eau, en dehors du vent, tandis que les aérostats, n'ayant aucun point d'appui en dehors du vent, ne peuvent que céder au vent, et se laisser emporter sans aucune résistance.

Qu'on observe, en effet, un ballon captif : on le voit, sous l'action du vent, s'incliner et osciller, ainsi que la corde qui le retient, autour du point d'attache; il résiste au vent et peut alors être orienté par le vent, comme la voile d'un navire. Qu'on vienne à lâcher le câble, le ballon captif devient un *ballon libre*, libre d'obéir à l'air qui l'entraîne et d'en suivre tous les mouvements. « Le vent peut être fort ou faible, l'aéronaute ne le sent plus, parce que lui-même et son aérostat en font partie. Il voit la fumée d'un cigare, la flamme d'une bougie monter tranquillement, les cordes du ballon pendre verticalement sans bouger, les plis d'un drapeau rester au repos. *En ballon, il n'y a pas, il ne peut y avoir de vent*[1]. » Il est donc absurde de songer à l'utiliser, au moyen d'un organe quelconque, pour diriger l'aérostat.

3° *Solution rationnelle.* — La solution du problème de la navigation aérienne se trouvera dans une imitation plus rationnelle de la navigation terrestre. Analysons, en effet, le cas simple d'un bateau à vapeur, ou même d'un bateau à rames, se mouvant, voiles carguées, sur une nappe d'eau sans courant. Il n'y a pas de vent, ou son action est négligeable, puisqu'il n'y a pas de voiles. La seule force motrice, c'est la vapeur, actionnant soit une hélice, soit des roues à aubes, ou bien c'est la force musculaire de rameurs, actionnant les rames. Cette force motrice prenant son point d'appui sur la masse liquide, qui est relativement fixe, pousse en avant le bateau, qui est mobile. C'est par le même mécanisme que la force explosive d'une charge de poudre, s'appuyant d'une part sur la pièce, corps relativement fixe, se détend d'autre part comme un ressort et lance en avant le boulet, qui est mobile. L'eau, même tranquille, intervient donc de deux manières dans la navigation : 1° elle soutient le bateau et annule son poids par sa poussée propre; 2° elle fournit à la force motrice le point d'appui qui lui est indispensable pour produire son effet. Telle est la cause et tel est le mécanisme du mouvement d'un bateau sur l'eau. Quant à la direction, elle est obtenue à l'aide du gouvernail.

Pour passer du cas simple d'une nappe d'eau tranquille, — cas théorique, à peine réalisable sur les lacs, — au cas général de la navigation sur l'eau en mouvement des fleuves et de l'Océan, il suffit d'appliquer les règles mécaniques de la composition des vitesses (30). Si le bateau descend le courant, sa vitesse propre v (c'est-à-dire celle qui lui vient de sa force motrice propre) et la vitesse v' du courant seront deux vitesses parallèles et de même sens qui s'ajouteront : le bateau prendra donc, dans le sens même du courant, une vitesse résultante V, égale à $v + v'$.

Si le bateau remonte le courant, il prendra, pour la même raison, une vitesse résultante V, égale à la différence $(v - v')$, et qui sera positive ou négative suivant que v sera $\gtrless v'$. Dans le premier cas le bateau avancera contre le courant, et dans le second cas il sera entraîné par le courant. Dans le cas particulier où l'on aurait $v = v'$, le bateau resterait en place, sans avancer ni reculer.

1. J. Jamin, *les Ballons.*

Enfin, dans le cas où la vitesse propre v est trop faible pour qu'on puisse lutter avantageusement contre le courant, on peut du moins pousser le bateau dans une direction OY_1, inclinée sur le courant (fig. 239). En effet, si l'on manœuvre le gouvernail de manière que la vitesse propre du bateau prenne une direction perpendiculaire au courant, il n'avancera pas pour cela suivant Ov, mais il ne sera pas davantage emporté suivant Ov' : il prendra une direction intermédiaire OV, déterminée par la diagonale du rectangle construit sur Ov' et Ov. La déviation α de cette direction sera évidemment donnée par l'équation $\tang \alpha = \frac{v}{v'}$: on voit que la déviation sera d'autant plus forte pour un même courant que la vitesse propre du bateau sera plus grande.

La solution du problème de la navigation aérienne est contenue dans cette discussion. Il suffit de remarquer qu'un aérostat flottant dans une couche d'air, où son poids est équilibré par la poussée, est dans les mêmes conditions mécaniques qu'un bateau sans voiles flottant sur l'eau à l'abri du vent.

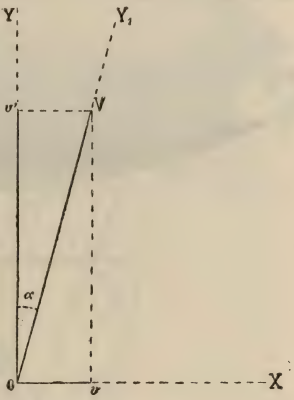


Fig. 239.

Si l'air est en repos, et l'aérostat dénué lui-même de force motrice propre, il demeurera éternellement dans la position d'équilibre qu'il aura une fois prise. Il n'en pourra sortir que s'il est animé d'une vitesse propre, par l'action d'un moteur intérieur quelconque. Si, par exemple, l'on fixe à la nacelle une hélice à axe horizontal et qu'on la fasse mouvoir avec une rapidité suffisante, elle poussera l'aérostat, en prenant son point d'appui sur la masse d'air, exactement comme fait l'hélice d'un bateau en prenant son point d'appui sur l'eau. Quant à la direction de ce navire aérien, elle sera obtenue à l'aide d'un gouvernail, placé à l'arrière, qui fonctionnera dans l'air comme celui des bateaux fonctionne dans l'eau et d'après le même mécanisme.

Dans la navigation aérienne, on retrouvera les trois cas de la navigation ordinaire :

1° $v > v'$: la vitesse propre v de l'aérostat est supérieure à la vitesse v' du courant aérien, c'est-à-dire du vent ;

2° $v = v'$ } : la vitesse propre est égale ou inférieure à celle du vent.
3° $v < v'$ }

Dans le premier cas, un aérostat, *construit et gréé convenablement*, sera parfaitement dirigeable, et la manœuvre se fera dans l'air comme dans l'eau ; dans le second cas, l'aérostat ne pourra que lutter contre le vent, sans bouger de place ; dans le troisième cas, il sera nécessairement entraîné par le vent, mais il pourra encore louvoyer, c'est-à-dire manœuvrer de manière à prendre une direction plus ou moins inclinée sur celle du vent.

En résumé, il résulte des considérations précédentes que la navigation aérienne est toujours possible *théoriquement*. Tout aérostat sera *théoriquement* dirigeable, s'il satisfait aux conditions suivantes :

1° Être muni d'un moteur, à la fois léger et puissant, capable de lui imprimer une vitesse notable sans trop diminuer sa force ascensionnelle ;

2° Être gréé comme un bateau à vapeur, c'est-à-dire être pourvu d'une hélice

et d'un gouvernail, qui soient appropriés au milieu gazeux où le mouvement doit se produire.

Dans la pratique, un tel aérostat ne sera réellement dirigeable qu'au sein d'une atmosphère calme, ou contre un vent de vitesse inférieure à sa vitesse propre or ces conditions pratiques sont très rares et très difficiles à réaliser. C'est ce que prouve l'insuccès relatif des tentatives de navigation aérienne qui ont été faites jusqu'à ce jour d'après la méthode rationnelle que nous venons d'exposer.

4° *Essais de réalisation de la solution rationnelle. — Expériences de Giffard.* — Les premiers essais sérieux de navigation aérienne sont dus à l'ingénieur Giffard. Il fit deux expériences, l'une en 1852, l'autre en 1855. Dans l'une et l'autre, il se servit de ballons à hydrogène, construits d'après les règles précédentes. Le moteur était une petite machine à vapeur de 3 chevaux, d'un système perfectionné au point de vue de l'aérostation ; elle ne pesait que 30 à 40 kilogrammes par cheval-vapeur ; elle avait un foyer intérieur et une che-

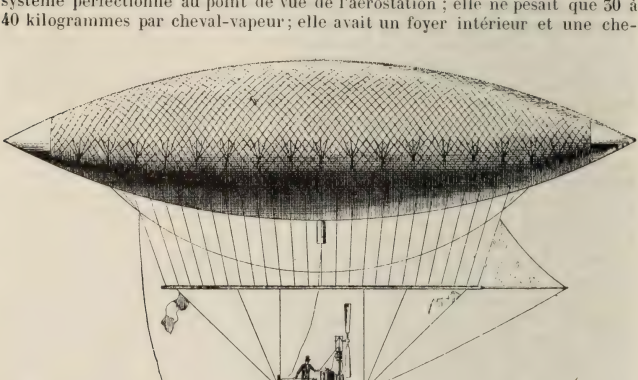


Fig. 240.

minée renversée du haut vers le bas, de manière à diminuer les dangers d'incendie. Ce moteur pouvait actionner une hélice, dont les branches effectuaient 110 tours à la minute ; le gouvernail était constitué par une voile triangulaire tendue à l'arrière de l'aérostat, sur la traverse horizontale que soutenait le filet du ballon (fig. 240). Ce ballon jaugeait 2400 mètres cubes, mais il n'avait pas, suivant l'usage, la forme sphérique : c'était une espèce d'ellipsoïde, terminé en pointe aux extrémités de son grand axe. Giffard, guidé par l'analogie des bateaux, avait établi que la résistance de l'air serait moins forte sur cette surface que sur une sphère de même volume.

« L'ascension de cet aérostat se fit heureusement, la machine évolua ; mais pendant la descente elle ne put garder son équilibre ; elle tomba sur pointe et le ballon, s'échappant du filet, se perdit [1]. »

1. Jamin, *les Ballons.*

Expériences de Dupuy de Lôme. — Ces expériences sont très coûteuses. Aussi ne furent-elles reprises que vingt ans plus tard, aux frais du gouvernement de la Défense Nationale, qui en 1870 confia à Dupuy de Lôme la construction d'un ballon dirigeable.

L'appareil ne fut prêt à essayer que deux ans plus tard, en 1872. Il n'avait plus d'intérêt au point de vue pratique, mais son importance était énorme au point de vue théorique, car il réalisait d'une manière plus complète que le ballon Giffard toutes les conditions théoriques de la navigation aérienne.

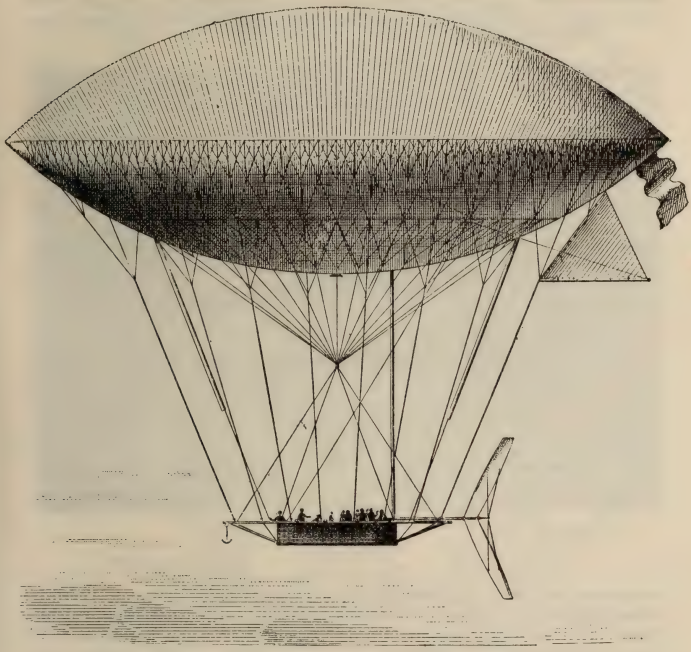


Fig. 241.

C'était un ballon gonflé au gaz de l'éclairage, de forme ovale et oblongue, comme celui de Giffard (fig. 241), mais beaucoup plus gros (environ 3500 mètres cubes), ce qui permettait d'enlever un moteur plus puissant. Celui-ci se composait d'un treuil à manivelle manœuvrée à bras d'homme, qui actionnait une hélice à deux ou quatre branches, à ailes de taffetas. On pouvait ainsi donner à l'aérostat une vitesse propre de $2^{m},5$ par seconde. Le gouvernail était formé d'une voile triangulaire, placée à l'arrière, sous le ballon. Le perfectionnement principal consistait dans l'adjonction, à l'intérieur du grand ballon, d'un petit ballon, d'une capacité dix fois moindre, qu'on pouvait à volonté remplir

d'air, à l'aide d'un ventilateur porté et manœuvré dans la nacelle. Ce ballonnet, sorte de vessie natatoire, avait pour rôle de conserver au grand ballon une forme permanente, quelles que fussent les variations de la pression atmosphérique, pendant l'ascension ou la descente. Dupuy de Lôme avait reconnu que cette permanence de forme était nécessaire pour assurer à l'aérostat la stabilité qui avait fait défaut au ballon Giffard.

Dupuy de Lôme partit lui-même dans son appareil, le 2 février 1872, malheureusement par un assez mauvais temps. Après avoir marché d'abord en suivant le vent, il mit l'hélice en fonction, puis il fit agir le gouvernail, dont l'effet se produisit aussitôt, de manière à fixer l'axe dans une direction perpendiculaire à celle du vent, qui avait ce jour-là une vitesse de 15 mètres à la seconde. Con-

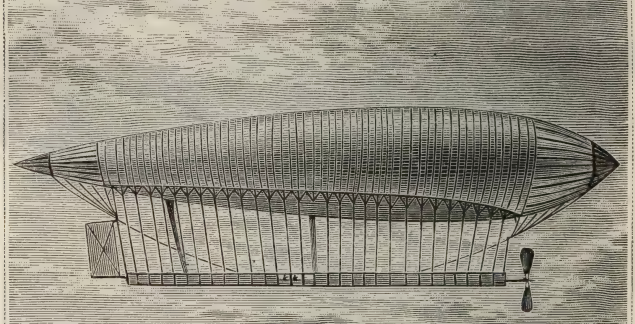


Fig. 242.

formément aux principes de mécanique rappelés précédemment, l'aérostat s'avança dans une direction inclinée sur celle du vent. La déviation, calculée d'après la vitesse v et v', devait être de 15° : on observa une déviation de 10° à 12°. La vérification des principes pouvait donc être considérée comme faite par cette expérience.

Expériences des capitaines Renard et Krebs. — Le principal desideratum du ballon Dupuy de Lôme, c'était l'insuffisance de la force motrice et par suite de la vitesse propre. Un grand progrès dans ce sens a été réalisé récemment par M. Renard, capitaine du génie, et par son collaborateur le capitaine d'infanterie Krebs [1]. Grâce à l'emploi d'un moteur électrique, actionné par des piles légères, ils ont obtenu une vitesse propre de $5^m,6$. Ils avaient été précédés, il est vrai, dans l'emploi d'un moteur électrique par MM. Tissandier (expérience du 8 octobre 1883) ; mais ceux-ci n'avaient obtenu qu'une vitesse de $2^m,8$. Au point de

1. Le capitaine Renard est directeur d'un établissement d'études aérostatiques fondé par le ministère de la guerre, à Chalais (Meudon).

vue pratique, le perfectionnement dû aux capitaines Renard et Krebs est énorme, car cette vitesse leur a suffi dès le premier jour pour vaincre la vitesse du vent et pour assurer le plein succès de leur premier essai de navigation aérienne.

Leur aérostat était un ballon de 1800 mètres cubes, pouvant enlever une charge totale de 2000 kilogrammes. Il était de forme allongée, et muni d'une hélice et d'un ballonnet (fig. 242), d'après les règles posées par Dupuy de Lôme pour la construction des aérostats dirigeables. La nacelle avait la forme d'une

Fig. 245.

longue yole de canotage, avec une place laissée au milieu pour les aéronautes; l'hélice était placée à l'avant et le gouvernail à l'arrière du navire aérien. L'appareil tout entier pouvait être remisé, dans un vaste hangar, à l'établissement militaire de Chalais, en attendant un temps favorable : *condition indispensable de succès* pour toutes les expériences de ce genre.

L ascension eut lieu le 9 août 1884, à quatre heures du soir, par un temps calme « L'aérostat, laissé libre et possédant une très faible force ascensionnelle, s'éleva lentement jusqu'à la hauteur des plateaux environnants. La machine

fut mise en mouvement, et bientôt, sous son impulsion, l'aérostat accélérait sa marche, obéissant fidèlement à la moindre indication de son gouvernail [1]. » Arrivés au-dessus du village de Villacoublay (fig. 243), à 4 kilomètres environ de Chalais, les aéronautes décidèrent de rebrousser chemin, et d'essayer de descendre au lieu même du départ. Ils exécutèrent donc, par une manœuvre convenable du gouvernail, un demi-tour sur la droite, puis plus loin un nouveau changement de direction sur la gauche, et bientôt ils vinrent planer à 300 mètres au-dessus du point de départ, où la descente s'effectua sans aucun accident. La figure 245 représente approximativement le tracé de ce voyage aérien [2].

5° *Conclusions.* — L'expérience de MM. Renard et Krebs est la première qui ait donné une démonstration expérimentale complète de la direction des aérostats. A ce titre elle mérite le retentissement qu'elle a obtenu dans le public; mais il ne serait pas juste d'en exagérer l'importance et la portée au détriment des expériences antérieures. Il ne faudrait pas croire, par exemple, « qu'il y avait un secret pour la direction des ballons, et que ce secret a tout à coup été découvert par les derniers chercheurs. » Les développements que nous avons donnés précédemment montrent « qu'il y avait simplement un problème travaillé par beaucoup de personnes (Giffard, Dupuy de Lôme, MM. Tissandier) qui a été résolu théoriquement et même pratiquement, dans l'air calme, et que la solution vient d'être étendue jusqu'au cas où la vitesse du vent est d'environ 5 mètres : elle s'arrête là [3]. » On voit qu'il reste beaucoup de progrès à faire dans le même sens, puisque, à Paris même, les vents dont la vitesse est inférieure à 7 mètres et qui permettraient l'emploi de l'aérostat dirigeable, règnent à peine 108 jours par an ; tout le reste de l'année, les vents sont plus forts et l'aérostat ne pourrait pas servir.

CHAPITRE III

COMPRESSIBILITÉ DES GAZ

LOI DE MARIOTTE ET MANOMÈTRES.

223. **Loi de Mariotte.** — Mariotte, physicien français, a le premier [4] énoncé nettement la loi de la compressibilité des gaz.

ÉNONCÉ. — *Les volumes occupés par une masse donnée de gaz, à température constante, sont inversement proportionnels aux pressions qu'elle supporte.*

1. *Comptes rendus*, communication de MM. Renard et Krebs.
2. Cette carte a été dressée par MM. Tissandier, d'après la note scientifique de MM. Renard et Krebs.
3. J. Jamin, *les Ballons*.
4. *Essai sur la nature de l'air*, de l'abbé Mariotte (1676). — Quelques années auparavant (1662), en Angleterre, Boyle avait publié des expériences sur le même sujet (*Nova experimenta de vi aeris elastica*) qui conduisent à la même conclusion.

Vérification expérimentale. — 1° *Cas des pressions supérieures à une atmosphère. Tube de Mariotte.* — Cette loi fut vérifiée sur l'air au moyen d'un petit appareil qu'on appelle encore aujourd'hui le *tube de Mariotte.* Il est employé dans le cas où l'on soumet la

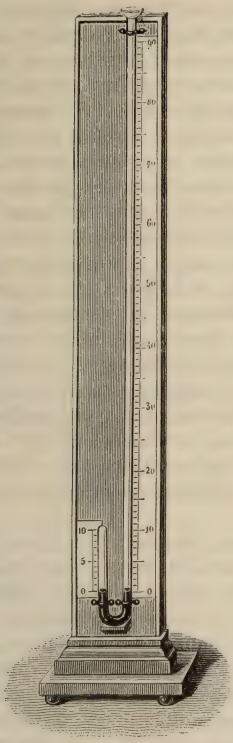


Fig. 244.

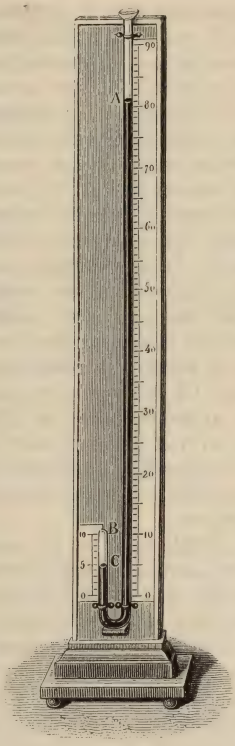


Fig. 245

masse gazeuse à des pressions qui croissent au delà d'une atmosphère.

Sur une planchette de bois, maintenue verticalement, est fixé un tube de verre recourbé, à branches très inégales (fig. 244 et 245). Le long de la petite branche, qui est fermée, est une échelle indiquant des capacités égales, tandis que l'échelle placée le long de

la grande branche donne les hauteurs en centimètres. Les zéros des deux échelles sont sur une même ligne horizontale.

On verse d'abord du mercure par le sommet de la grande branche de manière que le niveau du liquide s'élève au zéro dans les deux branches : ce qu'on obtient après quelques tâtonnements. L'air emprisonné dans la branche courte exerce alors, sur le mercure qui s'y trouve, la même pression que l'atmosphère exerce sur le mercure de l'autre branche. Cela résulte évidemment de ce que les deux niveaux sont sur un même plan horizontal. D'ailleurs, comme il y a équilibre, la pression que supporte la masse gazeuse est égale à celle qu'elle exerce. On a donc, dans la petite branche, une certaine masse de gaz, occupant un volume déterminé à une pression connue, qui est la pression atmosphérique du moment. On verse ensuite du mercure dans le grand tube jusqu'à ce que la pression qui en résulte réduise de moitié le volume de la masse d'air. Si, par exemple, le volume initial était de 10 divisions, le volume final sera réduit à 5, ainsi que le montre la figure 245. Mesurant alors la différence CA des niveaux du mercure dans les deux branches, on trouve qu'elle est précisément égale à la hauteur barométrique du moment. La pression de la colonne CA équivaut donc à 1 atmosphère. En y ajoutant la pression atmosphérique qui s'exerce en A, au sommet de la colonne, on voit qu'au moment où le volume d'air s'est réduit de moitié, la pression est double de ce qu'elle était d'abord. Cela démontre la loi, du moins pour les pressions comprises entre 1 et 2 atmosphères.

Si la grande branche est assez longue pour qu'on puisse y verser du mercure jusqu'à réduire la masse d'air au tiers de son volume initial, on constate que la distance verticale des deux niveaux devient égale à deux fois la hauteur barométrique. Cette colonne de mercure équivaut donc à deux pressions atmosphériques, qui, s'ajoutant à celle qui s'exerce directement sur le mercure de la grande branche, font une pression totale de 3 atmosphères. C'est donc sous une pression triple que le volume d'air est devenu trois fois moindre. Les dimensions de l'appareil ne permettent pas de pousser plus loin la vérification de la loi.

2° *Cas des pressions inférieures à une atmosphère. — Cuvette profonde.* — Au lieu de comprimer le gaz en le soumettant à des pressions croissantes, on peut le dilater en le soumettant à des pressions décroissantes : la loi se vérifie tout aussi bien. On se sert, dans ce cas, 1° d'un tube de Torricelli, aussi bien calibré que possible et divisé en parties d'égale longueur; 2° d'une

cuvette profonde, c'est-à-dire d'une cuvette en verre, telle que P, dont le fond est formé par un long et large tube en fer (fig. 246).

On remplit le tube de mercure environ jusqu'aux deux tiers et on laisse le reste plein d'air ; puis on le retourne et on le plonge dans la cuvette profonde qui a été préalablement remplie de mercure. Enfonçant ensuite le tube jusqu'à ce que le niveau du mercure soit le même à l'intérieur et à l'extérieur (fig. 246), on lit sur le tube quel est le volume occupé par l'air. On a alors enfermé dans le tube une masse d'air de volume connu, à la pression atmosphérique du moment. Puis on soulève le tube, comme le représente la figure 247, jusqu'à ce que, par suite de la diminution de pression, le volume final de l'air AC soit double du volume initial AB (fig. 246). Or on voit alors le mercure monter dans le tube et y atteindre une hauteur CD égale à la moitié de la hauteur barométrique actuelle. L'air, dont le volume a doublé, n'est donc plus qu'à une demi-pression atmosphérique ; car c'est la force élastique de cet air qui, jointe au poids de la colonne CD, fait équilibre à la pression atmosphérique extérieure. Le volume est donc bien encore en raison inverse de la pression.

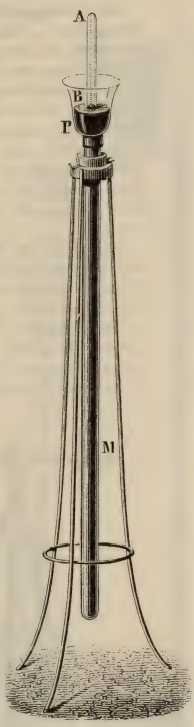


Fig. 246. Fig. 247.

Si le tube est assez long, ou si le volume initial AB est assez petit, on peut pousser la vérification de la loi jusqu'à 1/3 d'atmosphère. Pour cela, il suffit de soulever le tube jusqu'à ce que le volume de l'air ait exactement triplé : à ce moment on constate que la colonne de mercure soulevée est égale aux 2/3 de la hauteur barométrique, et comme le poids du mercure soulevé, augmenté de la force élastique du gaz, fait équilibre à la pression atmosphérique, il en résulte que cette force élastique équivaut à un 1/3 d'atmosphère.

Remarque. — On peut mettre plus de précision dans cette expérience, en installant dans la même cuvette un tube de Torricelli, à poste fixe, et en mesurant chaque fois, au cathétomètre, la différence des niveaux dans les deux tubes.

224. **Critique de la loi de Mariotte. — Expériences de Despretz.** — Malgré l'insuffisance de ces expériences de vérification, on avait d'abord admis la loi de Mariotte comme exacte *d'une manière absolue pour tous les gaz et à toutes les pressions*. Despretz fit voir le premier qu'elle n'était pas générale, en démontrant que divers gaz, soumis aux mêmes pressions croissantes, subissent des réductions de volume différentes. Ainsi l'acide carbonique, l'hydrogène sulfuré, l'ammoniaque et le cyanogène se compriment plus que l'air ; l'hydrogène, qui se comporte d'abord comme l'air jusqu'à une pression de 15 atmosphères, est ensuite moins compressible.

L'appareil de Despretz se composait d'un certain nombre de tubes cylindriques de même calibre et de même hauteur, disposés parallèlement, sur une même cuvette à mercure. On introduisait dans chacun d'eux un gaz différent, à la même pression initiale, puis on enfermait le tout dans l'appareil à pression. C'était une espèce de piézomètre, en verre, plein d'eau et fermé par une garniture métallique munie d'un piston plongeur à vis, analogue à celui de la figure 248. On n'avait qu'à tourner la vis pour enfoncer plus ou moins le piston et faire varier la pression dans l'eau de l'éprouvette et par suite dans la cuvette à mercure.

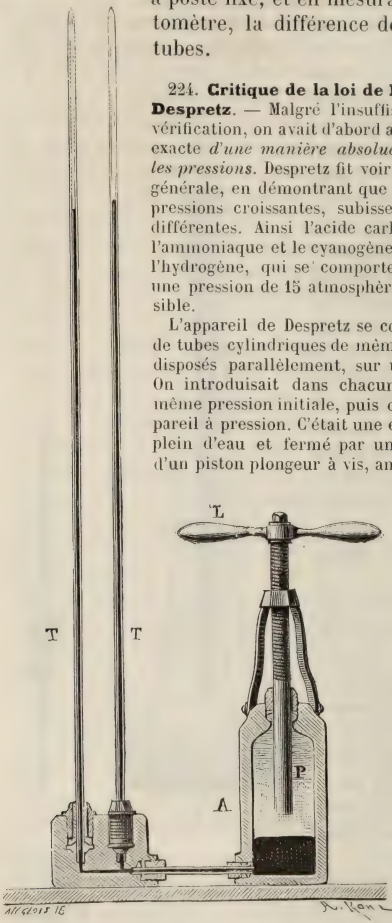


Fig. 248.

225. **Expériences de Pouillet.** — Les conclusions de Despretz relatives à l'*inégale compressibilité des divers gaz* furent confirmées par des expériences de Pouillet. Ce dernier employa un appareil qui lui permettait de placer dans les mêmes conditions initiales deux gaz, tels que l'air et l'acide carbonique, et de les comprimer simultanément sous une même pression. C'était un cylindre en fonte, très résistant, qu'on avait rempli d'une couche de mercure surmontée d'une couche d'huile (fig. 248). La pression était produite par l'introduction dans le liquide d'un piston plongeur P, qu'on pouvait manœuvrer aisément à l'aide de la manivelle L. La pression se transmettait, par l'intermédiaire du mercure, simultanément à deux gaz diffé-

rents contenus dans deux tubes en cristal T et T', gradués avec soin. Ces tubes étaient solidement mastiqués dans une pièce en fonte, qui forme avec le cylindre un système de vases communiquants.

226. **Expériences de Dulong et Arago.** — La loi de Mariotte avait donc

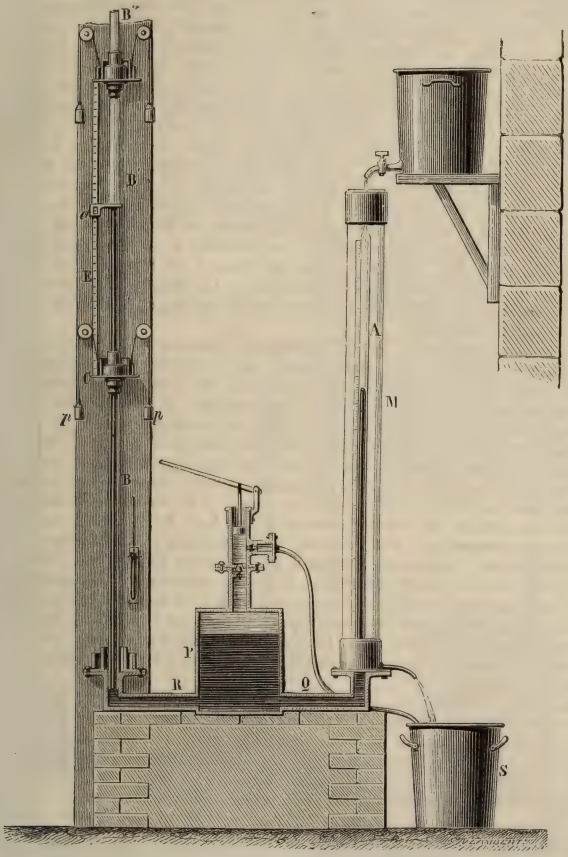


Fig. 219.

été trouvée en défaut : elle n'était pas générale. Restait à savoir si elle était rigoureusement applicable même à un seul gaz, par exemple à l'air atmosphérique. L'occasion de résoudre cette question se présenta naturellement à Dulong et à Arago. Ces deux savants, ayant été chargés de déterminer les ten-

sions maxima de la vapeur d'eau à des températures élevées, durent commencer par graduer pour cet usage un instrument de mesure, appelé *manomètre à air comprimé* (236), qui est précisément fondé sur la loi de Mariotte.

Appareil. — Ils disposèrent donc leur appareil comme le montre la figure 249. Un réservoir de fonte P porte latéralement deux tubulures Q, R. Dans la première est scellé un tube de verre A, de près de 2 mètres de long : c'est ce qu'on appelle le *tube manométrique;* on l'a fermé à la lampe, après l'avoir rempli d'air sec. Ce tube est entouré d'un manchon de verre où l'on fait continuellement circuler un courant d'eau froide, de manière à maintenir constante la température de la masse gazeuse, pendant toute la durée de l'expérience, malgré la chaleur dégagée par la compression de l'air. Sur la seconde tubulure est fixée une série de treize tubes de cristal B, B′, B″..., chacun de 2 mètres de longueur, et reliés entre eux au moyen de garnitures de fer.

Ces tubes étaient appliqués le long de forts madriers de sapin. Pour qu'ils n'exerçassent pas de pression les uns sur les autres, à chaque garniture, comme on le voit en C, étaient attachés deux cordeaux s'enroulant sur des poulies : celles-ci étaient portées par les madriers mêmes qui soutenaient tous les tubes. Aux cordeaux étaient suspendus de petits seaux *p*, *p*, chargés de grenaille de plomb, et faisant équilibre, deux par deux, à un tube et à sa garniture. Grâce à ces treize systèmes de contrepoids, la colonne tout entière restait parfaitement libre, malgré sa longueur de 26 mètres, et il suffisait d'un léger effort pour la soulever.

Marche de l'expérience. — On produisait le pression à l'aide d'une pompe aspirante et foulante, qui était adaptée sur le réservoir P, aspirait de l'eau dans un vase S et la refoulait dans le réservoir. Or, celui-ci ayant été d'avance rempli de mercure jusqu'aux deux tiers environ, la pression transmise par l'eau au mercure refoulait ce dernier dans les tubulures Q et R, en sorte que le liquide s'élevait en même temps dans les tubes B, B′ B″..., et dans le manomètre A. Tout se passait donc ici comme dans l'expérience du tube de Mariotte : les tubes B, B′, B″... en figuraient la grande branche, et le tube manométrique la petite. A mesure que le volume d'air se réduisait ainsi dans le tube A, la hauteur du mercure dans les tubes B, B′, B″... faisait connaître la pression correspondante. Cette hauteur se mesurait au moyen de règles divisées en millimètres et munies de verniers, qu'on portait le long des tubes, en les appliquant sur des points de repère marqués d'avance sur les garnitures de jonction. Une règle de cuivre divisée et munie d'un vernier était appliquée, à poste fixe, contre le tube manométrique : elle servait à apprécier les hauteurs occupées par le mercure dans les expériences successives. On en déduisait ensuite les volumes successifs occupés par la masse d'air, au moyen d'un jaugeage au mercure.

Résultats. — Dulong et Arago, ayant expérimenté jusqu'à 27 atmosphères, observèrent que *le volume de l'air diminuait toujours un peu plus dans le tube* A *que ne l'indiquait la loi de Mariotte;* mais, les différences étant très petites, ils les attribuèrent à des erreurs d'observation et admirent que *la loi était rigoureuse pour l'air, du moins jusqu'à* 27 *atmosphères, limite de leurs expériences.* Remarquons que, les différences étant toujours de même signe, il eût été plus logique de les attribuer, non seulement aux erreurs de l'expérience, mais aussi à une divergence probable entre la loi réelle de compressibilité de l'air et la loi de Mariotte.

227. **Expériences de Regnault.** — Regnault publia, en 1847, des expériences sur la compressibilité des gaz qui firent époque dans la science. Son appareil, qui avait beaucoup de rapport avec celui de Dulong et Arago, présentait de nombreux perfectionnements de détail; sa méthode permettait de se mettre à l'abri ou de tenir compte de toutes les causes d'erreur inhérentes aux méthodes des précédents expérimentateurs.

1° *Appareil.* — La figure 250 représente l'ensemble de l'appareil de Regnault et quelques-uns de ses détails les plus importants. On en voit tout de suite la grande analogie avec l'appareil précédent.

Les tubes A et B sont juxtaposés parallèlement et en dehors de la pompe à mercure H. Un robinet en fonte R est interposé entre les tubes et le réservoir, de manière à mettre les deux colonnes de mercure à l'abri des fuites qui pourraient se produire dans la pompe pendant la durée d'une observation.

Le tube manométrique B est en cristal et a 3 mètres de longueur; il a été jaugé et divisé en millimètres : il porte un trait de repère qui le partage en deux parties d'égale capacité. Il est fermé à sa partie supérieure par un robinet *p* en acier, par où on peut le remplir d'un gaz quelconque, à une pression déterminée. Ce gaz est conservé dans un réservoir V, maintenu dans un bain d'eau courante à une température constante; on l'y a comprimé à l'aide de la machine de compression P.

La pression est mesurée à l'aide d'une colonne A de huit tubes en cristal, égaux chacun au tube B, parfaitement équilibrée comme dans l'appareil de Dulong. L'assemblage des tubes se fait par un système de raccord extrêmement simple, appelé par Regnault *collier à gorge*. Les extrémités des tubes, en regard, sont mastiquées chacune dans une tubulure en fer à base conique; une rondelle en cuir est interposée entre les deux bases des cônes en contact. Elles sont embrassées et serrées par le collier, qui est creusé intérieurement en forme de

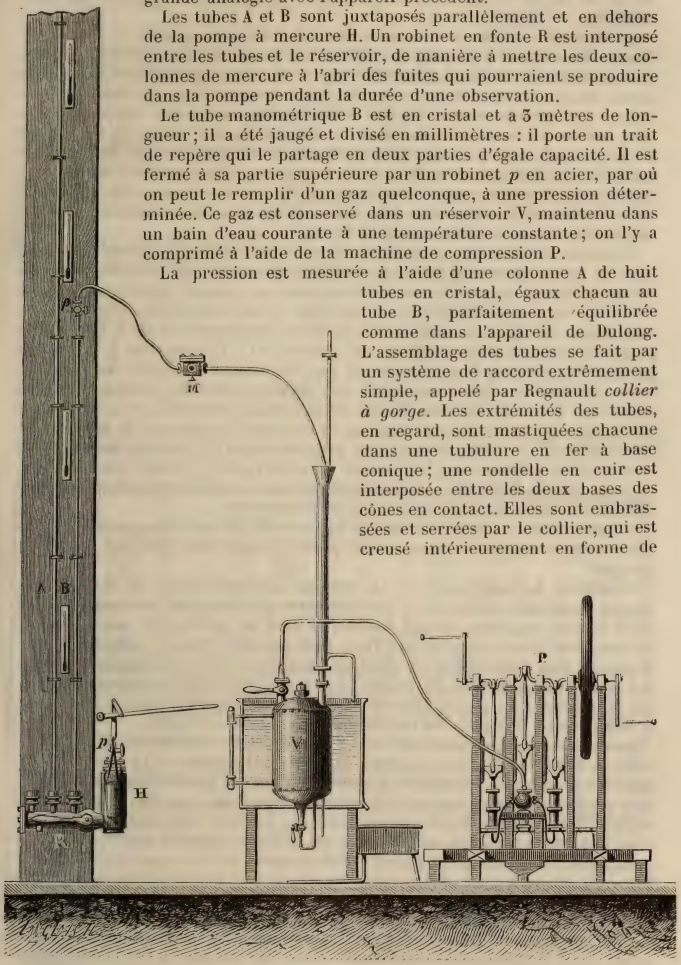


Fig. 250.

gorge biconique, d'une ouverture un peu plus aiguë que celle des bases des

tubes. Ce collier est formé de deux parties articulées autour d'une charnière, et pouvant être rapprochées ou écartées à l'aide d'une vis. En serrant la vis, on exerce une pression considérable et l'on obtient une fermeture hermétique.

2° *Méthode.* — Elle était essentiellement distincte de celle de Dulong et Arago. Ceux-ci, en effet, opéraient de la même manière que l'abbé Mariotte, c'est-à-dire qu'ils réduisaient de plus en plus le volume occupé par une même masse de gaz. Or les erreurs de mesure qu'ils commettaient, à chaque observation du volume réduit, étaient sensiblement constantes. Supposons que leur somme fût égale à 1/2 centimètre, elle atteignait à peine $\frac{1}{400}$ du volume initial, lequel était de 2 mètres ; *c'était une erreur négligeable.* Mais lorsque pour une pression environ 20 fois plus grande le volume était réduit à $\frac{1}{20}$ de 2 mètres, la même erreur représentait $\frac{1}{20}$ du volume gazeux ; *elle atteignait donc l'ordre de grandeur des divergences qu'on pouvait soupçonner entre la loi de Mariotte et la loi de compressibilité.*

Regnault fit disparaître cette cause d'erreur croissante en opérant, non plus sur une même masse de gaz, mais sur des masses de gaz variables, dont les volumes étaient successivement réduits dans un rapport constant, d'environ 2 à 1. On remplissait d'abord le volume total V_0 du manomètre avec une certaine masse de gaz à la pression P_0 ; puis on comprimait le gaz à l'aide de la pompe à mercure, jusqu'à réduire son volume à V_1 (V_1 = environ $\frac{1}{2}$ V_0), et l'on mesurait la pression finale P_1, fournie par la distance verticale des deux niveaux du mercure. Cela constituait une première série de mesures. — On en faisant une deuxième en remplissant de nouveau le volume V_0 avec une autre masse du même gaz, à la pression P'_0 ; on réduisait le volume à V_1 (ou V'_1, peu différent de V_1), et l'on mesurait une pression finale P'_1, et ainsi de suite. En opérant ainsi toujours sur les mêmes volumes V_0 et $\frac{1}{2}$ V_0 assez considérables, l'erreur absolue était très petite, et l'erreur relative était constante : *la sensibilité de la méthode n'allait donc pas en diminuant.*

3° *Corrections*[1]. — La précision de la méthode fut encore augmentée grâce à un certain nombre de corrections qu'on fit subir aux résultats bruts des mesures.

Correction barométrique. — La pression atmosphérique, au moment de chaque expérience, était lue à un baromètre placé au bas de la tour. Soit H cette lecture (supposée réduite à zéro) ; or c'est la pression au sommet de la colonne mercurielle dans le long tube qu'il faudrait évaluer : elle serait évidemment plus petite que H, et égale par exemple à $H - h$. On commettait donc une erreur par excès. On déterminait h_0 en appliquant la formule barométrique simplifiée. Pour une hauteur de la colonne mercurielle égale à 22 mètres, et une pression H égale à 760 millimètres, on avait $h = 2^{mm},092$.

Correction de compressibilité. — Le mercure étant sensiblement compressible, la densité n'était pas constante sur toute la longueur de la colonne mercurielle ; les couches inférieures étaient sensiblement plus denses que les couches supérieures. Il en résultait évidemment une erreur par défaut dans l'évaluation de la pression d'après la hauteur de la colonne. Regnault transformait donc la hauteur observée en ce qu'elle eût été si le mercure n'était pas compressible et conservait partout sa densité normale, à 0° et sous la pression de 760 millimètres. La correction était donc positive ; elle était très petite, car elle n'atteignait pas $1^{mm},2$ pour une hauteur totale de 22 mètres.

Correction de température. — La température de l'eau froide qui circulait dans le manchon n'était pas rigoureusement constante pendant la durée d'une même série d'expériences. On ramenait donc les volumes du gaz à ce qu'ils eussent été si la température eût été constante.

1. Voir le détail de ces corrections dans la *Physique* de Violle, t. Ier.

4° *Résultats.* — Si la loi de Mariotte *s'appliquait à un gaz déterminé*, on devrait avoir pour toute la série des mesures qui le concernent :

$$V_0P_0 = V_1P_1, \quad V'_0P'_0 = V'_1P'_1, \text{ etc.,} \quad \text{ou} \quad \frac{V_0P_0}{V_1P_1} = 1 = \frac{V'_0P'_0}{V'_1P'_1} = \ldots \text{etc.}$$

Si, au contraire, le gaz était *plus compressible* que ne l'indique la loi de Mariotte, on devrait avoir

$$\frac{V_0}{V_1} > \frac{P_1}{P_0} \quad \text{ou} \quad \frac{V_0P_0}{V_1P_1} > 1$$

inégalités qu'on peut exprimer aussi par l'égalité

$$\frac{V_0P_0}{V_1P_1} = 1 + \varepsilon,$$

où ε désigne une quantité plus petite que l'unité

Enfin, si le gaz était *moins compressible*, on devrait avoir

$$\frac{V_0P_0}{V_1P_1} < 1,$$

où bien

$$\frac{V_0P_0}{V_1P_1} = 1 - \varepsilon.$$

Or voici le tableau d'une série d'expériences faites sur l'air, sur l'azote, sur l'acide carbonique et sur l'hydrogène ;

AIR.		AZOTE.		ACIDE CARBONIQUE.		HYDROGÈNE.	
P_0	$\frac{V_0P_0}{V_1P_1}$	P_0	$\frac{V_0P_0}{V_1P_1}$	P_0	$\frac{V_0P_0}{V_1P_1}$	P_0	$\frac{V_0P_0}{V_1P_1}$
mm		mm		mm		mm	
738,72	1,001414	753,46	1,000988	764,03	1,007597	»	»
2112,53	1,002765	4953,92	1,002952	5186,13	1,028698	2211,18	0,998584
4140,82	1,003253	8628,54	1,004768	4879,77	1,045625	5845,18	0,996121
9536,41	1,006366	10981,42	1,006456	9619,97	1,155865	9176,50	0,992953

La comparaison de ces nombres a conduit Regnault aux conclusions suivantes :

1° Pour aucun de ces quatre gaz le rapport $\frac{V_0P_0}{V_1P_1}$ n'est égal à 1 : *aucun d'eux n'obéit donc rigoureusement à la loi de Mariotte.* La différence ε restant très faible, la divergence entre la loi de Mariotte et la véritable loi de compressibilité n'est pas très grande. Elle est négligeable pour de faibles pressions ; elle s'accuse davantage à mesure que la pression du gaz augmente.

2° ε est positif pour l'air, l'azote et l'acide carbonique : donc *ces trois gaz sont plus compressibles que ne l'indique la loi de Mariotte.* Pour l'hydrogène ε est négatif : *donc ce gaz est moins compressible ;* mais la divergence diminue quand la pression augmente, contrairement à ce qui a lieu pour les autres gaz.

3° Tous les autres gaz étudiés par Regnault se comportent comme l'air. Ils sont plus compressibles que ne l'indique la loi de Mariotte. La divergence est

beaucoup plus grande pour les gaz liquéfiables, tels que l'acide carbonique, l'acide sulfureux, le gaz ammoniac, le cyanogène, que pour les gaz anciennement appelés *permanents*.

4° L'équation simple $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} = 1$, qui exprime la loi de Mariotte, ne s'applique donc à aucun gaz. Regnault a déduit de ces expériences une formule empirique représentant la loi de compressibilité de quelques gaz. Elle est

$$\frac{V_0 P_0}{VP} = 1 \pm A\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) \pm B\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2 :$$

A et B sont des constantes dont les valeurs sont *différentes pour chaque gaz* et sont pour tous *extrêmement petites*.

228. **Expériences postérieures à celles de Regnault.** — Regnault n'avait étudié la compressibilité des gaz qu'aux températures ordinaires, et sous des pressions moyennes, variant de 1 à 27 atmosphères. Après lui, plusieurs expérimentateurs ont poussé cette étude, pour les divers gaz, permanents ou liquéfiables, jusqu'à des températures élevées (de 0° à 320° [1]) et entre des limites de pressions très étendues (depuis 0mm,259 [2]) jusqu'à 3000 atmosphères [3]. Voici les résultats les plus nets de ces recherches :

1° *Compressibilité de l'hydrogène.* — L'hydrogène soumis à des pressions moyennes (expériences de Regnault) possède une compressibilité *presque égale*, quoique déjà un peu inférieure, à celle qui résulterait de la loi de Mariotte ; puis, à mesure que la pression croît, cette compressibilité décroît d'une manière continue : ainsi, vers 3000 atmosphères, le volume d'une masse donnée de ce gaz est trois fois plus grand que ne l'exigerait la loi de Mariotte (expériences de Natterer, de M. Cailletet, de M. Amagat).

2° *Découverte du point critique des gaz.* — En étudiant la compressibilité de l'acide carbonique à des températures croissantes, Andrews a découvert un fait capital : *Au-dessus d'une certaine température, l'acide carbonique ne peut pas être liquéfié, quelle que soit la pression.* Cette température limite a été appelée par Andrews le *point critique* du gaz : elle est de 30°,92 pour l'acide carbonique.

Ce fait n'est pas particulier à l'acide carbonique : tous les gaz ont un *point critique*, variable avec la nature du gaz, et d'autant plus bas, dans l'échelle des températures, que le gaz est moins facilement liquéfiable. Les gaz dits *permanents* ont des points critiques extrêmement bas ; ils sont devenus liquéfiables, par compression, à partir du moment où l'on a pu opérer à des températures aussi basses que leurs points critiques.

3° *Existence d'un maximum de compressibilité pour tous les gaz.* — Tout gaz *permanent*, c'est-à-dire pris à une température supérieure à son point critique et pour laquelle il n'est pas liquéfiable, commence par être plus compressible que ne l'indiquerait la loi de Mariotte, puis il le devient de plus en plus, à mesure que la pression augmente, jusqu'à un certain maximum ; après quoi sa compressibilité décroît quand la pression continue à augmenter, devient conforme à la loi de Mariotte et finit par diminuer d'une manière continue, comme celle de l'hydrogène (expériences de M. Cailletet).

4° *Influence de la température d'un gaz sur sa compressibilité.* — Quand le gaz est pris à une température notablement supérieure à son point critique, il se comporte toujours comme l'hydrogène. Quand la température est plus ou moins inférieure au point critique, la compressibilité du gaz est tout d'abord

1. M. Amagat : Expériences sur l'acide sulfureux.
2. Amagat : Expériences sur l'air.
3. Natterer, Cailletet : Expériences sur les gaz permanents.

supérieure à celle qui résulterait de la loi de Mariotte, et elle augmente sans cesse avec la pression jusqu'à une limite qu'il atteint au moment de sa liquéfaction : cette compressibilité limite est précisément égale à celle du liquide formé (expériences de M. Amagat; formule de Clausius).

5° *Compressibilité des gaz aux basses pressions.* — Quelques expériences faites à des pressions très inférieures à la pression atmosphérique ont conduit les expérimentateurs (MM. Siljeström, Amagat, Mendéléef) à des résultats tout à fait discordants. La marche du phénomène reste donc encore inconnue dans ces conditions[1].

229. **Expressions analytiques de la loi de Mariotte.** — Il résulte de l'ensemble de ces expériences que la loi de Mariotte, malgré sa simplicité, ne représente exactement la loi de compressibilité d'aucun gaz. On doit la considérer comme une sorte de *loi limite*, dont les différents gaz s'approchent plus ou moins, suivant les pressions initiales qu'ils possèdent et suivant leur température. Du reste, pour tous les gaz éloignés de leur point de liquéfaction, et en particulier pour l'air atmosphérique et les gaz jadis appelés *permanents*, les écarts sont si faibles pour des variations de pression peu considérables et à la température ordinaire, qu'on peut les négliger absolument et appliquer la loi de Mariotte dans tous les calculs relatifs à la compressibilité.

Première formule. — L'expression du précédent énoncé de la loi est évidemment

$$[1] \qquad \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_0}{P_1}.$$

Cette formule, qui paraît la plus simple, n'est point la plus commode.

Deuxième formule. — Si l'on chasse les dénominateurs dans la formule [1], il vient

$$V_1P_1 = V_0P_0;$$

on aurait de même, pour d'autres conditions V_2P_2,

$$V_2P_2 = V_0P_0 \ldots = V_1P_1.$$

On peut donc écrire

$$[2] \qquad V_0P_0 = \text{constante}.$$

Telle est la formule la plus commode pour les calculs.

On peut l'énoncer en disant que, pour une masse de gaz donnée, maintenue à une même température, *le produit du volume par la pression est un nombre constant.*

1. Voir le détail de ces expériences dans la *Physique* de Violle, t. Ier.

Troisième formule. — Dans l'expérience du tube de Mariotte, la masse d'air renfermée dans le tube restant la même, son poids spécifique devient nécessairement d'autant plus grand que son volume devient plus petit. Si p est le poids constant du gaz, V_0 et D_0 son volume et son poids spécifique à la pression P_0, V_1 et D_1 son volume et son poids spécifique à la pression P_1, on aura évidemment

$$p = V_0 D_0 = V_1 D_1;$$

de là on tire

$$V_0 D_0 = V_1 D_1 \quad \text{et} \quad \frac{D_1}{D_0} = \frac{V_0}{V_1},$$

et comme

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{P_1}{P_0}, \quad \text{on a} \quad \frac{D_1}{D_0} = \frac{P_1}{P_0}. \qquad [3]$$

Cette équation exprime une conséquence directe de la loi de Mariotte, qui pourrait lui servir de troisième énoncé, c'est que, *à une même température, le poids spécifique d'un gaz est proportionnel à la pression qu'il supporte.* Par exemple, sous la pression ordinaire de l'atmosphère, la densité de l'air étant 773 fois moindre que celle de l'eau, sous une pression de 773 atmosphères l'air aurait la même densité que l'eau, si à une telle pression il était encore gazeux.

MANOMÈTRES.

230. **Définition et classification.** — Tous les appareils qui ont servi à la vérification de la loi de Mariotte, depuis le simple tube de Mariotte jusqu'aux appareils perfectionnés de Regnault et des derniers expérimentateurs, se composent de deux parties : 1° un vase clos, de forme variable, dans lequel on comprime ou bien l'on dilate la masse gazeuse; 2° un tube à mercure, ouvert ou fermé, dans lequel on mesure le degré de compression ou de raréfaction du gaz. Cette deuxième partie peut être construite à part : elle constitue, sous le nom de *manomètre* (de μανὸς, rare, peu dense, et μέτρον, mesure), un instrument spécial, employé en physique et dans l'industrie pour mesurer la *pression* des gaz et la *tension* des vapeurs, pris dans des conditions quelconques.

L'unité de mesure pour les pressions ou tensions est l'*atmosphère* telle que nous l'avons définie ci-dessus, c'est-à-dire la pression atmosphérique *normale* qui correspond à la hauteur barométrique de 76 centimètres. On a vu (194) que cette pression est égale à $1^{kg},033$ par centimètre carré; par conséquent, si l'on dit

d'un gaz qu'il a une tension de 2 ou de 3 atmosphères, cela signifie que sa force élastique ferait équilibre au poids d'une colonne de mercure de 2 fois ou 3 fois 76 centimètres de hauteur; ou, en d'autres termes, qu'il exerce sur chaque centimètre carré des parois de son récipient une pression égale à 2 ou 3 fois $1^{kg},033$.

On construit trois sortes de manomètres, d'après trois principes bien distincts :

1° Les *manomètres à air libre*, dans lesquels la force élastique à mesurer est équilibrée directement par une colonne de mercure ou d'un autre liquide, qui s'élève plus ou moins haut dans un tube ouvert : les grandes branches des appareils de Dulong (226) et de Regnault (227) sont des types de manomètres à air libre;

2° Les *manomètres à air comprimé*, dans lesquels la force élastique à mesurer est équilibrée par celle d'une masse d'air comprimée en vase clos et prise pour terme de comparaison;

3° Les *manomètres métalliques*, dans lesquels la force élastique à mesurer est équilibrée par l'élasticité d'un ressort circulaire qui s'enroule ou se déroule plus ou moins, comme celui du baromètre de Bourdon.

A un autre point de vue, on peut classer ces instruments en *manomètres de précision*, qui servent dans les recherches de laboratoire, et *manomètres industriels*, qui sont employés à divers usages dans l'industrie. Parmi les premiers nous décrirons :

Les *manomètres de Regnault;*

Le *manomètre différentiel de Kretz;*

Le *manomètre de M. Cailletet.*

Ce sont tous des *manomètres à air libre.*

Comme manomètres industriels, nous décrirons :

Le *manomètre ordinaire à air libre*, qui sert pour des pressions peu élevées ; le *manomètre de Desgoffe*, autre modèle du manomètre à air libre, qui peut servir commodément jusqu'à de hautes pressions; puis divers modèles de *manomètres à air comprimé;* enfin le *manomètre de Bourdon*, qui est le plus ancien et le plus usuel des manomètres métalliques.

231. **Manomètres de Regnault**. — Dans ses recherches sur la compressibilité et sur la dilatation des gaz, Regnault a employé trois modèles de manomètres *de précision.*

1° *Grand manomètre à air libre.* — Le plus grand de tous fut le manomètre à air libre qui fait partie de son grand appareil (fig. 250) : il peut servir à mesurer les pressions jusqu'à 27 atmosphères environ.

2° *Petit manomètre à air libre.* — Un autre modèle de manomètre à air libre lui a servi pour les pressions qui ne dépassent

pas 3 atmosphères. Il se compose de deux larges tubes en verre, A et B (fig. 251), mastiqués dans les branches A′ et B′ d'une pièce en fonte, deux fois recourbée à angle droit, creusée d'un canal intérieur et munie d'un robinet R à trois voies. L'ensemble

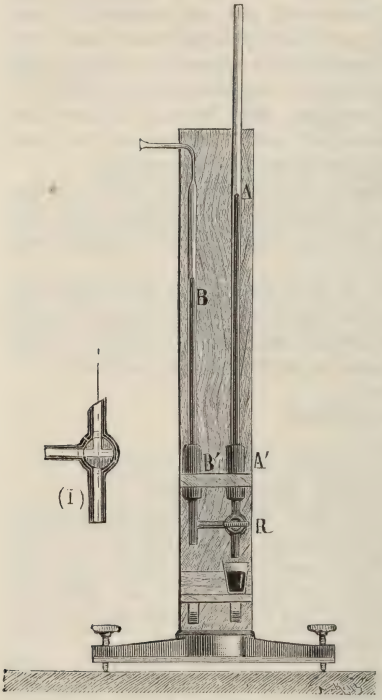


Fig. 251.

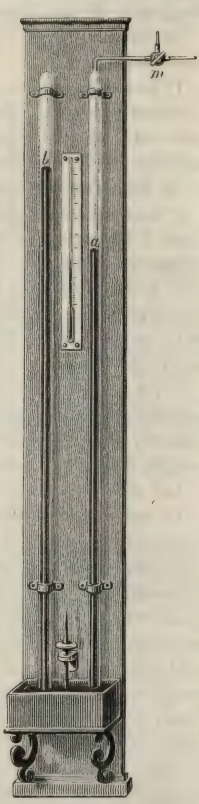


Fig. 252.

forme donc un système de vases communicants dans lesquels on peut verser du mercure. Le grand tube est ouvert librement à l'air ; le tube court, B, peut se relier, à l'aide d'un collier à gorge, avec le récipient à gaz où l'on veut mesurer la pression. Quand cette communication est établie, le robinet étant dans la position

normale (figurée en I), la pression du gaz se transmet au mercure de la grande branche : le niveau monte en A, tandis qu'il baisse en B; la différence de ces niveaux, h_0 (réduite à 0°), augmentée de la hauteur barométrique actuelle (également réduite à 0°), mesure exactement la force élastique du gaz. On a

$$F = h_0 + H_0.$$

On détermine h_0 soit à l'aide d'échelles en millimètres tracées sur les tubes mêmes, soit, pour plus de précision, par des lectures au cathétomètre.

Tout l'appareil est fixé sur une planchette verticale, qui est posée sur un pied à vis calantes. On verra plus loin, à propos du voluménomètre (240), les usages du robinet à trois voies.

3° *Manomètre barométrique* ou *baromètre différentiel.* — Pour mesurer les faibles tensions, Regnault a adopté un manomètre qui est une modification de son baromètre normal. A côté du tube barométrique est fixé un second tube *a* d'égal diamètre, plongeant dans la même cuvette (fig. 252). Ce tube, ouvert à ses deux bouts, est en communication à sa partie supérieure avec une tubulure à trois branches *m* munie d'un robinet à trois voies, par où il est mis en rapport avec le récipient qui contient le gaz à faible tension. Plus la raréfaction est poussée loin dans celui-ci, plus le mercure s'élève dans le tube *a*, et c'est la différence de niveau dans les tubes *b* et *a* qui fait connaître la tension. Il n'y a donc qu'à mesurer la hauteur *ab* à l'aide du cathétomètre pour avoir avec précision la force élastique du gaz.

Cet appareil se désigne sous le nom de *baromètre différentiel*, à cause de sa forme, et sous celui de *manomètre différentiel*, à cause de son usage.

232. **Manomètres à liquides moins denses que le mercure.** — Pour la mesure des faibles pressions il y a intérêt à substituer au mercure, dans les manomètres à air libre, un liquide moins dense, pourvu que ce liquide n'émette pas de vapeurs sensibles à la température ordinaire. En prenant l'acide sulfurique, qui satisfait à ces conditions et qui est environ 7 fois 1/2 moins dense que le mercure, une variation de pression sera accusée par une colonne liquide 7 fois 1/2 plus haute que le mercure : on aura un instrument *sept fois et demie plus sensible* que le manomètre ordinaire, ou qui permettra d'évaluer, *avec une égale précision*, des pressions *sept fois et demie moins fortes.*

Avec un manomètre à eau, on aurait une sensibilité 15 fois 1/2 plus grande.

233. **Manomètre différentiel de M. Kretz.** — *Principe.* — C'est un manomètre de précision, à air libre, construit avec deux liquides qui sont tous les deux à peu près de même densité et tous les deux beaucoup moins lourds que le mercure. La sensibilité de cet instrument est environ 29 fois plus grande que celle d'un manomètre ordinaire à eau ; nous allons démontrer que, en gé-

néral, cette sensibilité varie à peu près *en raison inverse de la différence des densités des deux liquides manométriques.*

Description. — Ce manomètre se compose essentiellement d'un tube deux fois recourbé à angle droit, qui se termine par deux cuvettes cylindriques A et B ayant une même section, beaucoup plus grande que celle du tube. Il est rempli d'un côté en A avec de l'eau alcoolisée et colorée en rouge à l'orseille et de l'autre avec de l'essence de térébenthine. Ce dernier liquide se superpose au premier, sans s'y mêler aucunement, de sorte que la surface de séparation des deux liquides est parfaitement nette, comme on le voit en n, dans la figure schématique 253.

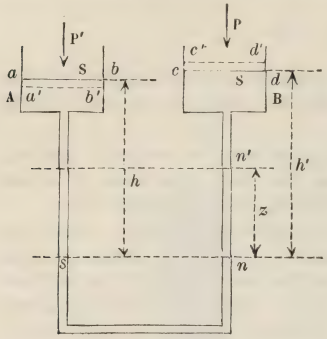


Fig. 253.

Usage. — Lorsque les pressions exercées sur les deux surfaces libres sont égales, celles-ci ne se trouvent pas sur le même plan horizontal. Les hauteurs h et h' au-dessus du plan de la surface de séparation n des deux liquides sont différentes, mais elles sont liées par la relation connue

$$[1] \qquad hD = h'D',$$

D et D' étant les poids spécifiques des deux liquides.

Si la pression en A devient supérieure à la pression en B, le niveau s'abaisse en A pour s'élever en B de la même quantité, et la surface de séparation se déplace jusqu'en n'. C'est cette distance $nn' = z$ qui mesure la variation de pression.

Théorie. — Cette variation de niveau z est facile à constater et permet d'évaluer aisément la différence des pressions P' et P qui s'exercent en A et A'. La sensibilité de l'instrument est évidemment caractérisée par la grandeur de z. Or nous allons démontrer qu'*elle est proportionnelle à* (P — P') *et inversement proportionnelle à* (D' — D), à la condition de négliger la variation de niveau dans les deux cuvettes.

Remarquons d'abord que les variations de niveau dans les cuvettes sont à la variation de niveau z dans le rapport inverse des sections S et s. Si donc on appelle y la distance des niveaux ab et $a'b'$, ou bien la distance des niveaux cd et $c'd'$ qui est égale à la précédente, on aura

$$\frac{y}{z} = \frac{s}{S}, \qquad \text{d'où} \qquad y = z\,\frac{s}{S}.$$

Écrivons maintenant que la pression est la même en deux points du plan horizontal mené par la surface de séparation finale n'. Du côté de A, la pression sur l'unité de surface est

$$P' + \left(h - z - \frac{s}{S}z\right)D;$$

du côté de B elle est

$$P + \left(h' - z - \frac{s}{S}z\right)D'.$$

On a donc l'équation

$$P' + \left(h - z - \frac{s}{S} z\right) D = P + \left(h - z + \frac{s}{S} z\right) D'.$$

En supprimant de part et d'autre les produits hD et $h'D'$ qui sont égaux, et en résolvant par rapport à z, il vient

$$[1] \qquad z = \frac{P' - P}{D - D' + \frac{s}{S}\left(D + D'\right)};$$

et, si la fraction $\frac{s}{S}$ est suffisamment petite pour qu'on néglige le second terme du dénominateur, — ce qui est parfaitement légitime dans la pratique, — il vient

$$[2] \qquad z = \frac{P' - P}{D - D'}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — C'est la formule [1] qui s'applique rigoureusement au cas du manomètre de M. Kretz. Dans les conditions ordinaires, on a

$$D = 0{,}899 \text{ et } D' = 0{,}869, \quad \text{d'où} \quad D - D' = 0{,}030 \text{ et } D + D' = 1{,}768;$$

le diamètre commun aux deux cuvettes est 15 centimètres et celui des tubes 7 millimètres ; d'où

$$\frac{s}{S} = 0{,}00217.$$

En substituant ces nombres dans la formule [1], il vient

$$z = \frac{P - P'}{0{,}030 + 0{,}00217 \times 1{,}765} = 29\,(P - P');$$

donc, même si la différence des pressions était évaluée en colonne d'eau, la variation de niveau serait ici encore 29 fois plus grande : c'est ce que nous avions annoncé ci-dessus.

234. **Manomètre à air libre ordinaire.** — C'est le premier et le plus simple des manomètres industriels : c'est celui qui a servi de modèle aux manomètres de précision de Regnault.

Description. — Cet instrument consiste en un tube de cristal ouvert, communiquant librement avec l'atmosphère par son bout supérieur et soudé par l'autre à la partie inférieure d'un réservoir A, à grand diamètre. Celui-ci est mis en communication, par un tube C plus étroit, avec le récipient fermé qui contient le gaz ou la vapeur dont on veut mesurer la tension. Le réservoir A est rempli de mercure, et le tout est fixé sur une longue planchette qu'on installe verticalement. Tantôt le réservoir A est un cylindre de verre (fig. 254), qui fait suite au tube droit, comme le réservoir d'un baromètre à siphon; tantôt c'est une cuvette en fonte, à moitié pleine de mercure (fig. 255), dans lequel le tube manomé-

trique *b* plonge directement, comme le tube d'un baromètre ordinaire; le gaz ou la vapeur pénètre alors par un ajutage *a*, et vient exercer sa pression à la surface libre du mercure.

Graduation. — Pour graduer le manomètre, on laisse l'orifice C communiquer avec l'atmosphère, et, au niveau où le mercure s'arrête alors dans le tube de cristal, on marque le chiffre 1, qui indique 1 atmosphère; puis à partir de ce point, de 76 en 76 centimètres, on marque les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, qui indiquent 2, 3, 4,... atmosphères. On partage enfin chacun des intervalles de 1 à 2, de 2 à 3..., à droite du tube, en 10 parties égales, qui donnent les dixièmes d'atmosphère. Les nombres à gauche donnent les pressions en centimètres de mercure.

Usage. — Le tube C étant ensuite mis en communication, par exemple, avec une chaudière à vapeur, le mercure s'élève dans le tube BD à une hauteur qui mesure la tension de la vapeur. Dans le dessin, le manomètre marque 2 atmosphères, qui sont représentées par la hauteur 76 centimètres augmentée de la pression atmosphérique qui s'exerce au sommet de la colonne par l'orifice.

Fig. 254.

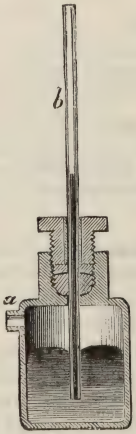


Fig. 255.

Remarques. — 1° On voit qu'on néglige complètement les variations du niveau dans la cuvette. Ce n'est donc pas *un instrument de précision* comme le baromètre.

2° Le manomètre à air libre n'est en usage que pour des pressions qui ne dépassent pas 5 à 6 atmosphères. Au delà, il faudrait donner au tube BD une longueur qui le rendrait embarrassant. On en a vu des exemples dans les appareils de Dulong et de Regnault.

3° *Manomètre à flotteur.* — Lorsque cet instrument doit servir pour de fortes pressions, le tube droit devient très haut, et il n'est pas commode d'aller noter à chaque expérience la hauteur du niveau mercuriel. On a vu que Regnault avait été obligé d'imaginer un dispositif compliqué (une sorte d'*ascenseur*), pour

faire ces lectures. On pourra les rendre très faciles, si l'on ne craint pas d'en diminuer la précision. Il suffira, pour cela, d'établir sur le niveau mercuriel un flotteur p, qui en suivra tous les mouvements (fig. 256) et qui les transmettra, par l'intermédiaire d'un cordon et d'une poulie, à un index p' : ce dernier se déplacera de haut en bas, et reportera les indications à une hauteur d'autant plus convenable que les pressions seront plus fortes.

235. **Manomètre Desgoffe**. — L'artifice mécanique du manomètre à flotteur ne peut guère s'appliquer au delà de 5 ou 6 atmosphères. Pour les pressions très élevées, M. Desgoffe a employé un autre dispositif, bien plus intéressant, parce qu'il est une application du principe de Pascal, au même titre que la *presse hydraulique*, mais en quelque sorte *en sens inverse*.

Principe de l'instrument. — Soit P la valeur, par centimètre carré, de la pression à mesurer. Au lieu de faire agir directement cette pression sur le niveau mercuriel dans la cuvette du manomètre de Desgoffe (lequel est un manomètre à air libre), on la fait agir sur la face supérieure a d'un piston plein dont la face inférieure A repose elle-même sur le mercure (fig. 257). Or, tandis que la section s de la tête du piston est très petite, la section S de sa base est très large : il en résulte que la pression transmise au mercure, par unité de surface, ne sera plus qu'une fraction de P, égale à $P\frac{s}{S}$. Si donc la colonne de mercure nécessaire pour faire équilibre à P eût été H, la colonne qui fera équilibre à la pression $P\frac{s}{S}$ sera $h = H\frac{s}{S}$. Si, par exemple, $S = 100\,s$, on pourra équilibrer et mesurer une pression de 500 *atmosphères* avec une colonne de mercure égale seulement à cinq fois $0^m,76$, c'est-à-dire à $3^m,80$.

Détails de construction. — La tête du piston est un cylindre d'acier a qui se meut dans un cylindre de bronze, d'où il sort en traversant un cuir embouti (fig. 258) ; la base du piston est formée par un large disque métallique A, qui ferme complètement la courte branche du manomètre. Un disque en caoutchouc est interposé entre le disque et le mercure, dont il est séparé lui-même par une légère couche d'eau.

Le diamètre de la courte branche est tellement grand par rapport à celui de la longue branche, que lorsque le mercure s'élève jusqu'à $4^m,30$ dans celle-ci, il ne s'abaisse que de 1 cinquième de millimètre dans celle-là (expériences de M. Cailletet).

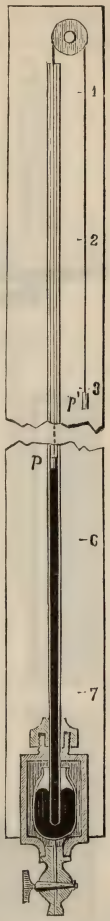


Fig. 256.

236. **Manomètres à air comprimé.** — *Définition et principe.* — Les manomètres à air comprimé appartiennent à la fois à la catégorie des manomètres industriels, à cause de leurs usages, et à celle des manomètres de précision, à cause de leur mode de graduation, qui est susceptible d'une grande exactitude. Le tube qui renferme le gaz dans les expériences de Dulong et Arago (226) représente un manomètre à air comprimé que l'on gradue par comparaison avec le manomètre à air libre.

Nous avons vu que dans les manomètres à air libre la tension se mesure par la hauteur de la colonne liquide à laquelle elle fait équilibre. Dans les *manomètres à air comprimé*, elle se mesure par la réduction de volume qu'elle fait subir à une masse donnée d'air. Ces instruments sont donc une application directe de la loi de Mariotte.

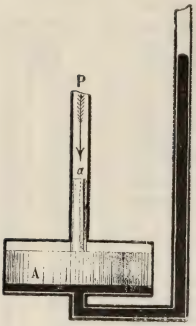


Fig. 257.

Description. — Ils se réduisent tous essentiellement à la petite branche, plus ou moins allongée, du *tube de Mariotte*.

Le tube manométrique, qui n'a ici que 60 à 80 centimètres de longueur, est fermé à sa partie supérieure et rempli d'air; par sa partie inférieure, il plonge dans un bain de mercure. Tantôt ce mercure est contenu dans une cuvette cylindrique en fer (analogue à celle du manomètre ordinaire à air libre) où le tube descend tout droit (fig. 259); tantôt le mercure est simplement contenu dans un autre tube en verre, relié au précédent par une courbure en forme de siphon (fig. 260). Dans le premier cas, le réservoir à mercure porte, en haut, un orifice dans lequel est solidement mastiqué le tube manométrique, et latéralement une tubulure A′ (fig. 259) par où l'on établit la communication avec le gaz ou la vapeur dont on doit déterminer la tension. Dans le cas du tube en siphon, la petite branche est est munie latéralement d'une tubulure à robinet et à vis qu'on peut visser directement sur le récipient à gaz ou à vapeur.

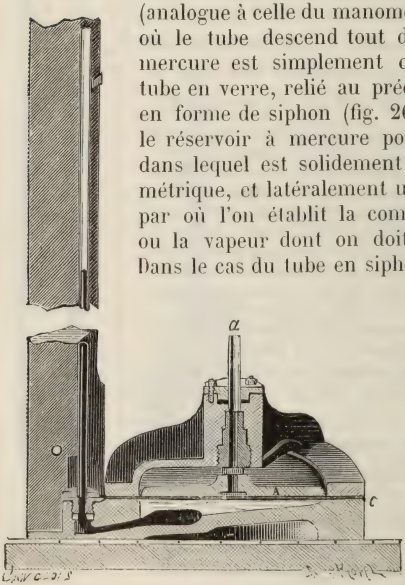


Fig. 258.

Graduation pratique. — On gradue empiriquement ce manomètre en comparant sa marche à celle d'un manomètre à air libre d'une hauteur suffisante. Pour cela, ayant réglé la quantité d'air dans le tube de manière qu'à la pression d'une

atmosphère le niveau du mercure y soit le même que dans le réservoir, on fait communiquer l'instrument, en même temps que le manomètre à air libre auquel on veut le comparer, avec un récipient dans lequel on comprime de l'air au moyen d'une pompe foulante. Le mercure s'élève alors simultanément dans les deux instruments : à mesure que le manomètre à air libre marque 1, 2, 3... atmosphères, on inscrit les mêmes nombres, au niveau du mercure, sur une échelle placée le long du tube manométrique. L'instrument se trouve ainsi gradué avec exactitude, que le tube soit ou non bien calibré.

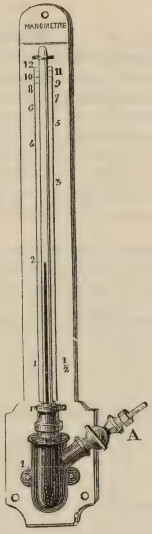


Fig. 259.

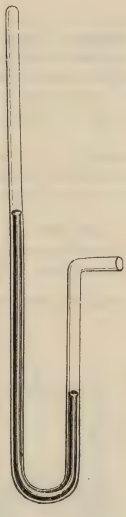


Fig. 260.

Inconvénients des manomètres à air comprimé. — Le manomètre à air comprimé, ainsi gradué, est aussi exact, du moins au début, qu'un manomètre à air libre, et d'un usage plus commode, à cause de ses faibles dimensions. Mais à la longue le verre s'encrasse, perd de sa transparence, et les lectures manométriques deviennent difficiles à faire exactement. De plus, il arrive fréquemment que le mercure s'oxyde dans la chambre à air, de sorte que le volume de l'air se trouve réduit, et que l'instrument marque des pressions plus fortes que celles des gaz ou vapeurs auxquels on le soumet.

Graduation théorique. — On pourrait aussi le graduer par le calcul, en supposant que le tube ait partout le même diamètre. Il y a trois cas à considérer : celui où l'on tient compte de l'abaissement du mercure dans le réservoir quand ce liquide s'élève dans le tube manométrique, celui où l'on suppose le niveau constant dans le réservoir, et celui où le manomètre consiste en un simple tube recourbé.

1° *Le diamètre du réservoir n'est pas assez grand pour que la dépression du mercure puisse être négligée.* Soit F la pression transmise par le tube A (fig. 259) au mercure du réservoir, x' la dépression dans celui-ci, R son rayon intérieur, r celui du tube manométrique, h la hauteur de ce dernier à partir du point où le niveau est le même dans le réservoir et dans le tube, et enfin x la hauteur à laquelle le mercure s'élève dans le manomètre par l'effet de la pression F.

Au début, quand la pression extérieure était d'abord de 1 atmosphère, le

volume occupé par l'air dans le tube manométrique pouvait être représenté par h; mais, la pression extérieure devenant F, le volume d'air se réduit à $h - x$ et acquiert une tension f, qu'on calcule d'après la loi de Mariotte, en posant

[1] $$f(h - x) = 76h,$$

d'où

$$f = \frac{76h}{h - x}.$$

De plus, l'ascension x et la dépression x' étant en raison inverse des sections du tube et du réservoir, ou, ce qui est la même chose, en raison inverse des carrés des rayons de ces mêmes sections, on a

[2] $$\frac{x'}{x} = \frac{r^2}{R^2},$$

d'où

$$x' = \frac{r^2 x}{R^2}.$$

Cela posé, la différence des niveaux dans le tube et dans le réservoir étant actuellement $x + x'$, la tension F fait équilibre à une colonne de mercure $x + x'$, plus à la force élastique de l'air comprimé dans le tube, laquelle on a trouvée ci-dessus égale à $\frac{76h}{h - x}$. On a donc l'équation d'équilibre

$$F = x + x' + \frac{76h}{h - x}.$$

En remplaçant x' par sa valeur et réduisant, il vient

[3] $$F = \frac{(R^2 + r^2)x}{R^2} + \frac{76h}{h - x}.$$

Faisant successivement $F = 76, 2 \times 76, 3 \times 76\ldots$ dans cette équation, et la résolvant par rapport à x, on trouve les hauteurs auxquelles il faut inscrire sur le tube manométrique les nombres 1, 2, 3... atmosphères.

Remarque. — L'équation [3], étant du second degré, fournit deux valeurs pour x; mais celle qui est formée avec la valeur positive du radical ne satisfait pas à la question, car si l'on y fait $F = 76$, valeur qui devrait donner $x = 0$, cela n'a pas lieu. On ne doit donc prendre que la racine dont le radical est négatif. Même remarque pour les équations [4] et [5] ci-après.

2° Dans le cas où R est assez grand par rapport à r pour qu'on puisse négliger la fraction $\frac{r^2}{R^2}$ par rapport à l'unité, le terme $\left(\frac{R^2 + r^2}{R^2}\right)x$ ou $\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)x$, se réduit à x, et l'équation [3] prend la forme

[4] $$F = x + \frac{76h}{h - x}.$$

Résolue par rapport à x, elle fournit les deux racines

$$x' = \frac{(F + h) + \sqrt{(F + h)^2 - 4h(F - 76)}}{2},$$

$$x'' = \frac{(F + h) - \sqrt{(F + h)^2 - 4h(F - 76)}}{2}.$$

La seconde racine est seule admissible. Si l'on y fait F successivement égal à $0^m,76$, $2 \times 0^m,76$, etc., elle donne, comme ci-dessus, les hauteurs auxquelles doivent être inscrits les nombres 1, 2, 3....

3° Enfin, si le manomètre consiste simplement en un tube recourbé, fermé à son extrémité supérieure et contenant du mercure (fig. 260), on a $R = r$, et l'équation devient

$$[5] \qquad F = 2x + \frac{76\,h}{h - x}.$$

237. **Manomètre à sensibilité constante.** — Il résulte de l'un ou de l'autre de ces modes de graduation que *la sensibilité* du manomètre à air comprimé *va en décroissant quand la pression augmente :* c'est-à-dire que, *pour une même réduction de volume de l'air, l'accroissement de la pression extérieure est d'autant plus grand que cette pression est elle-même plus grande.* C'est là le principal inconvénient de l'appareil manométrique employé par Dulong et Arago : nous l'avons signalé et expliqué ci-dessus (227, 2°).

On peut déterminer par le calcul quelle doit être la forme du tube manométrique pour que l'instrument *ait une sensibilité constante*, c'est-à-dire pour que la variation de niveau du mercure soit exactement proportionnelle

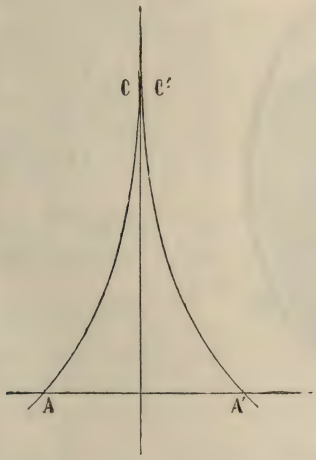


Fig. 261.

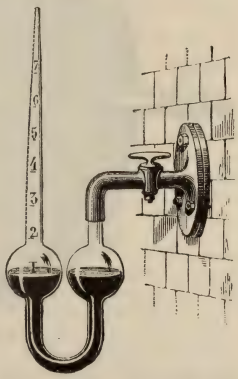


Fig. 262.

à la variation de pression extérieure. On trouve que ce doit être une surface de révolution ayant pour méridienne (fig. 261) une branche d'hyperbole équilatère CA dont l'axe même $O\omega$ du tube est l'une des asymptotes.

Dans la pratique, on se rapproche des conditions théoriques en effilant plus ou moins le tube manométrique. La figure 262 représente un des manomètres à tube conique qu'on substitue avantageusement aux manomètres ordinaires à tube cylindrique.

238. **Manomètres métalliques. — Manomètre de Bourdon.** Les manomètres à air comprimé, qui constituent un gra progrès, au point de vue pratique et industriel, sur les man mètres à air libre, sont encore beaucoup trop fragiles et peuve occasionner des accidents. Aussi est-il presque impossible les employer sur les machines à vapeur mobiles. Les man mètres industriels par excellence sont les *manomètres métallique* qui sont des instruments sans mercure, entièrement méta liques, très portatifs, peu embarrassants et d'un prix relativ ment très bas.

Le premier de ces instruments est dû à Bourdon, et c'est enco le plus employé[1].

Principe. — Il est fondé, comme le baromètre anéroïde, sur l déformation qu'éprou vent les tubes par l pression. Lorsqu'un tub à parois flexibles et légè rement aplaties sur elles mêmes est enroulé e spirale, dans le sens d son plus petit diamètre *toute pression intérieur sur les parois a pour effe de dérouler le tube, et au contraire, toute pres sion extérieure a pou effet de l'enrouler davan tage.*

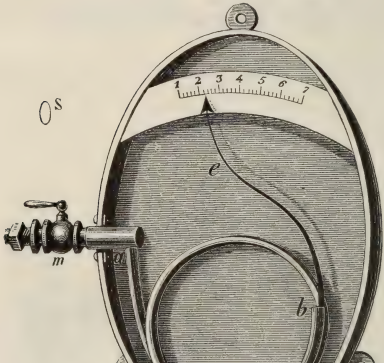


Fig. 263.

Description. — L'instrument se compose d'un tube de laiton long de $0^m,70$, à parois minces et flexibles (fig. 263) et recourbé en hélice sur une longueur d'une spire et demie. Sa section, qui est représentée en S sur la gauche de la figure, est une ellipse dont le grand axe est de 11 millimètres et le petit de 4. L'extrémité *a*, qui est ouverte, est fixée à une tubulure à robinet *m*, destinée à mettre l'appareil en communication avec une chaudière à vapeur. L'extrémité *b* est fermée et libre, ainsi que tout le reste du tube.

Usage. — Le robinet *m* étant ouvert, la pression que la vapeur

1. On se sert aussi d'un autre modèle récemment construit par Ducornet.

exerce sur les parois intérieures du tube le force à se dérouler. L'extrémité *b* est alors entraînée de gauche à droite, et avec elle une longue aiguille *e*, qui marque sur un cadran la tension en atmosphères.

Graduation. — Ce cadran est gradué par comparaison avec un manomètre à air libre. Cette opération s'effectue comme pour le manomètre à air comprimé.

On peut aussi le graduer en vue de la mesure des hautes pressions de plusieurs centaines d'atmosphères, dont les expériences de M. Cailletet ont généralisé l'emploi. Pour cela, on met le manomètre métallique en communication directe avec une presse hydraulique qui exerce des pressions croissantes. Celles-ci sont évaluées directement au moyen des poids dont il faut charger une soupape pour qu'elle se soulève : on n'a qu'à inscrire les valeurs de ces pressions en face des positions correspondantes que prend l'aiguille sur son cadran.

Inconvénients des manomètres métalliques. — Nous avons indiqué ci-dessus les avantages de ce genre d'instruments ; mais ils ont l'inconvénient de devenir rapidement et de plus en plus inexacts. Les pièces métalliques qui les constituent subissent, sous l'action des vapeurs chaudes, des altérations dans leur élasticité, qui en faussent les indications. Il est donc indispensable d'en refaire la graduation de temps en temps.

239. **Manomètres de M. Cailletet.** — Dans ses expériences sur la compression et la liquéfaction des gaz, M. Cailletet a employé des manomètres spéciaux, capables de mesurer de très hautes pressions avec une approximation relativement très grande. Voici l'un des types qu'il a créés. Nous le citons de préférence, parce qu'il est fondé sur un tout autre principe que les appareils précédents[1].

L'instrument est constitué par un réservoir cylindrique R en verre, muni d'une tige divisée *t*, et rempli d'un liquide coloré ou bien de mercure, comme un thermomètre (fig. 264). Or, si l'on soumet un récipient en verre de cette forme à des pressions croissantes, les diminutions de volume que subit le réservoir sont exactement proportionnelles aux accroissements de pression. M. Cailletet a vérifié ce fait par des expériences directes, jusqu'aux pressions indiquées par un manomètre à air libre dont la grande branche n'avait pas moins de 70 mètres de longueur. La tige du manomètre ayant été graduée par ces expériences préalables, on n'a plus qu'à l'installer dans une sorte de récipient en acier A, qui est mis en communication par une tubulure latérale *a* avec la presse hydraulique ou le récipient où il s'agit de mesurer la pression.

240. **Voluménomètre.** — Cet appareil, imaginé par Say, en 1797, et perfectionné par Regnault, est une ingénieuse application de la loi de Mariotte. Il a longtemps servi pour déterminer la densité des corps pulvérulents, tels que les poudres de guerre et de chasse, qu'on ne pourrait mouiller sans les décomposer.

1. Voir dans la *Physique* de Violle, t. Ier, un autre type de manomètre très intéressant, dû à M. Cailletet, le *manomètre à soupape*.

Description. — La poudre est enfermée dans un ballon B (fig. 265), qui est adapté, à l'aide d'un collier à gorge, à une garniture métallique à deux branches. L'une d'elles, t, est munie d'un robinet r qui permet de faire communiquer l'intérieur du ballon avec l'atmosphère; l'autre, t', relie le ballon, d'une

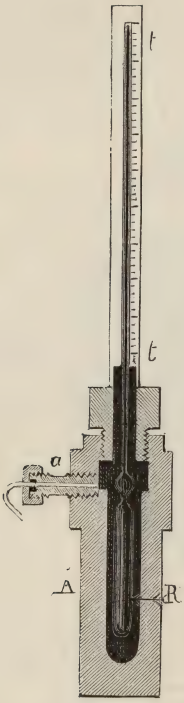


Fig. 264.

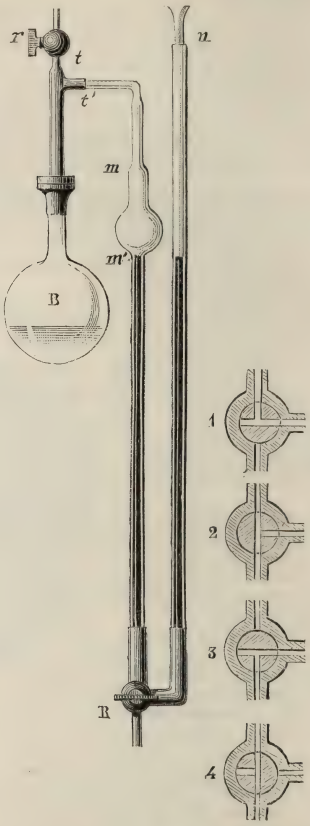


Fig. 265.

manière permanente, avec le tube en verre $m\ m'$ R n, qui est une espèce de manomètre à air libre. Les branches m et n sont réunies à l'aide d'une garniture métallique, munie d'un *robinet à trois voies.*

Ce robinet, qui a été imaginé par Regnault et qui se retrouve dans tous ses appareils, est d'un usage très commode. Suivant qu'on le tourne dans l'une des

positions 1, 2, 3, 4, on fait communiquer les deux branches m et n seulement entre elles, ou bien on les fait communiquer entre elles et avec l'extérieur, ou bien la branche n toute seule avec l'extérieur, ou bien la branche mm' toute seule avec l'extérieur (fig. 265, 1, 2, 3, 4).

Opération. — On se donne le poids p de la poudre et l'on détermine son volume u. — 1° Le corps étant introduit dans le ballon, on verse du mercure par la branche ouverte jusqu'à ce que les niveaux arrivent sur la ligne horizontale du trait de repère m'. On a alors confiné une certaine masse d'air, occupant, à la pression atmosphérique H du moment, un volume égal à $(V + v - u)$, V étant la capacité du ballon et du tube jusqu'au trait m et v la capacité du renflement mm'. — 2° On verse une nouvelle quantité de mercure jusqu'à élever le niveau en m : alors le niveau dans l'autre branche dépasse le repère m d'une hauteur h qui mesure l'excès de pression correspondant à la réduction de volume subie par la masse de gaz. Celle-ci occupe maintenant un volume $V - u$, à la pression $H + h$. En appliquant la loi de Mariotte, on a

$$[1] \qquad (V - u)(H + h) = (V + v - u)H.$$

C'est une équation du premier degré, d'où il est facile de tirer u, en fonction de H, h et du rapport $\frac{v}{V}$. Celui-ci se détermine en répétant la même opération *à blanc*, c'est-à-dire sans introduire de poudre dans le ballon, ce qui donne l'équation

$$V(H + h') = (V + v)H,$$

ou

$$[2] \qquad \left(H + h'\right) = \left(1 + \frac{v}{V}\right)H.$$

Connaissant p et u, on a immédiatement le poids spécifique D, par la formule $D = \frac{p}{u}$.

Remarque. — Cet appareil, malgré sa simplicité et son exactitude apparente, n'est plus employé, parce qu'on a constaté que *les corps pulvérulents absorbent des quantités de gaz plus ou moins grandes, suivant les pressions de ces gaz :* la loi de Mariotte ne peut donc plus s'appliquer dans ce cas. On détermine plus rigoureusement le volume d'un certain poids de poudre en évaluant le poids de mercure qu'elle déplace, après qu'on l'a préalablement purgée, dans le vide, des gaz qu'elle avait condensés (172, 3°).

CHAPITRE IV

EXPANSIBILITÉ DES GAZ

DIFFUSION ET DISSOLUTION.

241. **Mélange des gaz** ou **Diffusion**. — 1° *Définition du phénomène.* — Par suite de leur expansibilité, les gaz mis en contact, au

lieu de se séparer, comme les liquides, par ordre de densités, se mélangent d'eux-mêmes intimement, et restent indéfiniment mélangés, même quand ils n'exercent aucune action chimique réciproque. C'est en cela que consiste le phénomène de la *diffusion des gaz.*

Expérience de Berthollet. — Ce phénomène a été mis en évidence pour la première fois par le chimiste français Berthollet, à l'aide d'une expérience célèbre. Il prit deux ballons de verre (fig. 266) munis chacun d'une douille à robinet qui permettait de les visser l'un sur l'autre ; il les remplit de gaz bien desséchés, l'un d'hydrogène dont la densité est 0,0692, et l'autre d'acide carbonique dont la densité est 1,529, c'est-à-dire 22 fois plus grande ; enfin il les plaça, le premier au-dessus du deuxième, dans les caves de l'Observatoire, pour les préserver de toute agitation et des variations de température. Les robinets ne furent ouverts qu'au bout d'un certain temps, afin de laisser préalablement les deux gaz se mettre en équilibre de température avec le milieu ambiant. Après une communication de plusieurs heures, les ballons furent séparés, et l'on trouva : 1° que *chacun d'eux contenait des proportions égales d'hydrogène et d'acide carbonique;* 2° que *la pression du mélange gazeux dans chaque ballon était égale à la pression initiale.*

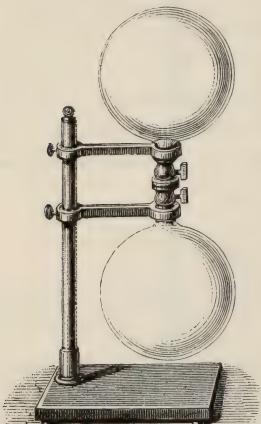


Fig. 266

En soumettant à la même épreuve tous les gaz qui n'ont pas entre eux d'action chimique, on obtient le même résultat. L'expérience fait voir, en outre, qu'*une fois mélangés, les gaz ne se séparent plus, quelle que soit la différence de leurs densités, et que plus celle-ci est grande, plus leur diffusion réciproque est prompte : c'est le gaz le plus pesant qui est le moins diffusible.* L'hydrogène, par exemple, se diffuse dans une direction descendante environ cinq fois plus vite que l'acide carbonique dans une direction ascendante.

242. **Lois du mélange des gaz.** — Tous ces faits généralisés sont renfermés dans les deux lois suivantes :

1° *Les gaz entre lesquels il n'y a pas d'action chimique se mélan-*

gent plus ou moins rapidement et d'une manière intime et permanente.

2° La température restant constante, *la force élastique finale du mélange de plusieurs gaz est égale à la somme des forces élastiques qu'aurait chacun d'eux s'il occupait seul le volume total.*

Vérification. — Ces deux lois sont vérifiées par l'expérience même de Berthollet. Cela est évident pour la première loi. Quant à la deuxième, il suffit de remarquer que, la pression initiale de chaque gaz étant H sous le volume v d'un seul ballon, la pression finale qu'aurait chacun d'eux s'il occupait seul la capacité $2v$ des deux ballons, serait $\frac{H}{2}$: la somme de ces deux pressions est bien H, ainsi que Berthollet l'a constaté.

Vérification générale. — La deuxième loi peut se vérifier sous sa forme générale. Soient v, v', v'' les volumes de trois masses de gaz sans action chimique les uns sur les autres, f, f', f'' leurs tensions respectives, et V le volume du vase dans lequel on les mélange. Le premier gaz, passant du volume v au volume V, acquiert une élasticité x qui, d'après la loi de Mariotte, est égale à $\frac{fv}{V}$. De même la tension du second gaz devient $\frac{f'v'}{V}$, et celle du troisième $\frac{f''v''}{V}$. En représentant par F la somme de ces trois forces élastiques, on a

$$[1] \qquad F = \frac{fv + f'v' + f''v''}{V};$$

telle doit donc être aussi, d'après la deuxième loi, la force élastique du mélange. Or faisons passer les trois gaz sous une cloche graduée pleine de mercure, assez grande pour qu'ils ne la remplissent pas tout à fait; en représentant par h la hauteur du mercure qui reste encore dans la cloche après l'introduction des gaz, et par H la hauteur barométrique au moment de l'expérience, $H - h$ sera la tension du mélange sous la cloche. Or, *la température restant constante,* on observe toujours que la valeur de $H - h$ est la même que celle de F obtenue par la formule [1] ci-dessus, ce qui vérifie la loi.

Dans le cas où $f = f' = f''$ et où $V = v + v' + v''$, on a

$$F = \frac{f(v + v' + v'')}{v + v' + v''} = f,$$

c'est-à-dire que la pression du mélange est la même que celle des gaz avant d'être mélangés; c'est ce qui avait lieu dans l'expérience de Berthollet.

Autre expression analytique de la seconde loi. — En chassant le dénominateur dans l'équation [1], elle devient

$$[2] \qquad FV = fv + f'v' + f''v'' = \sum (fv).$$

Sous cette forme, qui est la plus commode pour les applications de calcul, cette loi rappelle la loi de Mariotte, dont elle est une conséquence. Elle ne s'applique d'ailleurs au mélange de plusieurs gaz que *dans les limites de pression* où la loi de Mariotte s'appliquerait à chacun d'eux.

Remarque. — La diffusion des gaz contribue puissamment à entretenir la pureté de l'air dans l'atmosphère et dans nos habitations, en dispersant au loin les gaz nuisibles à l'économie animale.

243. **Dissolution** ou **Absorption des gaz par les liquides.** — *Définition du phénomène.* — L'eau et plusieurs liquides sont doués de la propriété de se laisser pénétrer par les gaz : c'est en cela que consiste le phénomène de la *dissolution*. Mais, dans les mêmes conditions de température et de pression, un même liquide n'absorbe pas des quantités égales des divers gaz. Ainsi, à la température moyenne de 10° et sous la pression de $0^m,76$, l'eau dissout environ 25 millièmes de son volume d'azote, 46 millièmes du même volume d'oxygène, un volume égal au sien d'acide carbonique, et 670 fois son volume de gaz ammoniac. Le mercure paraît se refuser entièrement à la pénétration des gaz : on se rappelle que c'est l'une des raisons qui l'ont fait choisir pour liquide barométrique.

Lois de la dissolution. — Les lois de la dissolution des gaz dans les liquides (sans action chimique sur eux) ont été découvertes et énoncées depuis longtemps par Henry (de Manchester) et par Dalton; elles ont été vérifiées plus récemment et précisées par Bunsen [1].

1° Loi de Henry. — *Lorsqu'un gaz est en contact avec un liquide qui le dissout, il s'établit un rapport constant, pour une même température, entre le volume du gaz dissous, mesuré à la pression finale de l'atmosphère gazeuse, et le volume du dissolvant.*

Coefficient de solubilité. — Ce rapport constant (c'est-à-dire indépendant de la pression finale), pour un même liquide et un même gaz, est appelé *coefficient d'absorption* ou *de solubilité*, quand il est mesuré à la température de 0°.

Soient V_0 le volume du dissolvant, c le coefficient de solubilité du gaz : le volume de gaz u qui sera dissous à 0_0 est $u = cV_0$, évalué à la pression H que le gaz exerce sur le dissolvant après sa saturation. Si l'on veut avoir le poids du gaz dissous, il faut multiplier son volume par son poids spécifique : on a vu que le poids spécifique d'un gaz est proportionnel à sa pression. Si donc on appelle D le poids spécifique normal du gaz dissous (c'est-à-dire à la température zéro et sous la pression normale 760 millimètres), son poids spécifique à la pression H sera $\frac{DH}{760}$. Le poids du gaz dissous sera donc donné par la formule

$$p = V_0 c D \frac{H}{760};$$

1. Puis par Kanikoff et Louguinine.

pour une autre pression finale H′, on aurait

$$p' = c\,V_0\,D\,\frac{H'}{760}\,; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p'}{p} = \frac{H'}{H},$$

c'est-à-dire que le poids varie proportionnellement à la pression finale. De là ce nouvel énoncé de la première loi de solubilité :

A une même température, les poids d'un gaz, dissous par un même volume de liquide, sont proportionnels aux pressions finales.

2° Loi de Dalton. — *Lorsqu'un mélange de plusieurs gaz est en contact avec un dissolvant, chacun des gaz s'y dissout comme s'il occupait seul le volume du mélange.*

Quant à la pression finale, relative à chacun des gaz, *c'est la pression que possède ce gaz dans le mélange gazeux non dissous.*

Considérons, par exemple, le cas de l'air atmosphérique. L'oxygène n'en formant sensiblement que $\frac{4}{5}$, en volume, l'eau, dans les conditions ordinaires, absorbe la même quantité d'oxygène que si l'atmosphère était tout entière formée de ce gaz, sous une pression égale à $\frac{4}{5}$ de la pression atmosphérique.

244. **Étude expérimentale de la solubilité.** — 1° Il y a deux cas à considérer dans le phénomène de la dissolution des gaz : celui où l'atmosphère gazeuse est illimitee, et alors la pression finale du gaz dissous est égale à la pression initiale; celui où l'atmosphère gazeuse est limitée, et alors la pression finale H est différente de la pression initiale H_0.

Le premier cas est celui de l'air atmosphérique, qui se dissout dans tous les liquides qui sont à la surface de la terre et les sature de ses éléments gazeux, proportionnellement à leurs coefficients de solubilité et à la pression atmosphérique du moment. Le second cas est le seul qu'on puisse réaliser par l'expérience : c'est celui qui sert à étudier le phénomène de la dissolution.

Il y a une relation simple entre H_0, H, V, et U, volume occupé par le gaz non dissous. Elle se déduit de la loi de Mariotte. En effet, avant la dissolution, la masse gazeuse occupait le volume U, à la pression initiale H_0; après la dissolution, elle occupe le volume U au-dessus du liquide, plus le volume cV à l'intérieur du liquide, ces volumes étant évalués à la pression finale H. On a donc

$$UH_0 = (U + cV)\,H.$$

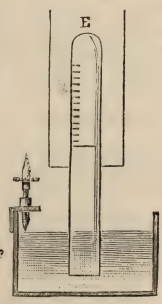


Fig. 267.

Cette équation permet de calculer c dans des conditions déterminées de température et de pression. Tel est le principe de la méthode que Bunsen a employée à l'aide de l'*absorptiomètre* (fig. 267). Cet appareil peut se réduire, schématiquement, à une éprouvette à gaz graduée, disposée sur une cuve à mercure, de manière qu'on puisse y introduire d'abord le gaz à dissoudre, puis le dissolvant, et qu'on puisse évaluer avec précision les volumes de l'un et de l'autre, et les pressions, au commencement et à la fin de l'expérience. La partie supérieure de l'éprouvette est entourée d'un manchon que l'on peut remplir d'eau à une température déterminée et constante. En appliquant l'équation ci-dessus, dont

tous les coefficients peuvent être mesurés, on obtient la valeur de c dans les circonstances où l'on s'est placé.

2° *Résultats.* — *a.* L'expérience prouve que la première loi ne peut être considérée comme exacte que pour les gaz très peu solubles et jusqu'à une pression de 3 atmosphères. Même au-dessous de cette limite, la loi n'est pas applicable aux gaz notablement solubles, tels que l'acide sulfureux, l'acide chlorhydrique et le gaz ammoniac; elle n'est même pas rigoureuse pour l'acide carbonique.

b. La loi de Dalton peut être considérée comme exacte dans les mêmes limites que la première.

c. Le coefficient de solubilité diminue quand la température s'élève, suivant une loi qui n'est pas simple. D'après Bunsen, cette loi peut s'exprimer par une formule à trois termes

$$c = A - Bt - Ct^2,$$

où A, B, C sont des constantes qui varient avec la nature du gaz. Il les a déterminées pour un grand nombre de gaz.

d. Le coefficient de l'hydrogène présente cette anomalie d'être sensiblement indépendant de la température entre 0° et 20°.

245. **Application des lois de la dissolution des gaz.** — *Quelle est la composition, en volume, de l'air dissous dans l'eau, sachant que, à la température moyenne de* 10°, *le coefficient d'absorption de l'oxygène est environ* 0,046 *et celui de l'azote* 0,025?

Appelons H la pression atmosphérique; l'air contenant, sur 100 parties en volume, environ 21 parties d'oxygène et 79 parties d'azote, la pression de l'oxygène, considéré seul, est $\frac{21\,H}{100}$, et celle de l'azote $\frac{79\,H}{100}$. Les volumes de ces deux gaz qui sont dissous par un litre d'eau exposé à l'air libre, sont respectivement représentés par les coefficients de solubilité : ce sera donc $0^l,046$ pour l'oxygène et $0^l,025$ pour l'azote; mais ces deux volumes gazeux ne sont pas comparables entre eux, car ils ne sont pas à la même pression : l'oxygène est évalué à la pression que ce gaz exerce dans l'atmosphère, c'est-à-dire à $\frac{21}{100}$ H et l'azote à $\frac{79}{100}$ H. Pour les comparer, il faut donc les ramener préalablement à la même pression, par exemple à la pression H. On aura, en appliquant la loi de Mariotte : pour l'oxygène $v\text{H} = 0{,}046 \times \frac{21}{100}\,\text{H}$, d'où $v = 0{,}046 \times 0{,}21$ et pour l'azote $v'\text{H} = 0{,}025 \times \frac{72}{100}\,\text{H}$, d'où $v' = 0{,}025 \times 0{,}72$, d'où enfin

$$\frac{v'}{v} = \frac{0{,}025 \times 0{,}79}{0{,}046 \times 0{,}21} = \frac{1975}{966} = 2{,}04.$$

On voit donc que la proportion en volumes de l'azote dissous à l'oxygène dissous est environ 2 dans l'air dissous, tandis qu'elle est environ 4 dans l'air atmosphérique : celui-ci est donc moins riche en oxygène que l'air dissous.

CHAPITRE V

APPLICATIONS DE L'EXPANSIBILITÉ DES GAZ

—

MACHINES PNEUMATIQUES.

246. **Machine pneumatique ordinaire.** — 1° *Définitions.* — On appelle *machines pneumatiques* des appareils qui permettent de *faire le vide* dans un espace clos, ou plutôt d'y *raréfier* l'air ou les gaz qui y sont contenus (car on ne peut réaliser le vide absolu). Le plus ancien de ces appareils est celui qu'on appelle *machine pneumatique ordinaire*, qui est restée la machine classique par excellence.

2° *Historique.* — La première idée de la machine ordinaire est due à Otto de Guericke, bourgmestre de Magdebourg. Il en construisit (en 1650) un modèle rudimentaire, à un seul corps de pompe, qui lui suffit pourtant pour réaliser son expérience célèbre des *hémisphères de Magdebourg*[1] (191).

3° *Description.* — a. *Plate-forme, corps de pompe, platine, récipient.* — La machine actuelle se compose d'une épaisse plate-forme de laiton VGL (fig. 268 et 269), fixée horizontalement sur une table. A l'une de ses extrémités sont solidement mastiqués deux cylindres de cristal, où se meuvent deux pistons de cuir P, P′ : ces cylindres sont les *corps de pompe*. A l'autre extrémité, la plate-forme se termine par une *platine* V, sur laquelle est mastiquée une glace de verre dépolie et bien dressée. C'est là-dessus qu'on place le *récipient* R, dans lequel on doit faire le vide[2]. Au centre de la platine est une tubulure *n*, à pas de vis, sur laquelle on adapte à volonté

1. Les principaux perfectionnements apportés à la construction de cette machine furent imaginés par Boyle (en 1659), par Papin (en 1687) ; et les derniers sont dus à Senguerd (en 1685), puis à Smeaton (1751).

2. C'est Papin qui substitua à l'ancien ballon d'Otto de Guericke ce dispositif commode d'une cloche posée sur une platine.

des ballons de verre à robinet, ou tous autres vases dans lesquels on veut faire le vide. La communication entre le récipient et les corps de pompe est établie par un conduit *nc* pratiqué dans la plate-forme (fig. 269, coupe longitudinale de la machine). En arrivant aux corps de pompe, le conduit se bifurque pour atteindre leurs bases en *c* et en *d* (fig. 272).

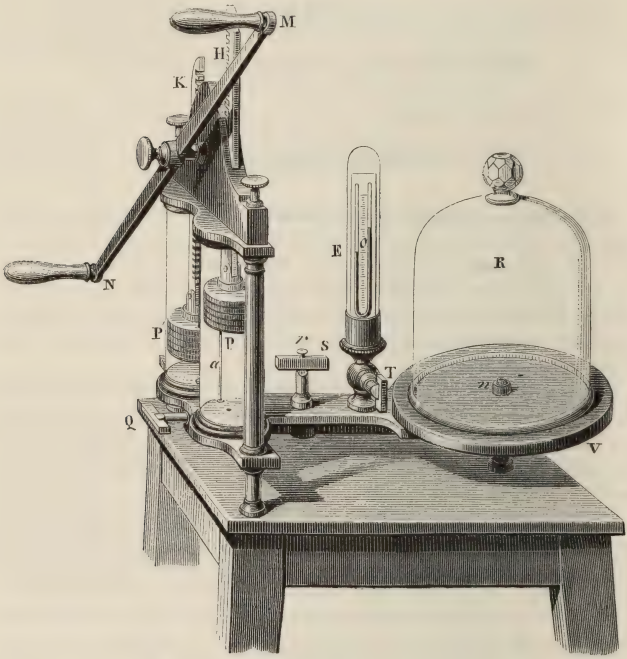


Fig. 268.

b. *Tiges à crémaillères.* — La figure 270, qui représente une coupe verticale de la machine suivant les axes des deux cylindres, montre le mécanisme à l'aide duquel on imprime un mouvement alternatif aux pistons. A ceux-ci sont fixées des crémaillères K et H, dans lesquelles engrène un pignon X. En faisant tourner ce pignon alternativement en sens contraires, au moyen d'une mani-

velle MN, l'une des crémaillères monte et l'autre descend, et avec elles les pistons[1].

c. *Pistons.* — Chaque piston se compose (fig. 271, coupe verticale) de deux disques de laiton A et B, entre lesquels sont des rondelles de cuir percées en leur centre et imbibées d'huile de pied de bœuf. Le disque B est surmonté d'une tubulure qui tra-

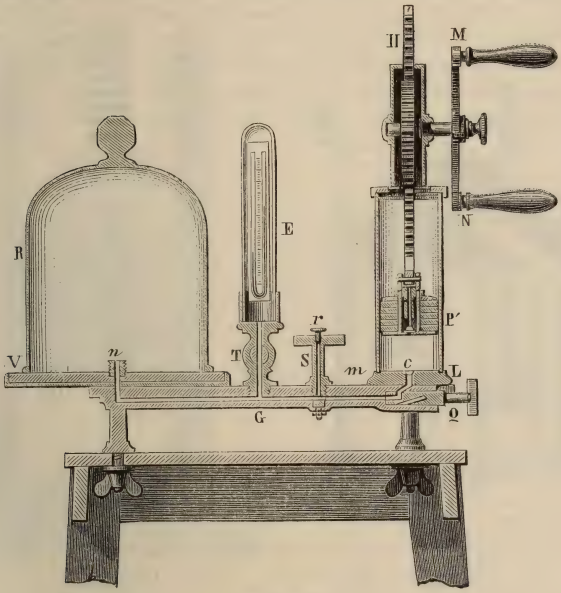


Fig. 269.

verse toutes les rondelles, et sur cette tubulure est un pas de vis sur lequel se serre un écrou qui comprime fortement le disque A et les rondelles. Celles-ci, d'un diamètre un peu plus grand que les disques A et B, glissent à frottement doux contre les parois du corps de pompe, qu'elles ferment hermétiquement. Dans l'intérieur de la tubulure centrale est vissée une pièce D, sur laquelle se fixe par un boulon la crémaillère qui fait mouvoir le piston. La pièce D est percée, dans toute sa hauteur, d'un conduit destiné à laisser

1. C'est à Boyle qu'est due l'adaptation, à la tige de chaque piston, d'une crémaillère engrenant avec une roue dentée.

passer l'air, de la partie inférieure du corps de pompe à la partie supérieure, et de là dans l'atmosphère (les corps de pompe n'étant pas hermétiquement clos dans le haut). Enfin, au centre du disque B est un trou *i*, fermé par une soupape métallique Z, qui s'ouvre de bas en haut. A cette soupape (représentée à gauche de la figure 271) est fixée une tige *e* qui s'engage librement dans le conduit de la pièce D. Ce dispositif a pour but d'empêcher la

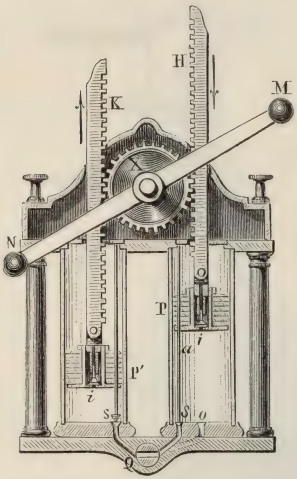


Fig. 270.

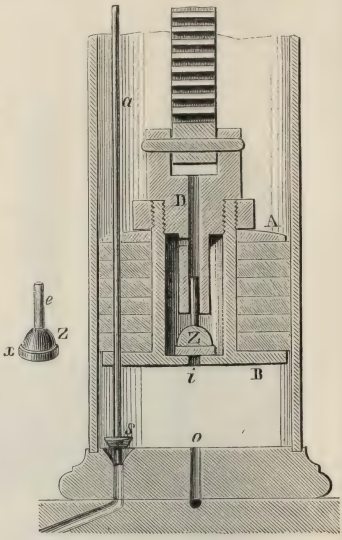


Fig. 271.

soupape de chavirer lorsqu'elle est soulevée. A la partie inférieure de la soupape est un disque de liège *x* qui s'applique sur l'orifice *i* et le ferme.

Outre la soupape Z placée à l'intérieur du piston, une soupape conique *s* sert à fermer, à la base du corps de pompe, l'orifice *c* du conduit *cn* qui se rend au récipient (fig. 269). Cette soupape est fixée à l'extrémité inférieure d'une tige de fer *a* (fig. 271), qui traverse tout le piston, et se prolonge jusqu'au sommet du corps de pompe. La tige *a* pouvant glisser à frottement dur dans les rondelles de cuir du piston, il en résulte que, lorsque celui-ci descend, il entraîne avec lui la tige de fer et fait fermer la soupape *s*;

s'il monte, la tige et la soupape sont soulevées, mais d'une très petite hauteur, parce que cette tige a une longueur telle, qu'elle vient buter tout de suite contre le plateau supérieur du corps de pompe[1]. Alors elle ne fait plus que glisser dans le piston, qui s'élève seul.

d. *Robinets.* — Pour compléter la description de la machine pneumatique, il nous reste à faire connaître l'usage de trois robinets T, S, Q, placés sur cette machine (fig. 268 et 269). Le robinet T sert à faire communiquer, par le conduit *cn*, le récipient R avec une éprouvette E, qui sera décrite ci-après (6°). Quant au robinet S, encore par le même conduit *cn*, il établit ou interrompt la communication entre le récipient et les corps de pompe. Lorsque

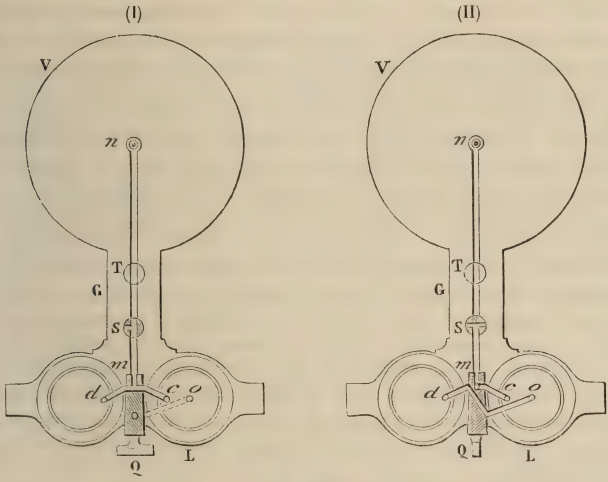


Fig. 272.

ceux-ci fonctionnent, le robinet S doit être ouvert (fig. 269 et 272, I), et alors l'air est aspiré du récipient; mais une fois que le vide est fait dans ce dernier, comme l'air tend toujours à rentrer par les corps de pompe, on tourne le robinet S d'un quart de tour (fig. 272, II) et l'air ne peut plus pénétrer dans le récipient qu'en s'infiltrant entre ses bords et la platine. C'est pourquoi ces bords

1. Cette soupape à fonctionnement automatique est due à Papin. Elle remplaça un robinet, qu'il fallait manœuvrer à la main, après chaque coup de piston, dans la machine primitive d'Otto de Guericke.

doivent être dressés avec soin, de manière que le contact soit parfait; mais cela serait insuffisant : il faut encore, avant de les appliquer sur la platine, les enduire de suif. Le récipient, ainsi disposé, *tient le vide* des mois entiers.

Le robinet S est percé, suivant son axe, d'un conduit dont on ferme hermétiquement l'orifice à l'aide d'un bouchon métallique *r*. Le vide étant fait dans le récipient, lorsqu'on veut y faire rentrer l'air, il suffit d'enlever le bouchon *r*[1]. Le troisième robinet Q, placé entre les deux corps de pompe, est destiné à l'opération du *double épuisement :* c'est le robinet dit *de Babinet*, que nous décrirons ci-après.

4° *Fonctionnement.* — Supposons d'abord le piston P′ (fig. 270 et 271) au bas de sa course. A l'instant où l'on commence à faire marcher la manivelle, ce piston monte, entraînant avec lui la tige *a* et la soupape *s*, tandis que la soupape Z reste fermée par son propre poids et par celui de l'atmosphère. Si la soupape *s* restait fermée pendant l'ascension du piston, le vide se ferait au-dessous de celui-ci; mais, la communication entre le corps de pompe et le récipient étant établie par cette soupape, une partie de l'air du récipient passe dans le corps de pompe et le remplit lorsque le piston est arrivé au haut de sa course. Si actuellement celui-ci s'abaisse, le jeu des soupapes est changé : la soupape *s* se fermant par la descente de sa tige, l'air qui est sous le piston ne peut retourner dans le récipient; mais, se trouvant comprimé de plus en plus à mesure que le piston descend, il acquiert bientôt une tension plus grande que la pression qui s'exerce sur la soupape Z. Celle-ci s'ouvre alors, et l'air qui est sous le piston s'échappe dans l'atmosphère par le conduit D. Au second coup de piston et aux coups suivants, la même série de phénomènes se renouvelle, jusqu'au moment où la soupape du piston refuse de s'ouvrir quand il arrive au bas de sa course, bien qu'il reste encore de l'air dans le récipient.

5° *Limite du fonctionnement.* — On a alors atteint ce qu'on appelle la *limite du vide*. Cela tient à ce que, si bien construite que soit une machine, on ne peut éviter, au-dessous des soupapes et sur le contour du disque inférieur du piston, un *espace nuisible* où se loge un petit résidu d'air. Par suite, lorsque la raréfaction est poussée assez loin, il arrive un moment où, lors même que le piston vient s'appliquer sur la base du corps de pompe, l'air qui reste enfermé dans l'espace nuisible n'acquiert pas une tension suffisante pour soulever la soupape; à partir de

1. L'adjonction de ce robinet pour la rentrée de l'air est due à Smeaton

cet instant la machine ne fonctionne plus. On verra ci-après (248) un dispositif de robinet qui permet de pousser le vide plus loin, sans pouvoir toutefois donner le vide absolu.

Du reste, indépendamment de cette cause mécanique qui limite pratiquement la raréfaction, il est théoriquement impossible que la machine pneumatique puisse faire le vide absolu. On peut s'en rendre compte approximativement de la manière suivante. Le volume de chaque corps de pompe, diminué de celui du piston, étant, par exemple, de 1 litre, et celui du récipient de 10 litres, lorsque le piston est arrivé au haut de sa course, le volume d'air, qui était 10, est 10 plus 1 ou 11; on extrait donc, à chaque coup de piston, seulement $\frac{1}{11}$ de la masse de l'air qui se trouvait dans le récipient; par conséquent on ne pourra jamais enlever tout l'air qu'il contient.

6° *Éprouvette* et *baromètre tronqué.* — Lorsque la machine a fonctionné un certain temps, on mesure la force élastique de l'air qui reste dans le récipient à l'aide d'un petit manomètre de forme spéciale. C'est un tube de verre recourbé en siphon, dont l'une des branches est fermée et l'autre ouverte, comme dans le baromètre à siphon. Ce petit instrument est appelé *baromètre tronqué*, parce que c'est une espèce de baromètre à siphon ayant moins de 76 centimètres de hauteur. Il est fixé sur une échelle divisée en millimètres, et placé sous une cloche de cristal ou *éprouvette* E (fig. 269), qui communique avec le récipient par le robinet T; enfin la branche fermée et la partie courbe du tube ont été préalablement remplies de mercure[1].

Avant qu'on ait commencé à aspirer l'air du récipient, sa force élastique fait équilibre au poids de la colonne de mercure qui est dans la branche fermée, et celle-ci reste pleine; mais, à mesure que l'air est raréfié par le jeu des pistons, la force élastique diminue, et bientôt elle ne peut plus faire équilibre au poids de la colonne de mercure. Celle-ci baisse alors et, à partir de cet instant l'instrument fonctionne comme manomètre : la différence des niveaux du mercure dans les deux branches du siphon mesure évidemment la force élastique du gaz qui reste dans le récipient et dans les conduits de la machine.

Si l'on arrivait à faire le vide absolu, les niveaux s'établiraient nécessairement sur un même plan horizontal; mais, avec les meilleures machines, le mercure reste toujours plus élevé d'un demi-millimètre au moins dans la branche fermée : cela prouve que le vide n'est pas parfait, puisqu'il reste encore une quantité d'air

1 Cet accessoire de la machine fut imaginé par Smeaton (en 1751).

dont la tension fait équilibre à une colonne de mercure d'un demi-millimètre. On dit alors qu'*on a fait le vide à un demi-millimètre.*

7° *Calcul des épuisements successifs : loi du fonctionnement de la machine.* — Il y a deux cas à considérer : celui où l'on ne tient pas compte de l'espace nuisible, — cas purement théorique, — et celui où l'on tient compte de l'espace nuisible.

Cas théorique (*pas d'espace nuisible*). — Soient R la capacité du récipient et du tube d'aspiration, C la capacité du corps de pompe, H_0 la pression initiale dans le récipient. Avant le premier coup de piston, le récipient contient une certaine masse d'air dont le volume est R et la force élastique H_0. On soulève le piston de l'un des corps de pompe, cette masse d'air se répand dans le cylindre : son volume devient $R + C$, et sa pression H_1. D'après la loi de Mariotte, on a

$$H_1 (R + C) = H_0 R,$$

d'où

$$H_1 = H_0 \frac{R}{R + C}.$$

Si l'on abaisse maintenant le piston, la communication entre le cylindre et le récipient est immédiatement interrompue, et, tandis que l'air du corps de pompe est expulsé au fur et à mesure de la descente du piston, l'air du récipient conserve la pression H_1 : *donc* H_1 *représente la force élastique dans le récipient après le premier coup de piston.* On verra de la même manière que la pression dans le récipient, après deux coups de piston, est donnée par la formule

$$H_2 = H_1 \frac{R}{R + C} = H_0 \left(\frac{R}{R + C}\right)^2,$$

et, après n coups de piston, par la formule

$$[1] \qquad H_n = H_0 \left(\frac{R}{R + C}\right)^n.$$

Cas d'un espace nuisible. — Soit e l'espace nuisible. Remarquons d'abord que, lorsqu'on abaisse le piston dans l'un des cylindres, l'air qui se trouve emprisonné entre la base du piston et le fond du cylindre s'échappe, en soulevant la soupape, *jusqu'au moment où sa force élastique est devenue égale à la pression extérieure.* Au début, lorsque le piston est au bas de sa course, nous avons deux masses d'air : l'une occupant le volume R du récipient, à la pression initiale H_0 ; l'autre occupant le volume de l'espace nuisible, à la pression atmosphérique extérieure H. Quand on soulève le piston, ces deux masses d'air se mélangent dans le volume total $(R + C)$ et prennent une pression H_1, qui est donnée par l'équation du mélange des gaz,

$$H_1 (R + C) = H_0 R + He;$$

d'où

$$[1] \qquad H_1 = H_0 \frac{R}{R+C} + H \frac{e}{R+C}.$$

Quand on abaisse le piston, la communication est immédiatement interrompue entre le cylindre et le récipient, et celui-ci reste plein d'air à la pression H_1 : *donc* H_1 *représente la pression de l'air du récipient après un seul coup de piston.* On aura de même, après deux coups de piston,

$$[2] \qquad H_2 = H_1 \frac{R}{R+C} + H \frac{e}{R+C},$$

et ainsi de suite, jusqu'au $(n-1)^e$ et jusqu'au n^e coups de piston

$$[n-1] \qquad H_{n-1} = H_{n-2} \frac{R}{R+C} + H \frac{e}{R+C};$$

$$[n] \qquad H_n = H_{n-1} \frac{R}{R+C} + H \frac{e}{R+C}.$$

De cette série d'équations on peut déduire la valeur de H_n en fonction de H_0 et des coefficients connus. Il suffit d'éliminer les pressions intermédiaires $H_1, H_2 \ldots H_{n-1}$, en appliquant un procédé algébrique usuel. Il consiste à multiplier les deux membres de l'équation $[n-1]$ par $\frac{R}{R+C}$, puis les deux membres de l'équation $[n-2]$ par $\left(\frac{R}{R+C}\right)^2$, et ainsi de suite jusqu'à l'équation [2], dont on multipliera les deux membres par $\left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-2}$, et l'équation [1], dont on multipliera les deux membres par $\left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-1}$. On obtient ainsi la suite des équations transformées :

$$[1'] \qquad H_1 \left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-1} = H_0 \left(\frac{R}{R+C}\right)^n + H \frac{e}{R+C} \left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-1},$$

$$[2'] \qquad H_2 \left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-2} = H_1 \left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-1} + H \frac{e}{R+C} \left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-2},$$

. . . . . .

$$[n-1'] \qquad H_{n-1} \frac{R}{R+C} = H_{n-1} \left(\frac{R}{R+C}\right)^2 + H \frac{e}{R+C} \left(\frac{R}{R+C}\right),$$

$$[n'] \qquad H_n = H_{n-1} \left(\frac{R}{R+C}\right) + H \frac{e}{R+C}.$$

En ajoutant toutes ces équations membre à membre, on voit que les termes intermédiaires disparaîtront dans la somme, et qu'il restera

$$H_n = H_0 \left(\frac{R}{R+C}\right)^n + H \frac{e}{R+C} \left[\left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-1} + \left(\frac{R}{R+C}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{R}{R+C} + 1 \right],$$

ou bien, en effectuant la somme de la progression géométrique croissante renfermée entre parenthèses, et en supprimant, au deuxième terme, le facteur commun (RH),

$$[2] \qquad H_n = H_0 \left(\frac{R}{R+C}\right)^n + H \frac{e}{C} \left[1 - \left(\frac{R}{R+C}\right)^n \right].$$

247. **Limite du vide.** — La machine pneumatique, si bien construite qu'elle soit, ne peut donner un vide absolu. Il arrive toujours un moment où elle cesse de fonctionner, et où la pression dans le récipient conserve une valeur minimum : on dit alors qu'on a atteint la *limite du vide*.

Les causes qui limitent nécessairement le fonctionnement de la machine sont de deux sortes : les unes sont des conséquences de la théorie même de la machine et de la loi des épuisements ; les autres sont dues aux défectuosités mécaniques de la construction.

1° *Limite théorique.* — Si l'on s'en tenait à la formule théorique [1]

$$H_n = H_0 \left(\frac{R}{R + C}\right)^n,$$

il n'y aurait pas de limite au vide. En effet, la pression au bout de n coups de piston serait une fraction de la pression initiale, aussi petite qu'on le voudrait. Il en résulterait donc que, d'une part, on n'arriverait au vide absolu que pour un nombre infini de coups de piston (pour $n = \infty$, $H_n = 0$) ; d'autre part, on pourrait s'en rapprocher autant qu'on voudrait.

Mais la formule [2], qui tient compte de l'espace nuisible, est seule conforme à la réalité pratique, et par suite seule acceptable. Or, si l'on y fait $n = \infty$ et qu'on appelle λ la pression correspondante, on a

$$\lambda = H \frac{e}{C}.$$

2° *Démonstration directe de la formule du vide.* — On peut trouver cette formule sans passer par la loi générale des épuisements. Nous avons vu, en effet, que, lorsqu'on abaisse le piston, l'air confiné dans le corps de pompe soulève la soupape du piston et s'échappe tant qu'il a une pression supérieure ou égale à la pression extérieure. Si donc la limite est atteinte, c'est-à-dire si la soupape ne fonctionne plus, c'est que la masse d'air qui se répand dans le cylindre quand le piston est au haut de sa course, a une pression λ qui s'élevait *au plus* à la valeur H, lorsque la masse d'air était réduite au volume e de l'espace nuisible. En appliquant la loi de Mariotte, on a

$$He = C\lambda, \quad \text{d'où} \quad \lambda = H \cdot \frac{e}{C}.$$

Or, quand le piston est au haut de sa course, il y a communica-

tion entre le cylindre et le récipient : donc λ représente également la pression limite de l'air du récipient.

3° *Limite pratique.* — Dans la pratique, cette limite n'est même pas atteinte. Les meilleures machines pneumatiques de ce modèle ne peuvent pas diminuer la pression au delà de 1 ou 2 millimètres. Cela tient à ce que, outre l'espace nuisible, dont nous avons tenu compte, il existe des joints nombreux qui sont plus ou moins parfaits. Ce sont, par exemple, les contacts entre les pistons et les cylindres, la soupape à tige qui ferme la base de chaque cylindre, les soudures, les robinets, le métal lui-même, qui est quelquefois perméable à l'air. Il en résulte que, pendant qu'on enlève de l'air par le jeu du piston, il en rentre par tous ces joints. La quantité de gaz expulsée est d'abord beaucoup plus grande que la quantité d'air qui rentre ; mais la différence diminue à mesure que le vide se produit, et elle finit par devenir nulle. A ce moment les deux actions se compensent, la limite pratique du vide est atteinte, et le jeu de la machine ne sert qu'à maintenir constante la pression finale.

248. **Robinet de Babinet** ou **Robinet à double épuisement**. — Babinet ajouta à la machine ordinaire un dispositif spécial qui permet de pousser la raréfaction de l'air beaucoup plus loin que la limite normale du vide.

1° *Description.* — C'est un robinet Q placé à la bifurcation du canal qui conduit l'air du récipient aux deux corps de pompe : il est percé, dans sa masse, de plusieurs conduits qu'on utilise successivement en le tournant dans deux positions rectangulaires. Les figures 273 (I et II) en représentent la coupe verticale dans ses deux positions.

Les figures 272 (I et II) représentent, en coupe horizontale, les communications entre le robinet et les corps de pompe, qui correspondent à ces deux positions.

Dans la position (I), le robinet établit par un conduit central et par deux conduits latéraux la communication entre le récipient et les corps de pompe, de *n* en *c* et en *d*, et la machine fonctionne alors comme il a été dit ci-dessus. Lorsqu'elle ne fonctionne plus, c'est-à-dire lorsque les soupapes Z refusent de s'ouvrir, on tourne le robinet Q de 90 degrés et il se trouve alors dans la position (II). A partir de ce moment, les autres conduits du robinet correspondent à ceux de la plate-forme, et le corps de pompe de droite communique *seul* avec le récipient par le conduit *nmc*, tandis que celui de gauche se trouve mis en communication, par un conduit qui traverse obliquement le robinet, avec une ouverture centrale *o*, pratiquée à la base du corps de pompe de droite, et toujours ouverte.

2° *Fonctionnement.* — Lorsqu'on soulève alors le piston de droite, on aspire l'air du récipient ; mais lorsqu'on l'abaisse, l'air qui vient d'être aspiré est refoulé dans le corps de pompe de gauche par les orifices *o* et *d* (fig. 272) ; ce dernier est ouvert, puisque la soupape conique qui lui correspond est soulevée. Lorsque ensuite le piston de droite remonte, celui de gauche s'abaisse ; mais l'air qui est au-dessous ne retourne pas dans le corps de pompe de droite, parce que l'orifice *d* est maintenant fermé par la soupape conique. Le piston de droite continuant ainsi à aspirer l'air du récipient et à le refouler dans le corps de pompe de gauche, l'air s'accumule dans celui-ci, et finit

par y prendre une tension suffisante pour soulever la soupape Z du piston, ce qui était impossible avant que le robinet Q fût tourné. On voit, par suite, que la machine qui ne fonctionnait plus dans la position (I) du robinet, fonctionne de nouveau, dans la position (II.)

3° *Théorie.* — Dans la position (II) un seul des cylindres, le cylindre B par exemple, communique avec le récipient et y fait le vide, tandis que l'autre cylindre, A, communique avec le premier, et y puise l'air provenant du récipient (fig. 273). Une *nouvelle limite du vide* sera évidemment atteinte lors-

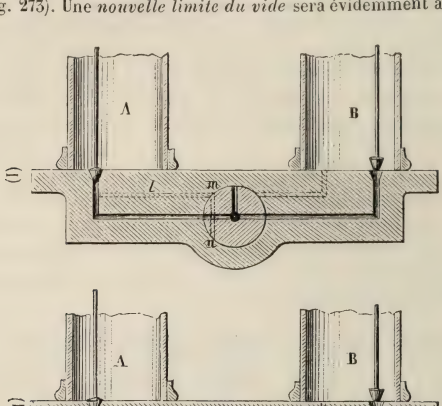


Fig. 273

que le piston cessera de nouveau de fonctionner dans le cylindre A. Supposons que cette nouvelle limite soit atteinte : à partir de ce moment, l'air refoulé dans l'espace nuisible e_1 y prend une pression au plus égale à la pression extérieure H. C'est pourquoi la soupape du piston ne se soulève plus. Soit λ la pression qu'avait cette même masse d'air lorsque ce même piston était au haut de sa course; λ est lié à la pression H par la loi de Mariotte. On a, en effet, en appelant C_1 la capacité du cylindre A,

$$\lambda C_1 = e_1 H, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = H \times \frac{e_1}{C_1}.$$

Or, quand le piston du cylindre A est au haut de sa course, l'autre piston est au bas de sa course dans le cylindre B, et l'espace nuisible de celui-ci communique librement, par l'intermédiaire du robinet de Babinet, avec le cylindre A ; donc la pression est également λ pour la masse d'air qui est confinée dans l'espace nuisible de B. Soit λ_1 la pression qu'avait cette même masse d'air quand le piston était au haut de sa course. On a de même, en appelant C la capacité du cylindre B,

$$\lambda e = \lambda_1 C, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_1 = \lambda \frac{e}{C} = H \times \frac{e}{C} \times \frac{e_1}{C_1}. \qquad [1]$$

Enfin, quand le corps de pompe B communiquait librement avec le récipient, l'air resté dans celui-ci avait la même pression que dans B; donc λ_1 représente la pression limite finale dans le récipient, c'est-à-dire la *nouvelle limite du vide.*

4° *Nouvelle formule du vide.* — Si l'on suppose $e_1 = e$ et $C_1 = C$, ce qui revient à considérer la machine comme parfaitement symétrique, et les capacités des conduites de la masse métallique comme négligeables, la formule devient

$$[2] \qquad \lambda_1 = H\left(\frac{e}{C}\right)^2.$$

La fraction qui représente la nouvelle limite du vide est donc le carré de celle qui représentait la première limite. C'est pourquoi l'on exprime quelquefois l'effet du robinet de Babinet en disant qu'il sert à faire *le vide du vide.*

Remarque. — Dans le calcul précédent, nous avons négligé l'effort nécessaire pour soulever le poids du piston et annuler la résistance de la soupape. Si l'on en tenait compte, il faudrait l'ajouter à la pression extérieure H. On aurait alors, en appelant ε la somme de ces deux pressions additionnelles,

$$[1] \qquad \lambda = (H + \varepsilon) \times \frac{e}{C} \times \frac{e_1}{C_1} \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = (H + \varepsilon)\left(\frac{e}{C}\right)^2. \qquad [2]$$

249. **Usages de la machine pneumatique. Expériences classiques.** — On a déjà décrit un grand nombre d'expériences qu'on fait à l'aide de la machine pneumatique. Telles sont les expériences du *tube de Newton* (81), du *marteau d'eau* (18), de la *vessie dans le vide* (187), du *crève-vessie* (191), des *hémisphères de Magdebourg* (191) et du *baroscope* (210). On peut en citer quelques autres qui sont également classiques, par exemple celles de la *fontaine dans le vide*, de la *ventouse pneumatique* et de la *pluie de mercure.*

Fontaine dans le vide.— On prend un globe de verre A (fig. 274), très allongé et muni à sa base d'une garniture à robinet, avec une tubulure qui s'élève à l'intérieur. Ayant vissé ce globe sur la platine, on y fait le vide, on ferme le robinet, puis on porte l'appareil dans un vase R contenant de l'eau. Si l'on ouvre alors le robinet, la pression atmosphérique qui s'exerce sur l'eau la fait jaillir par la tubulure, comme l'eau d'une fontaine.

Ventouse atmosphérique. — Cette expérience montre l'effet de la pression atmosphérique sur le corps humain (fig. 275). Un manchon de verre, ouvert à ses deux extrémités, étant posé sur la platine de la machine, on place la paume de la main sur ses bords, et une autre personne fait le vide. Alors, les pressions de l'atmosphère ne se faisant plus équilibre sur les deux faces de la main, celle-ci est fortement pressée sur les bords du manchon, et ce n'est qu'avec effort qu'on peut l'en retirer. De plus, l'élasticité des fluides que contiennent les organes n'étant plus contrebalancée par le poids de l'atmosphère, la paume de la main se

gonfle et le sang tend à sortir par les pores de la peau. Si l'on prolongeait l'expérience, on pourrait se faire ainsi une véritable ventouse.

Pluie de mercure. — Cette expérience démontre la perméabilité de certaines substances peu poreuses en apparence, telles que la

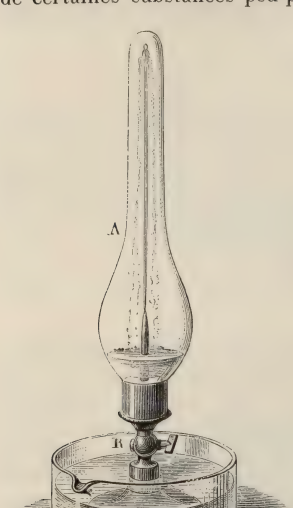


Fig. 274

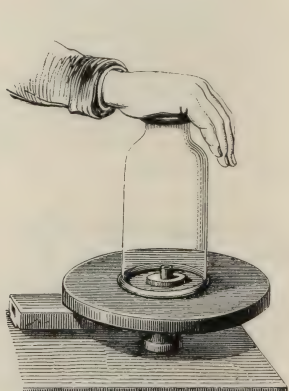


Fig. 275.

peau de chamois, le cuir épais, le bois coupé perpendiculairement aux fibres; un disque ou une rondelle de l'une de ces substances forme le fond d'un godet en cuivre, que termine à la partie supérieure un long tube à vide, analogue au tube de Newton (81). Le godet étant rempli de mercure, si l'on fait le vide au-dessous, dans le tube, le liquide traverse le fond poreux du godet, sous l'influence de la pression atmosphérique, et tombe en pluie fine dans le tube.

250. **Machine pneumatique de Bianchi**. — M. Bianchi a inventé une machine pneumatique qui présente plusieurs avantages sur la machine ordinaire. Elle est d'abord d'un maniement beaucoup plus commode, parce que le mouvement de va-et-vient du piston est produit par l'intermédiaire du mouvement rotatif d'un volant

à manivelle. Le fonctionnement du piston est rendu ainsi à la fois plus facile et plus rapide. Et comme on peut donner au cylindre de grandes dimensions, il en résulte que cette machine permet de

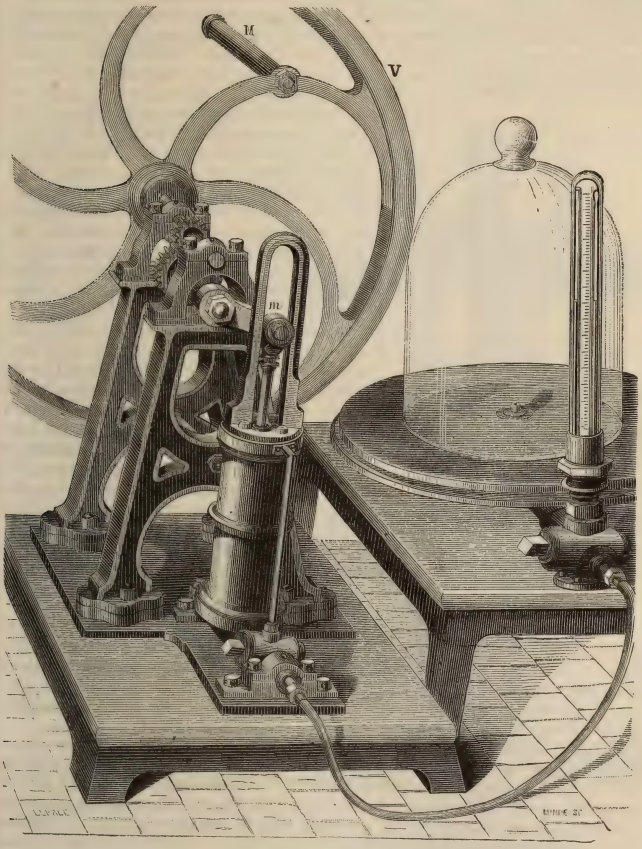


Fig. 276.

faire un vide aussi complet que la machine ordinaire dans des récipients plus grands et en un temps plus court.

Description. — La machine est entièrement construite en fonte; elle n'a

qu'un seul cylindre, qui peut osciller sur un axe horizontal fixé à sa base (fig. 276). Sur un bâti de fonte est monté un arbre horizontal, avec un volant très lourd V, qu'on fait tourner à l'aide d'une manivelle M. A ce même arbre est fixée une manivelle *m* qui s'articule à la tête de la tige du piston. Par suite, à chaque révolution complète du volant, le cylindre fait deux oscillations sur son axe.

D'ailleurs, bien que la machine ne possède qu'un seul corps de pompe, elle est *à double effet*, c'est-à-dire que le piston fait le vide en montant et en descendant. Cela tient à la construction spéciale du piston. Celui-ci porte d'abord une soupape *b* (fig. 277) pouvant s'ouvrir de bas en haut, comme dans la machine ordinaire; mais, en outre, sa tige AA est creuse, et donne passage au tube Y, de cuivre rouge, par où s'échappe l'air qui sort par la soupape *b*. Dans la base supérieure du cylindre même est logée une seconde soupape *a*, qui s'ouvre aussi de bas en haut. Enfin une tige de fer D traverse à frottement dur le piston, et se termine à ses deux extrémités par deux bouchons coniques *s* et *s'*, pouvant fermer tour à tour les deux orifices parallèles d'un tube d'aspiration BC à deux branches.

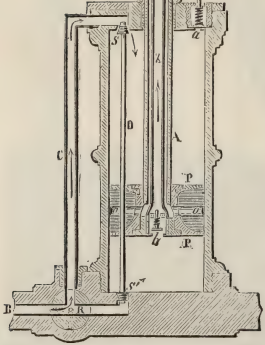


Fig. 277.

Fonctionnement. — Supposons que le piston descende. La soupape *s'* est alors fermée, et, la soupape *s* étant ouverte, l'air du récipient se rend au-dessus du piston, tandis qu'en dessous l'air comprimé par celui-ci soulève la soupape *b* et se dégage par le tube X. Quand le piston remonte, l'aspiration se fait par *s'*, et, la soupape *b* étant fermée, l'air comprimé se dégage par la soupape *a*. On comprend donc bien pourquoi la machine est à double effet bien qu'ayant un seul cylindre : c'est que les deux régions inférieure et supérieure, séparées par le piston, fonctionnent tour à tour comme les deux cylindres d'une machine ordinaire.

Robinet à double épuisement. — On comprend de même qu'on puisse adapter à la machine un robinet à double épuisement R, semblable au robinet de Babinet. Ce robinet est disposé en R (fig. 277) au point de jonction des deux branches du tube d'aspiration. En le tournant convenablement, on peut établir, à un moment donné, la même relation entre les deux portions du cylindre unique qu'entre les deux cylindres de la machine ordinaire.

Mode de graissage particulier. — Une des principales raisons du bon fonctionnement de cette machine, c'est qu'elle est, en outre, munie d'un système de graissage particulier : un godet E (fig. 277), fixé à la tige, est rempli d'huile qui tombe dans l'espace annulaire compris entre la tige AA et le tube X; de là elle se rend dans un conduit *oo* pratiqué dans la masse du piston, et, refoulée par la pression atmosphérique, elle se distribue d'une manière permanente sur le pourtour du piston.

251. **Machine pneumatique de Deleuil.** — *Principe.* — C'est aussi une machine rotative, à un seul corps de pompe (fig. 279) et à double effet, comme la précédente; mais elle présente ce caractère particulier, que son piston glisse sans frottement, et sans

addition d'huile, dans le cylindre, dont il ne touche pas les parois. La construction de cette curieuse machine est fondée sur ce fait que *les gaz circulent très difficilement à travers les conduits capillaires, surtout si ceux-ci sont munis de dilatations et d'étranglements alternatifs*. Avec cette machine on peut obtenir assez vite un vide de 2 à 3 millimètres dans un récipient de 13 à 14 litres.

Description. — Le piston est un long cylindre métallique plein P (fig. 278), dont la surface est sillonnée de rainures horizontales. Son diamètre étant plus petit que celui du cylindre (d'environ $\frac{4}{50}$ de millim.), il peut y glisser sans le boucher complètement; mais le bourrelet d'air qui se loge dans les rainures forme une sorte de cloison compressible qui suffit pour séparer les gaz dans les deux compartiments du cylindre.

Le mouvement est transmis au piston par une tige métallique qui traverse les deux fonds du cylindre. Le récipient communique alternativement avec chaque compartiment du cylindre par l'intermédiaire d'un double tube recourbé, dont les extrémités débouchent en S et en S'. Les orifices sont successivement fermés par deux bouchons coniques que porte la tige TT, laquelle traverse à frottement le piston et est entraînée dans son mouvement. Enfin deux ouvertures à soupape A, A' mettent chaque compartiment en communication avec l'atmosphère, par l'intermédiaire d'un double tube abducteur dont les extrémités se réunissent en R. La figure 279 donne une vue d'ensemble de la machine.

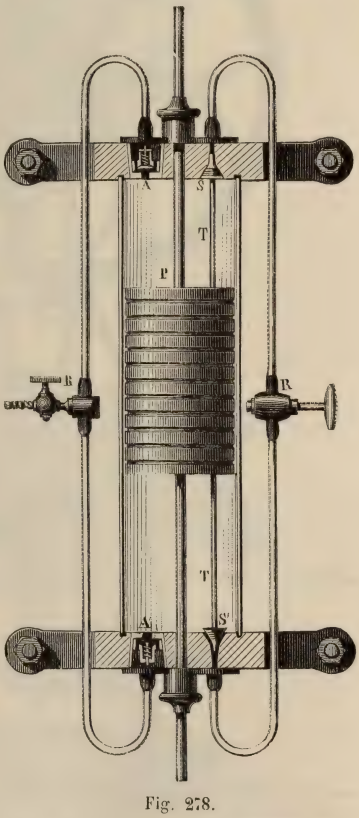


Fig. 278.

Le cylindre n'est pas *oscillant*, comme celui de Bianchi, il est *fixe :* il a donc fallu employer un dispositif spécial pour communiquer au piston, par le mouvement rotatif du volant, un mouvement rectiligne alternatif. M. Deleuil a réalisé cette transformation de mouvements à l'aide d'un *engrenage de la Hire*. Cet organe (fig. 280) se compose d'une pièce de métal, à laquelle est articulée la tige

du piston, et qui est fixée en M à la circonférence d'un pignon C. Celui-ci reçoit directement du volant un mouvement de rotation et est assujetti à engrener avec la denture intérieure d'une roue fixe A, de diamètre double. On démontre

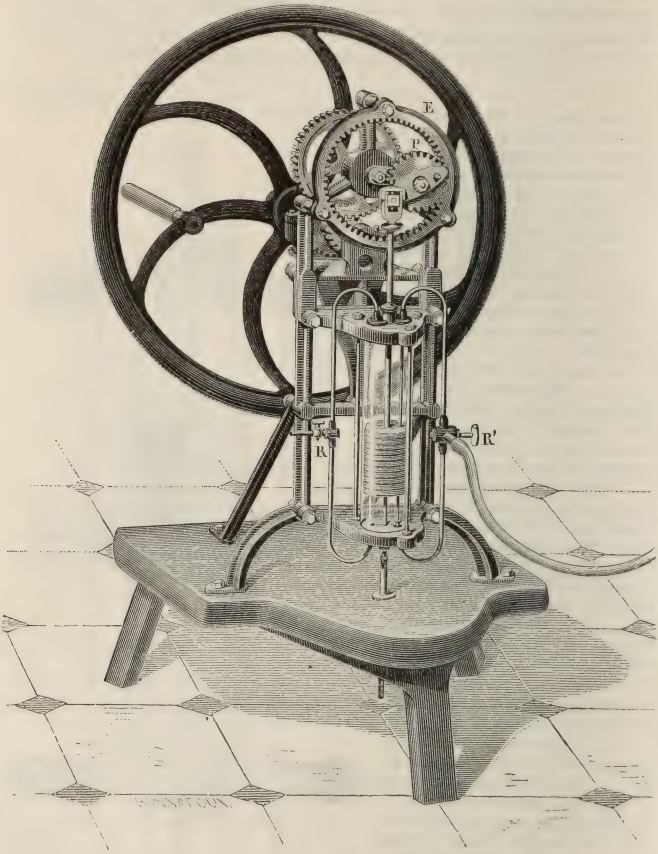


Fig. 279

géométriquement que, dans ces conditions, *la tige du piston se meut suivant un diamètre de la roue dentée* A.

252. **Pompe pneumatique de E. Carré.** — C'est une machine pneumatique à un seul corps de pompe et à simple effet. Elle présente ce triple caractère spécial : 1° de réaliser d'emblée le vide qu'on obtient d'ordinaire à l'aide

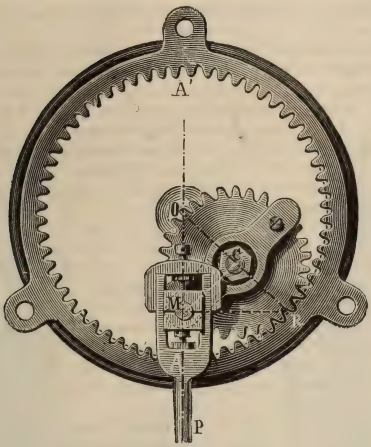


Fig. 280.

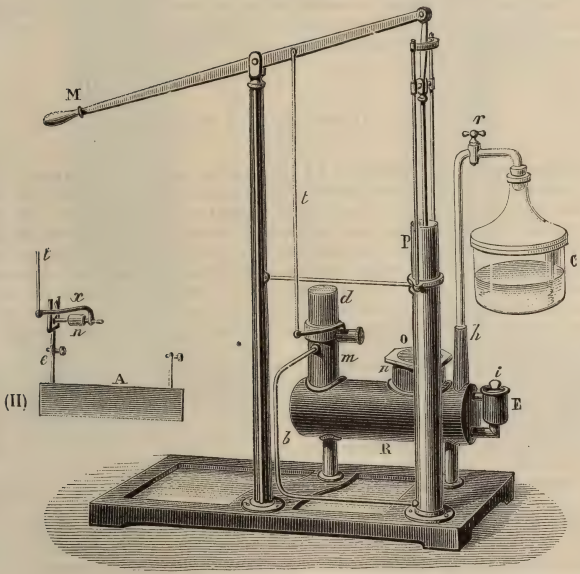


Fig. 281.

du robinet de Babinet; 2° d'être dépourvue d'espace nuisible; 3° de réaliser *un vide sec.*

Description. — Le cylindre est séparé, par le piston, en deux compartiments de grandeur variable. L'air du récipient arrive dans le compartiment inférieur quand le piston est au haut de sa course. Dès que celui-ci s'abaisse, l'air est comprimé et soulève une première soupape, qui est à la base du piston, et passe à travers celui-ci, dans le compartiment supérieur. Quand le piston se relève, sa soupape se referme, l'air qui est au-dessus de lui est comprimé, soulève une seconde soupape et s'échappe dans l'atmosphère. On voit donc que c'est le compartiment supérieur qui fait le vide dans le compartiment inférieur, tandis que celui-ci communique seul avec le récipient.

De plus, il n'y a pas d'espace nuisible, parce que les deux soupapes dépassent légèrement leurs orifices respectifs, et qu'elles sont nécessairement soulevées par la pression du piston entre les bases du cylindre (fig. 281).

Le piston est fixé à l'extrémité d'une tige rigide, qu'on fait mouvoir à l'aide d'un balancier à manette. L'air du récipient est aspiré par l'intermédiaire d'un tube *hr*. Il passe dans un vase R, au-dessus d'un bain d'acide sulfurique, dont on renouvelle constamment la surface, à l'aide d'un agitateur *e*A, qui est également mis en mouvement par le balancier (II). On parvient ainsi à absorber toute la vapeur d'eau du gaz raréfié, et à obtenir rapidement un vide sec à 1 demi-millimètre.

Remarque. — Cette machine est souvent appelée *congélateur*, à cause de son usage spécial, qui consiste à produire en grand la congélation de l'eau par ébullition dans le vide sec; mais elle peut être substituée dans tous les cas, avec beaucoup d'avantage, à la machine pneumatique ordinaire à double effet. Il suffit de remplacer la carafe d'eau, ordinairement adaptée à l'orifice du tuyau d'aspiration, par une platine ordinaire de machine pneumatique.

MACHINES PNEUMATIQUES A MERCURE.

253. **Principe et généralités.** — Le principe des machines à mercure consiste à répéter commodément et indéfiniment l'expérience de Torricelli sur un récipient à gaz, de manière à transformer celui-ci en une espèce de chambre barométrique : on réalise ainsi dans le récipient une sorte de *vide barométrique* qui est beaucoup plus parfait que celui des machines à piston les plus perfectionnées. De plus, grâce à l'emploi d'une colonne de mercure en guise de piston, l'espace nuisible y est totalement supprimé. On arrive sûrement, en prenant certaines précautions (que nous indiquerons ci-dessous), à amener les deux niveaux du mercure, dans le manomètre de la machine, à n'avoir plus de différence appréciable.

La première idée de cette machine est due à Regnault; le premier modèle pratique qui en ait été réalisé est dû au constructeur Geissler de Berlin (en 1857). Ce sont les frères Alvergniat, constructeurs de Paris, qui amenèrent la machine à son degré de perfection actuel, et c'est ce modèle de MM. Alvergniat que nous décrirons. Nous décrirons également une autre machine à mercure due à M. Jamin, et construite sur un tout autre type que celle de Geissler.

254. **Machine d'Alvergniat** (modèle primitif). — 1° *Description.* — Cet appareil, à peu près tout construit en verre, ce compose de deux réservoirs A et B (fig. 282, I et II) reliés entre eux par un tube barométrique T et par un tube de caoutchouc C. Le réservoir B et le tube T sont fixés à une planchette verticale; le réservoir A, qui est libre et ouvert, s'élève et s'abaisse alternativement avec une course de $1^m,12$. Ce déplacement se produit au moyen d'un long ruban de fil qui, attaché par un bout au réservoir A, passe sur une poulie *a* et de la

vient s'enrouler sur une seconde poulie *b*, qu'on fait tourner à l'aide d'une manivelle. Au-dessus du réservoir B est un robinet à trois voies *n*, duquel part un tube *d* qui sert à l'aspiration, et sur la gauche est un robinet simple *m*, qui établit la communication avec un réservoir à mercure *v* et avec l'atmosphère

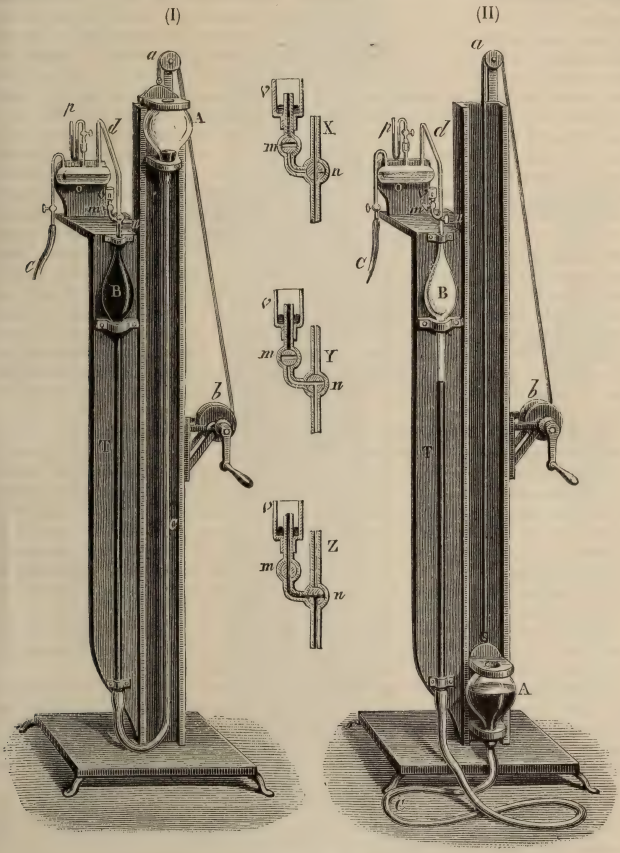


Fig. 282.

Le tube d'aspiration *d* n'est pas directement en communication avec le récipient dans lequel on veut faire le vide ; il se rend d'abord à un réservoir *o* en partie rempli d'acide sulfurique destiné à dessécher les gaz qui arrivent dans l'appareil. C'est ensuite un tube de caoutchouc *e* qui établit la communication avec le récipient. Enfin, sur le réservoir *o* est un petit manomètre à mercure *p*.

2° *Fonctionnement.* — Le réservoir A étant au haut de sa course (fig. 282, I), e robinet *m* ouvert et le robinet *n* tourné comme on le voit en Z, le tuyau de caoutchouc C, le tube T, le réservoir B et le tube qui est au-dessus sont remplis de mercure jusqu'en *v*; c'est ce qui a lieu dans la figure 282, I. Fermant alors le robinet *m* (fig. 282, Y), et abaissant le réservoir A (fig. 282, II), le mercure descend dans le réservoir B et dans le tube T jusqu'à ce que la différence de niveau dans les deux branches soit égale à la hauteur barométrique, et le vide se fait dans le réservoir B. On tourne alors le robinet *n* comme le montre la figure 282, X, le gaz du récipient dans lequel on fait le vide arrive par les tubes *c* et *d* dans la chambre barométrique B, et le niveau s'abaisse de nouveau dans le tube T. On remet alors les robinets dans la position initiale (fig. 282, Z) et l'on remonte le réservoir A; l'excès de pression du mercure qui est dans le tube de caoutchouc chasse par les robinets *n* et *m* le gaz qui avait pénétré dans la chambre B, et si quelques gouttelettes de mercure sont entraînées, elles sont recueillies dans le vase *v*. On répète cette opération jusqu'à ce que le mercure du manomètre *p* soit sensiblement de niveau dans les deux branches.

Précautions à prendre dans la manœuvre. — Cette machine permet de pousser le vide jusqu'à $\frac{1}{10}$ de millimètre, pourvu que le mercure soit bien sec. Mais, son action étant très lente, la manœuvre serait longue et fastidieuse dans le cas de récipients un peu vastes. Aussi ne les emploie-t-on directement que pour faire le vide dans de petites capacités. Quant il s'agit de grands vases, on commence par y faire le vide à 1 centimètre environ avec une machine ordinaire, puis on achève avec la machine à mercure. Pour faire ainsi le vide dans de grands tubes, qui ont jusqu'à 10 litres de capacité, il faut plusieurs heures; on fait marcher la machine par intermittences de 15 à 20 minutes, surtout à la fin de l'opération.

255. **Machine d'Alvergniat** (nouveaux modèles). — Dans les machines que construit aujourd'hui M. Alvergniat, le mouvement d'ascension et de descente du réservoir A ne s'obtient plus à l'aide du système de rubans et de poulies précédemment décrit. Une *chaine de Galle* s'attache d'une part au réservoir et, d'autre part (fig. 283), va s'enrouler sur une petite roue dentée qui est le dernier terme d'une série d'engrenages. On met le système en mouvement en agissant sur la manivelle d'un volant, de manière à faire monter ou descendre à volonté le réservoir : il faut avoir la précaution de soulever préalablement un cliquet servant d'arrêt à tout le système. Quant aux autres pièces, elles restent à peu de chose près les mêmes.

Machine sans robinets. — Depuis peu de temps M. Alvergniat construit des machines complètement dépourves de robinets, et qui fonctionnent automatiquement à l'aide du simple balancement vertical du réservoir[1].

256. **Machine à mercure de Jamin.** — L'emploi d'un mécanisme particulier pour manœuvrer le réservoir A est une complication rendue nécessaire par le poids du mercure. C'est pour ne pas augmenter ce poids qu'on est obligé de limiter la capacité des réservoirs : d'où il résulte que l'on ne peut enlever qu'une faible quantité d'air à la fois, et que l'opération est nécessairement très lente.

M. Jamin a imaginé une machine à mercure qui est exempte de tous ces inconvénients, tout en conservant la supériorité des plus parfaites machines de Geissler (fig. 284).

1° *Principe.* — Le principe de cette machine consiste à réaliser le déplacement du mercure, *sans déplacer le réservoir*, par le moyen d'une machine pneumatique auxiliaire. De cette manière, on peut d'abord supprimer le mécanisme plus ou moins compliqué des machines ordinaires, et puis donner

1. Voir cette nouvelle machine dans la *Physique* de Violle, t. Ier.

aux deux réservoirs A et B une grande capacité qui permet de faire le vide rapidement dans de grands récipients.

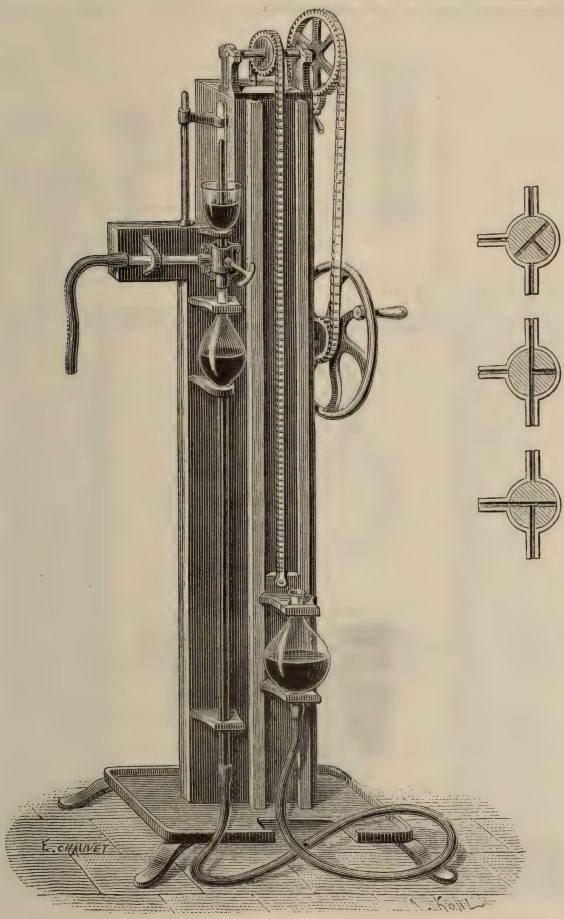


Fig. 283.

2° *Description.* — Les deux réservoirs de la machine Alvergniat sont représentés ici par les deux vases fixes R et R′, superposés l'un à l'autre et emboîtés l'un dans l'autre par leurs goulots (fig. 284) : le vase inférieur R est celui qui y rem-

place le vase mobile d'Alvergniat ; une tubulure qui s'élève verticalement du fond de ce vase le met en communication avec le vase R'. C'est ce dernier qui doit jouer dans le fonctionnement de la machine le rôle de *chambre barométrique* : c'est donc lui qui doit être mis en communication avec le récipient à gaz inté-

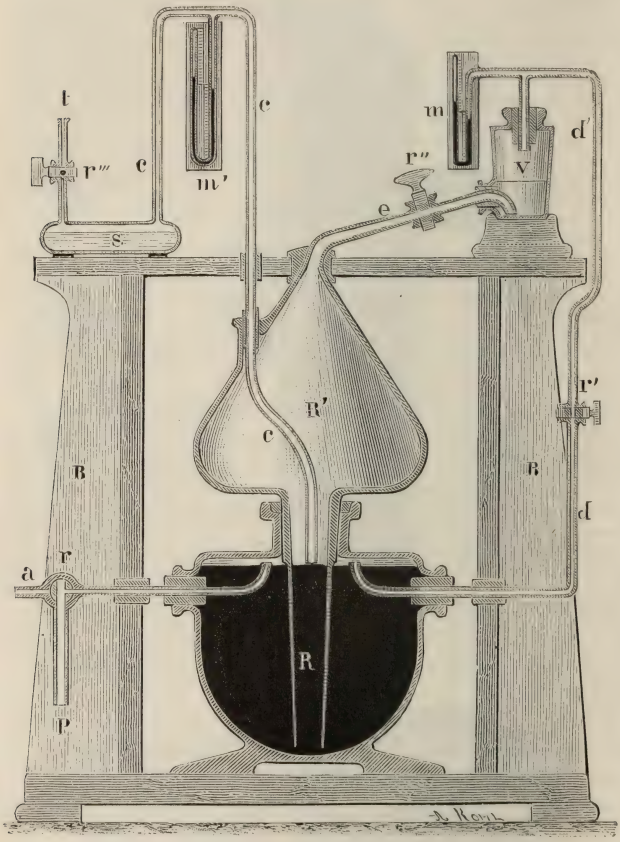


Fig. 284.

rieur, par l'intermédiaire d'un tube abducteur *cct*, lequel est muni, sur son trajet, d'un manomètre *m'* et d'un barboteur à acide sulfurique S, tout comme le tube correspondant de la machine Alvergniat. Ce tube abducteur vient déboucher dans le réservoir aussi bas que possible : nous verrons tout à l'heure pourquoi.

Quant au réservoir R, qui est plein de mercure lorsque la machine est au repos, il est muni de deux tubes abducteurs : l'un, *rap*, peut le mettre en communication, tour à tour avec l'atmosphère extérieure et avec une machine pneumatique ordinaire, grâce à un robinet à trois voies *r*, convenablement placé ; l'autre, *dr'd'*, peut le mettre en communication avec un flacon expurgeur V, lequel peut également communiquer avec le réservoir supérieur R', par l'intermédiaire d'une tubulure inclinée *e*. Ces deux derniers tubes abducteurs viennent déboucher tout en haut du réservoir R. Enfin, tous ces tubes sont munis de robinets *r*, *r'*, *r''*, *r'''* qui permettent d'ouvrir ou de fermer à volonté les communications. L'ensemble de cette machine, qui est toute en verre, est soutenu par un bâti en bois, qui doit être très solide, à cause de l'énorme poids de mercure qui est mis en mouvement par le jeu de la machine.

3° *Fonctionnement.* — Le récipient inférieur R est destiné à jouer le rôle du réservoir des machines Alvergniat : nous l'appellerons le *réservoir ;* et le récipient supérieur R' est destiné à aspirer l'air comme le vase fixe de la même machine : nous l'appellerons donc l'*aspirateur*.

Première opération. — La première chose à faire, c'est de vider l'aspirateur R', c'est-à-dire de le transformer en une chambre barométrique, qu'on mettra ensuite en communication avec le récipient à gaz extérieur.

Cette opération, qu'on fait dans la machine Alvergniat en déplaçant le réservoir, s'effectue ici au moyen d'une machine pneumatique auxiliaire et avec l'aide de la pression extérieure. Pour cela, on relie le tube abducteur *ra*, à l'aide du robinet *r*, à la machine pneumatique, puis on ouvre tous les robinets, sauf *r''* et *r'''* : en manœuvrant la machine auxiliaire, on fait le vide dans tout l'appareil au-dessus du mercure ; on cesse de pomper lorsque les manomètres *m* et *m'* marquent la limite du vide correspondant à la machine employée. On ferme alors tous les robinets, et, à l'aide du robinet à trois voies, on coupe la communication avec la machine auxiliaire pour l'établir avec l'atmosphère extérieure. L'air rentre alors au-dessus du mercure et exerce une pression croissante à sa surface : le mercure monte par la tubulure centrale, commence par boucher la tubulure *c* et vient peu à peu remplir le réservoir R'. La hauteur totale des deux vases au-dessus de l'orifice de la tubulure centrale étant inférieure à $0^m,76$, le mercure monte jusqu'au sommet de la tubulure *e*, et n'est arrêté que par la petite masse d'air qu'il comprime contre le robinet *r''* fermé : si donc on ouvre celui-ci au moment où l'équilibre est atteint, le mercure recommence à monter, en poussant devant lui le résidu d'air jusque dans le flacon V, qui sert ainsi d'*expurgeur*.

Si maintenant on ferme le robinet *r'''*, et qu'on fasse de nouveau le vide en R à l'aide de la machine auxiliaire, le mercure n'étant plus soutenu par la pression extérieure retombe en R par son propre poids, et laisse le vide en R' au-dessous de lui : l'aspirateur R est alors transformé en chambre barométrique.

Deuxième opération. — On n'a plus qu'à ouvrir le robinet *p'''* pour produire une aspiration considérable dans le récipient extérieur qui est adapté au tube abducteur *t*.

Troisième opération. — On referme alors *r'''*, on rétablit en *r* la communication avec la machine pneumatique, on refait le vide dans tout l'appareil, comme précédemment, jusqu'à la limite ; puis on fait remonter le mercure en R', et l'on chasse dans l'expurgeur le résidu de gaz.

On n'a qu'à répéter indéfiniment cette série d'opérations pour pousser le vide dans le récipient extérieur aussi loin qu'on le veut.

Remarques. — 1° C'est le manomètre *m'* qui indique par l'immobilité de ses niveaux si l'on a atteint la *limite pratique* du vide ; car il n'y a pas de *limite théorique*.

2° Comme le réservoir M a une capacité d'environ 10 litres, on voit que la

machine produira à chaque opération un abaissement de pression considérable, surtout si le récipient qu'on veut épuiser n'est pas très grand. — Si, par exemple, il a une capacité de 1 litre, la pression s'abaisse à chaque fois dans le rapport de 1 à 11; s'il était de 0^{m},1, ce serait le rapport de 1 à 110.

3° On pourrait substituer au mercure un liquide peu volatil, tel que l'acide sulfurique concentré. La machine deviendrait beaucoup moins lourde, beaucoup moins coûteuse, et donnerait un vide sec jusqu'à la limite de la tension de vapeur que possède le liquide, à la température de l'opération.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS DE L'ÉLASTICITÉ DES GAZ

—

POMPES DE COMPRESSION. — TROMPES SOUFFLANTES ET ASPIRANTES. APPLICATIONS DE L'AIR COMPRIMÉ.

257. **Machines de compression.** — De même qu'on peut raréfier l'air et tous les gaz dans un récipient grâce à leur expansibilité, de même on peut les y comprimer grâce à leur compressibilité. On pourra ensuite utiliser, comme un ressort métallique, cette masse gazeuse comprimée, qui se détendra, grâce à son élasticité, dès qu'on lui ouvrira une issue.

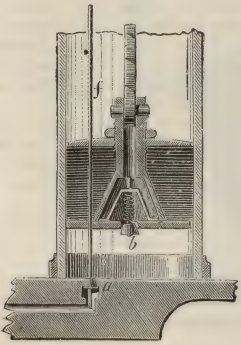


Fig. 285.

La compression de l'air et des gaz s'effectue à l'aide d'instruments spéciaux, appelés *machines* ou *pompes de compression*.

Machine à deux corps de pompe. — Une machine pneumatique ordinaire, dans laquelle le jeu des soupapes serait renversé, pourrait servir de machine de compression. Tandis que dans la machine pneumatique les soupapes s'ouvrent de bas en haut, ici elle s'ouvriraient de haut en bas (fig. 285). La soupape *b* réglerait la communication entre le cylindre et l'atmosphère extérieure (ou le réservoir à gaz); la soupape *a* réglerait celle du cylindre avec le récipient où l'on doit comprimer le gaz. Lorsque le piston monterait, l'air se raréfiant en dessous,

la soupape *a* resterait fermée et la soupape inférieure *b* s'ouvrirait par l'effet de la pression atmosphérique : l'air extérieur entrerait alors, par le conduit extérieur du piston, dans le corps de pompe. Lorsque le piston descendrait, l'air qui est au-dessous se comprimant maintiendrait la soupape *b* fermée, tandis que la soupape *a* s'ouvrant donnerait passage à l'air refoulé, qui se rendrait dans le récipient.

Cette forme de machine à deux corps de pompe a été construite, et se rencontre encore dans les vieilles collections : c'est celle

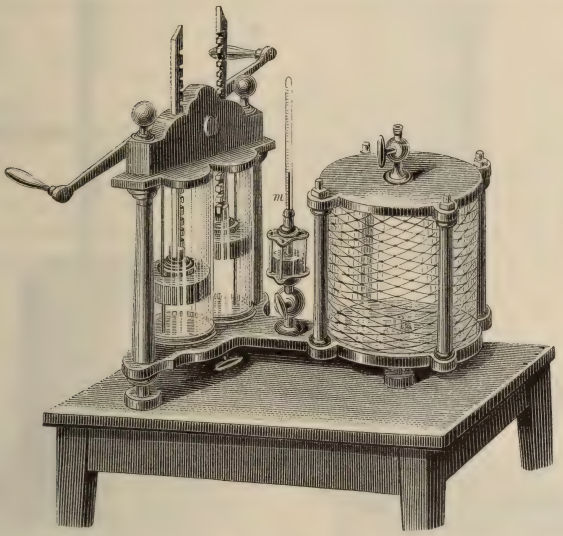


Fig. 286

que représente la figure 286. Elle rappelle extérieurement la machine pneumatique ordinaire : le récipient seul paraît différent ; c'est ici un cylindre en toile métallique solidement serré entre deux platines, par un système de colonnes et d'écrous.

Mais l'appareil ainsi construit est à la fois incommode, volumineux et peu solide. Il a été complètement abandonné et remplacé par des machines à un seul cylindre et à simple effet, dites *pompes de compression*.

258. **Pompe à main.** — C'est la plus simple et la plus commode

des pompes de compression. Elle peut avoir l'une des deux formes indiquées aux figures 287 et 288.

Description. — La *pompe à main* se compose d'un corps de pompe A de petit diamètre (fig. 287), dans lequel on fait mouvoir à la main, au moyen d'une poignée, un piston *plein* (c'est-à-dire sans soupape). Le corps de pompe est muni, à sa base, de deux tubulures horizontales à robinet; dans ces tubulures sont

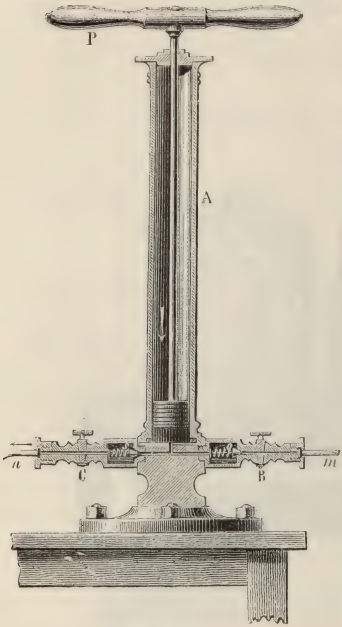


Fig. 287.

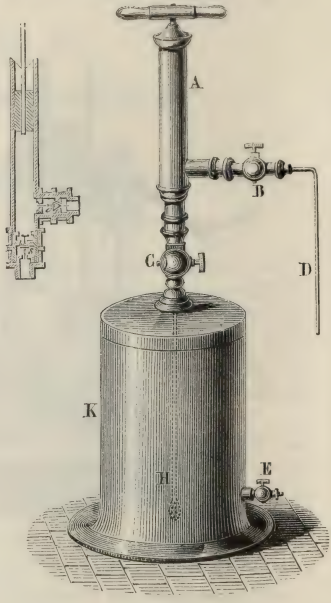


Fig. 288.

deux soupapes *o* et *s*, agissant en sens contraires, pour servir, la première à l'aspiration, la seconde au refoulement. De petits ressorts à boudin appuient sur les soupapes pour les maintenir fermées. Le jeu est entièrement le même que dans la machine de compression précédemment décrite (257).

Usage. — La pompe à main peut servir, par exemple, pour faire dissoudre l'acide carbonique ou tout autre gaz dans l'eau. La soupape de compression *s* est placée à la base du corps de pompe

dans une tubulure verticale C qui se visse directement sur le récipient K (fig. 288), tandis que la soupape d'aspiration est placée dans une tubulure latérale B, qui est mise en communication par le tube D avec le gazomètre à acide carbonique. La pompe aspire ce gaz et le refoule dans le vase K, où il se dissout en quantité d'autant plus grande qu'il est plus comprimé (243, 1°). C'est à l'aide d'appareils analogues que sont fabriquées les eaux gazeuses artificielles.

Remarques. — 1° *Robinets.* — On place maintenant des robinets à trois voies, en B et C, sur les tubulures latérales du cylindre; cela permet de rétablir à volonté la pression atmosphérique soit sous la pompe seule, soit dans le récipient seul, soit des deux côtés à la fois.

2° *Utilisation des pompes de compression comme machines pneumatiques.* — Ces pompes peuvent aussi servir à faire le vide. Pour cela, on fait communiquer la tubulure *m* avec le récipient d'où l'on veut aspirer l'air et la tubulure *n* avec l'atmosphère.

259. **Pompe de Silbermann.** — C'est une forme perfectionnée de la pompe à main. Elle peut servir à volonté de pompe pneumatique ou de pompe de compression. Les figures 289 et 290 font comprendre le jeu de l'appareil. Le robinet R permet soit d'isoler les récipients à gaz du corps de pompe, soit d'établir ou de supprimer la communication directe entre les deux récipients.

260. **Grande pompe de compression.** — Regnault s'est servi, dans ses expériences sur la loi de Mariotte, d'une machine de compression assez puissante pour donner au gaz du réservoir une pression de 30 atmosphères.

Description. — Cette machine se compose de trois pompes Silbermann accouplées (fig. 291). Les tiges des trois pistons sont articulées, par l'intermédiaire de trois *bielles*, à trois portions coudées d'un même axe. Cet axe, muni d'un volant, est mis en mouvement à l'aide d'une ou deux manivelles. Tous les conduits d'aspiration d'une part, et tous les conduits de compression d'autre part, viennent déboucher dans des réservoirs sphériques, lesquels sont reliés directement, l'un avec le gazomètre où l'on puise le gaz, et l'autre avec le récipient où on le comprime. Tout cet appareil est construit comme une machine industrielle et établi sur le sol, où il est solidement boulonné.

Remarque.— Comme on l'a vu précédemment (187), la compression des gaz est accompagnée d'un dégagement de chaleur plus ou moins considérable. C'est là un obstacle très sérieux au fonctionnement de ces machines. La chaleur dégagée altère les garnitures

et peut faire gripper les pistons. On atténue ces inconvénients, dans quelques machines industrielles, en noyant les soupapes inférieures dans un réservoir d'eau à une température constante. On arrive ainsi à comprimer l'air, sans inconvénients, jusqu'à 50 atmosphères.

261. **Pompe Cailletet.** — M. Cailletet a supprimé à la fois les inconvénients de l'échauffement et de l'*espace nuisible* dans une pompe de compression *à piston mercuriel*, qu'il a spécialement construite pour ses expériences de liquéfaction des gaz.

L'originalité de cet appareil réside dans la disposition du piston. Le corps de pompe et le piston sont renversés ;

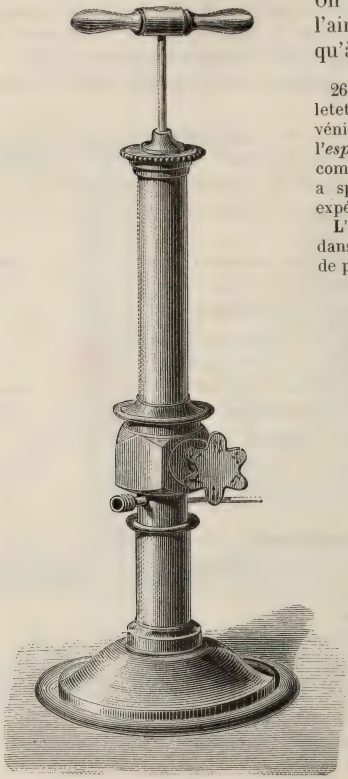


Fig. 289.

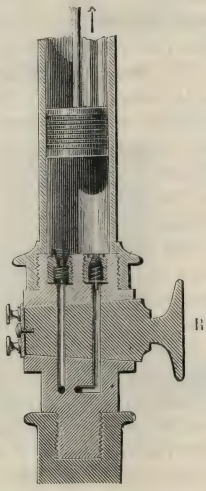


Fig. 290.

au-dessus de ce dernier se trouve une couche de mercure, de sorte que, à chaque coup de piston, le mercure vient remplir complètement le fond du corps de pompe (supprimant ainsi tout espace nuisible) et soulever la soupape, qui établit la communication avec le récipient (cette soupape est en ébonite, pour éviter l'altération due à l'action du mercure). Quant à la soupape d'aspiration, elle est supprimée : M. Cailletet l'a remplacée par un robinet, qui s'ouvre et se ferme en temps voulu au moyen d'un système de cames. Enfin le mouvement du piston est produit mécaniquement, à l'aide du mouvement rotatif d'un volant.

Cette pompe permet de comprimer des masses de gaz considérables sous des

pressions de plusieurs centaines d'atmosphères. Elle a servi à M. Cailletet pour liquéfier d'abord l'acide carbonique, le protozyde d'azote et l'éthylène, puis à comprimer les gaz permanents, qu'il a pu liquéfier en joignant à la compression l'action réfrigérante des liquides précédemment obtenus.

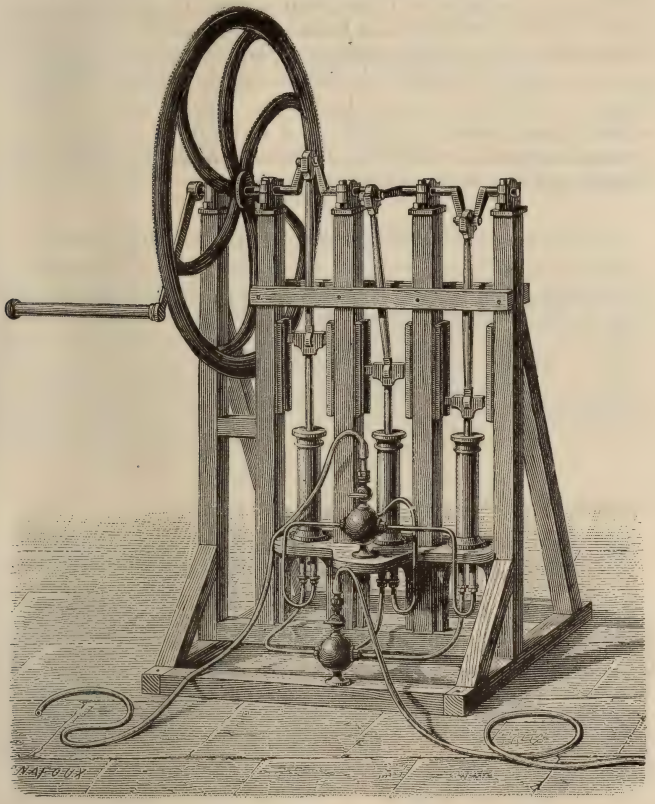


Fig. 291.

262. **Théorie des machines de compression.** — Quelle que soit la forme de la machine employée, la loi de condensation du gaz est toujours la même. Ici, comme pour la raréfaction, il y a deux cas à considérer : celui où l'on ne tient pas compte de l'espace nuisible — cas purement théorique — et le cas où l'on tient compte de l'espace nuisible, qui est celui de la pratique.

1° *Condensation sans espace nuisible.* — Soit R la capacité du récipient, C la capacité du corps de pompe, H_0 la pression initiale du gaz dans le récipient, et H la pression, *supposée constante*, dans le réservoir. Au début, le piston étant soulevé, le cylindre se remplit de gaz à la pression H, et la soupape est baissée : nous avons donc deux masses de gaz distinctes, l'une occupant le volume C à la pression H et l'autre occupant le volume R à la pression H_0. Quand on abaisse le piston, la soupape cède et tout le gaz du cylindre passe dans le récipient. A ce moment, on a un mélange gazeux occupant le volume R à la pression finale H_1, laquelle est fournie par l'équation du mélange des gaz

$$H_1R = H_0R + HC, \qquad \text{d'où} \qquad H_1 = H_0 + H\frac{C}{R};$$

H_1 est la pression dans le récipient après le premier coup de piston. Après le deuxième coup, on aura de même

$$H_2 = H_1 + H\frac{C}{R},$$

ou bien

$$H_2 = H_0 + 2H\frac{C}{R}$$

Après 3, 4, ... *n* coups, on aura

$$[1] \qquad H_n = H_0 + nH\frac{C}{R}.$$

2° *Condensation avec l'espace nuisible.* — Soit *e* l'espace nuisible. Les conditions initiales ne sont pas changées, c'est-à-dire qu'on a toujours au début, quand le piston est au haut de sa course, deux masses de gaz distinctes, l'une occupant le volume R à la pression H_0 et l'autre le volume C à la pression H. Mais lorsque le piston est au bas de sa course, le gaz est réduit au volume R, augmenté du volume *e* de l'espace nuisible ; on a donc un mélange gazeux occupant le volume total $R + e$ à la pression totale H_1. L'équation du mélange des gaz donne

$$(R + e)H_1 = RH_0 + CH, \qquad \text{d'où} \qquad H_1 = H_0\frac{R}{R+e} + H\frac{C}{R+e}.$$

On peut ainsi calculer les pressions successives $H_1, H_2, \ldots H_n$. On aura une suite d'équations analogues, d'où l'on pourra déduire une relation finale entre H_n, H_0 et les données de l'appareil (*même procédé d'élimination de* H_1, H_2, H_{n-1} *que pour la loi de raréfaction*). On arrivera ainsi à la formule

$$[2] \qquad H_n = H_0\left(\frac{R}{R+e}\right)^n + H\frac{C}{e}\left[1 - \left(\frac{R}{R+e}\right)^n\right].$$

265. Limite de la condensation. — 1° *Formule.* — D'après la formule [1]

il n'y aurait pas de limite à la condensation du gaz dans le récipient. En effet, la pression H_n au bout de n coups de piston est la somme de n termes d'une progression *arithmétique* dont la raison est $\frac{C}{R}$ H. Cette somme peut devenir plus grande que toute quantité donnée ; pour $n = \infty$, on aurait $H_n = \infty$.

Mais ce n'est là qu'un cas purement théorique, puisqu'il existe toujours un espace nuisible plus ou moins grand dans les machines les mieux construites. Il faut donc appliquer la formule [2]. Si l'on y fait $n = \infty$, il vient

$$H_n = \frac{C}{e} H = \lambda,$$

c'est-à-dire que la pression ne croît pas indéfiniment dans le récipient ; elle tend vers la valeur limite λ, qu'elle n'atteint jamais dans la pratique, puisqu'il faudrait pour cela donner un nombre infini de coups de piston.

2° *Démonstration directe de la formule.* — On peut trouver λ directement, comme dans le cas du vide. En effet, la machine cessera de fonctionner, par le fait de l'espace nuisible, lorsque la pression finira par atteindre dans le récipient celle que le gaz atteint dans l'espace nuisible, chaque fois que le piston est au bas de sa course. Or, H étant la pression initiale du gaz qui remplit le cylindre quand le piston est au haut de sa course, la pression finale est donnée par la loi de Mariotte lorsque cette masse est réduite au volume e. On a

$$\lambda e = HC, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = H\frac{C}{e}.$$

Lorsque la pression sera devenue λ dans le récipient, la soupape, étant également pressée de part et d'autre, ne s'ouvrira plus, et la machine cessera de fonctionner.

3° *Limite pratique de la condensation.* — Les imperfections de construction empêchent généralement d'atteindre cette limite théorique. Il y a des fuites, qui sont de plus en plus abondantes, et qui finissent par égaler les introductions ; à ce moment, la *limite pratique* est atteinte : on ne gagne plus rien à pomper, on ne fait qu'entretenir la pression maximum.

4° *Remarque générale.* — L'existence de l'espace nuisible dans les machines de compression n'a pas le même inconvénient que dans les machines pneumatiques. Dans celles-ci, en effet, qui ont pour fonction de raréfier l'air *autant que possible*, l'espace nuisible oppose à la raréfaction une limite qu'on peut reculer, mais qu'on ne peut supprimer. Les machines de compression sont destinées au contraire à obtenir une pression plus ou moins grande, mais déterminée. Le constructeur peut donc toujours régler d'avance le rapport de $\frac{C}{e}$ de manière que la limite théorique λ soit plus

élevée que la pression qu'on veut atteindre : dans ce cas, l'*espace nuisible* ne *nuit* pas en réalité à l'effet définitif.

TROMPES ASPIRANTES ET SOUFFLANTES.

264. **Définitions. — Principe.** — Nous avons dit que les machines et pompes de compression peuvent servir tour à tour à comprimer les gaz et à les raréfier. A cette catégorie d'instruments on peut rattacher les *trompes aspirantes* et *soufflantes*. Ce sont des appareils qui *aspirent* l'air dans un récipient pour le *souffler* ou le comprimer dans un autre. Ils fonctionnent en quelque sorte automatiquement, par l'intermédiaire d'un courant d'eau ou d'un autre liquide. Ils sont donc fondés sur un principe complètement différent de celui des pompes pneumatiques.

Considérons un courant liquide qui s'écoule dans un canal de direction quelconque, mais de forme particulière, qui constitue essentiellement la *trompe*. Il est formé par deux cylindres de même rayon qui sont réunis soit par un ajutage cylindrique plus étroit et continu (fig. 292), soit par un ajutage discontinu, composé de deux troncs de cône opposés par leurs petites bases (fig. 293). Supposons que le régime permanent du courant soit établi, c'est-à-dire que la vitesse de l'écoulement, en chaque point du canal, ne dépende que de la position de ce point et soit indépendante du temps. Si le liquide va dans le sens de la flèche, c'est-à-dire de *mn* vers H (fig. 292), de la partie étroite vers la partie renflée, la vitesse du courant est nécessairement moins grande ici que là et subit, par suite, une diminution plus ou moins brusque dans cet intervalle ; or on constate que, en même temps que la

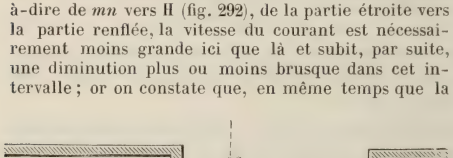


Fig. 292.

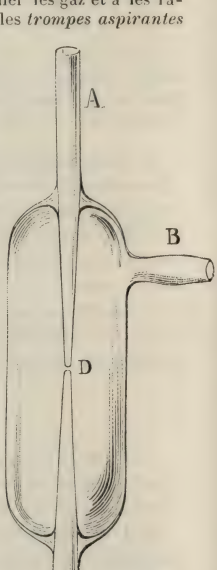


Fig. 293.

vitesse diminue, la pression exercée sur chaque tranche de liquide augmente, de sorte que si le gros bout du canal débouche dans l'atmosphère, où la pression est H, la pression sur une tranche *mn* de la portion étroite est inférieure à H. Si donc on a pratiqué dans l'épaisseur de la paroi des ouvertures *m* et *n*, l'air extérieur sera poussé dans le canal, à cause de la différence des pressions, et entraîné avec le courant liquide.

Par conséquent, *le vide se fera en m*, et si le canal est mis en communication, par cet orifice, avec un récipient à gaz, l'appareil pourra *y faire le vide*. Si le courant d'eau se rend en H dans un récipient fermé, le gaz se dégagera

du liquide qui l'entraîne, et pourra s'accumuler et se comprimer lui-même au-dessus de la surface libre liquide : en H, l'appareil fonctionnera *comme une machine de compression*. Dans l'un et l'autre cas, l'action de la trompe sera lente, mais continue, et elle présentera l'avantage d'être automatique.

Parmi les appareils fondés sur ce principe, nous décrirons :

1° La *petite trompe à eau d'Alvergniat* (à simple effet ou à double effet);

2° La *trompe portative de M. Lionet;*

3° La *trompe à mercure* ou *aspirateur de Sprengel;*

4° La *machine soufflante* employée dans les laboratoires ou dans les forges pour avoir de l'air comprimé ;

5° La *trompe aspirante et soufflante d'Alvergniat*, modèle simplifié de cette dernière machine, qui est plus ou moins encombrante.

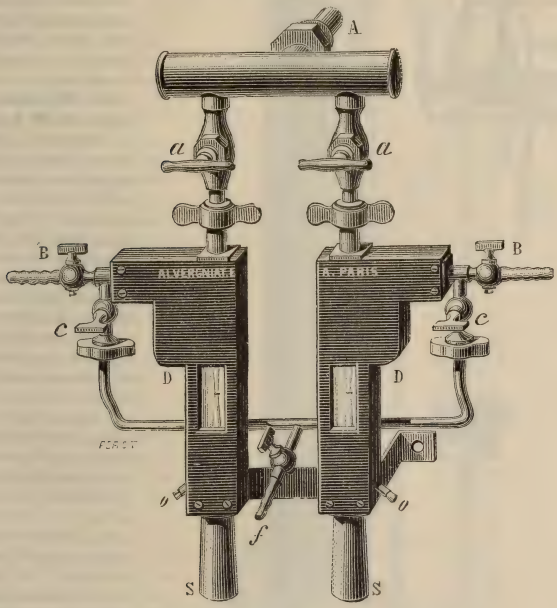


Fig. 294

265. **Petite trompe à eau d'Alvergniat.** — C'est une trompe spécialement destinée à faire rapidement un vide imparfait. L'appareil est entièrement construit en verre (fig. 293). La tubulure A est adaptée directement à un robinet de fontaine : l'écoulement prend un régime permanent; l'eau passe de l'ajutage conique A à l'ajutage conique D : l'aspiration se produit au point D, et l'appel d'air se fait de l'extérieur par la tubulure B. Si cette tubulure est adaptée à un récipient plein de gaz, on y fait rapidement le vide, jusqu'à une pression au plus égale à la tension maximum qu'a la vapeur d'eau à la température ambiante; mais on voit qu'on n'obtient pas ainsi un *vide sec*.

Trompe à double effet. — La figure 294 représente le même appareil enveloppé d'une garniture protectrice en fer. Il y a deux trompes accouplées, de manière à constituer une sorte de machine à double effet.

L'eau d'une fontaine quelconque arrive directement par la tubulure A dans une sorte de distributeur, d'où elle tombe à la fois dans les deux trompes par les tubulures à robinet *a* et *a*. L'air (ou le gaz) est aspiré, soit dans deux récipients distincts par les tubes B et B, soit dans un même récipient par la tubulure *f*, qui le distribue aux deux trompes par l'intermédiaire des tubes à robinet *c* et *c*.

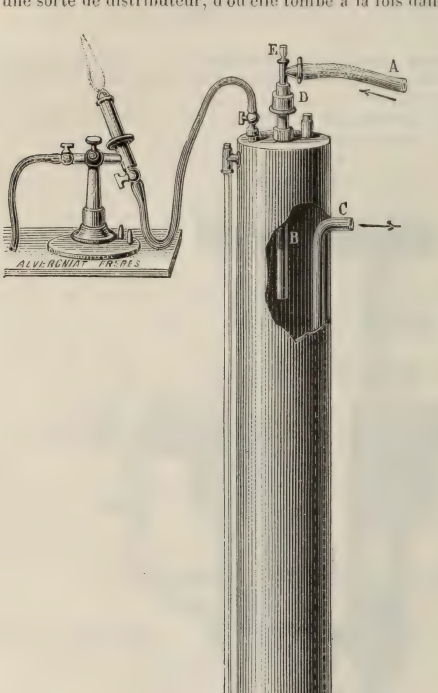


Fig. 295.

266. **Trompe portative de M. Lionet.** — L'appareil précédent est utilisé comme aspirateur ; une autre petite trompe à eau analogue, construite aussi par M. Alvergniat sur les indications de M. Lionet, est utilisée au contraire comme *souffleur* ou *compresseur*. Elle peut servir à alimenter un chalumeau pour travailler le verre. C'est un appareil très commode, parce qu'il est portatif : il est représenté par la figure 295. L'eau arrive par la tubulure A, et tombe dans un manchon métallique clos M par la tubulure B, après avoir entraîné l'air extérieur par un orifice latéral D pratiqué sur son passage. L'air entraîné par l'eau s'en sépare en B et monte au sommet du cylindre, où il s'accumule et se comprime. Cet air comprimé a deux effets : d'un côté, il pousse à l'extérieur, par le tube abducteur C, l'eau qui s'accumule au fond du manchon et finirait par le remplir ; d'autre part, il peut servir à alimenter par le tube *t* un chalumeau H.

267. **Aspirateur de Sprengel : pompe-trompe d'Alvergniat.** — L'aspirateur de Sprengel est le type des trompes à mercure. La figure 296 représente

le modèle le plus récent et le plus perfectionné d'aspirateur, construit par MM. Alvergniat, sous le nom de *pompe-trompe à mercure*.

Description. — L'appareil est tout en verre. Il se compose d'une machine ou pompe à mercure ordinaire accouplée avec un aspirateur à six chutes de mercure. La *pompe* est représentée à la droite de la figure et comprend le mécanisme M, le récipient mobile R, les deux tubes T et T′ reliés par un tube en caoutchouc, et enfin l'ampoule A, avec le tube abducteur *mn* d'une part et es tubes d'aspiration *pqf* d'autre part. La *trompe* est représentée à la gauche de la figure, et comprend le récipient mobile R, le gros tube T et le petit tube latéral *ab*, reliés entre eux par le caoutchouc ainsi que par l'ampoule A′ à robinets *r* et *r′*, par le tube descendant *cd*, le double tube ascendant *dt* et *dt′*, enfin par les deux trompes à triple chute *t* et *t′* qui viennent aboutir à la cuvette C.

2° *Manipulation.* — Le récipient où l'on veut faire le vide est mis en communication avec l'appareil par le tube latéral *f*. On commence le vide à l'aide de la pompe proprement dite; on l'achèvera ensuite à l'aide de la trompe.

Pour faire fonctionner la pompe seule, on tourne le robinet à trois voies *r* de manière à intercepter toute communication entre le tube T′ d'une part

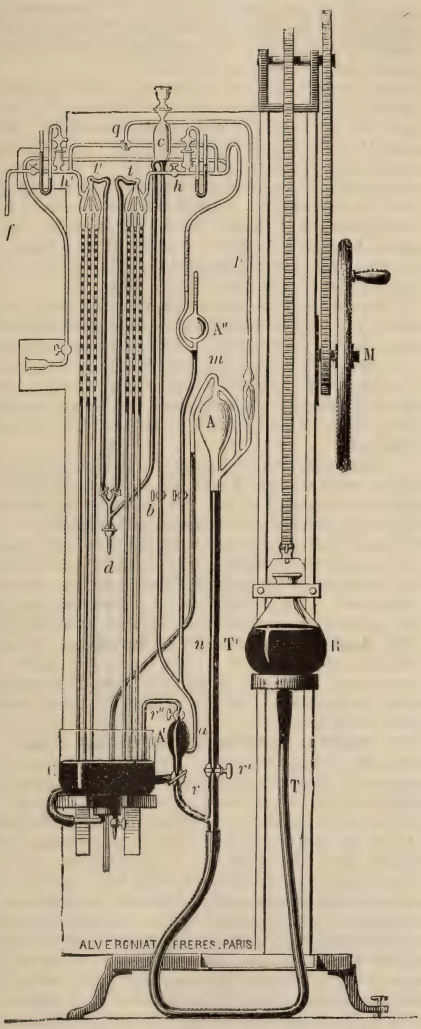


Fig. 296.

et la cuvette ainsi que le tube *ab* d'autre part. Les deux parties de l'appareil sont ainsi complètement séparées. On manœuvre alors la pompe à mercure comme on l'a indiqué précédemment : l'air est appelé par les tubes *f*, *q*, *p* dans l'ampoule A et il en est chassé par le tube abducteur *mn*, lequel débouche dans le mercure de la cuvette.

Pour achever le vide, on tourne d'abord le robinet *r*, de manière à intercepter la communication entre le récipient R et le tube T' et à l'établir, au contraire, entre R et la trompe proprement dite, par l'intermédiaire de l'ampoule A' et du tube *ab*. — D'ailleurs la communication est également fermée, par le robinet *r''*, entre le récipient R et la cuvette. Cela fait, on relève le récipient mobile à l'aide du mécanisme M jusqu'à une hauteur suffisante : le mercure s'élève en même temps dans l'autre branche de ce système de vases communiquants, et remonte lentement jusqu'au sommet *tt'* des trompes, en suivant le chemin A'*abcd* et *t* ou *t'* : de là il tombe goutte à goutte par les six branches descendantes, en produisant la succion de l'air qui arrive du récipient à gaz par les deux chemins *fh't'* et *fh'ht*.

3° *Détails.* — A'. Il y a toujours une couche d'air plus ou moins épaisse qui adhère à la surface intérieure du tube en caoutchouc. Cet air, étant entraîné par le mercure ascendant, viendrait nécessairement gêner le fonctionnement de la trompe et limiter le degré du vide, comme une espèce d'espace nuisible.

L'ampoule A', disposée à l'entrée du tube *ab* (comme l'ampoule de Bunsen dans le baromètre à siphon), sert à saisir au passage et à recueillir l'air entraîné. Quand il est recueilli, on la vide par le tube abducteur que commande le robinet *r''*.

r. Dans l'aspirateur ordinaire, on était obligé de remonter à la main jusqu'au sommet de la trompe le mercure tombé dans la cuvette. Cette manœuvre fatigante est remplacée ici par la manœuvre plus facile de la pompe d'Alvergniat. On n'a qu'à tourner convenablement le *robinet r* et à abaisser le récipient mobile pour y faire passer tout le mercure de la cuvette.

A''. L'ampoule A'' est une jauge de Mac Leod, destinée à mesurer la faible tension du résidu gazeux quand la limite du vide est atteinte.

Remarque. — La substitution du mercure à l'eau, pour opérer la succion de l'air, permet d'obtenir dans le récipient à gaz un vide absolument sec.

268. **Aspirateur ordinaire de Sprengel.** — C'est un aspirateur à une seule chute, qui par suite fait le vide sec six fois moins vite que la pompe-trompe d'Alvergniat. De plus, il nécessite l'emploi d'une pompe à mercure ou autre machine pneumatique, c'est-à-dire d'un deuxième appareil distinct de la trompe pour opérer le vide.

269. **Machine soufflante** ou **Trompe à eau.** — Dans les laboratoires et quelquefois dans l'industrie, on se procure d'une manière continue de l'air comprimé, au moyen d'un dispositif installé à poste fixe : c'est ce qu'on appelle proprement la *trompe à eau* ou *machine soufflante*. La figure 297 est le schéma d'un de ces appareils : nous allons en indiquer le principe.

L'eau de la ville ou l'eau d'une source voisine arrive, par une conduite ordinaire, dans une sorte de réservoir E, d'où elle tombe dans le tube E*m* et s'écoule par l'ajutage conique effilé *m*. L'appel d'air se fait en *m*, par un orifice qui communique ainsi soit avec un gazomètre R, soit avec l'atmosphère. Le gaz entraîné par le courant liquide s'en sépare dans le réservoir à eau M, et va s'accumuler dans le haut du réservoir inférieur. Là il se comprime lui-même au-dessus de la surface libre du liquide, et prend une force élastique croissante, jusqu'à ce qu'on lui ouvre une issue par le tube abducteur à robinet R' qui l'amène aux points du laboratoire où l'on veut l'utiliser. La pression acquise par la masse gazeuse est d'autant plus grande que le niveau dans le réservoir E est plus élevé au-dessus du niveau dans le réservoir inférieur.

270. **Trompe aspirante et soufflante d'Alvergniat.** — Depuis peu de

temps, M. Alvergniat construit un appareil portatif, qui peut rendre les mêmes services que la grande trompe des laboratoires (fig. 298).

Description. — L'appareil se compose essentiellement d'un petit cylindre G, qui réalise le réservoir de la figure schématique 297 : c'est là que tombent et

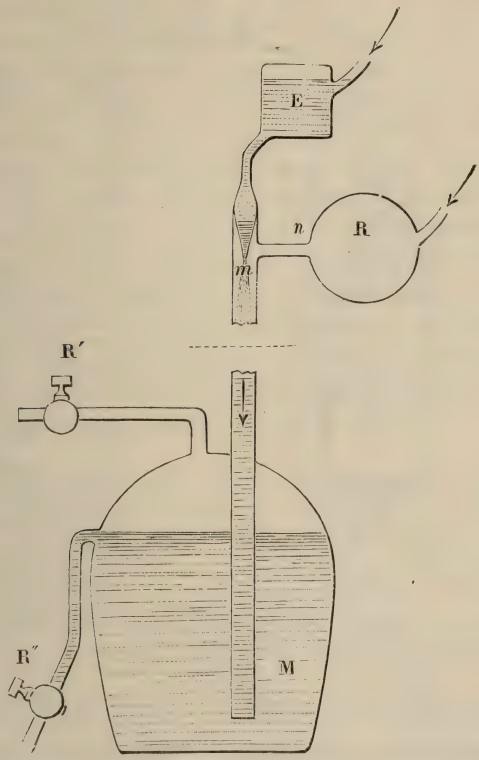


Fig. 297.

s'accumulent l'air et l'eau, amenés par une tubulure verticale BAO qui peut s'adapter à une conduite d'eau de la ville.

Au bas du cylindre se trouve une tubulure à robinet H, qui permet de régler l'écoulement de l'eau du cylindre ; un indicateur de niveau F indique à chaque instant la quantité d'eau accumulée. En haut, en D′, se trouve le tube abducteur, à robinet D′, par où s'échappe l'air comprimé. L'aspiration est produite au niveau du tube en cuivre CE. Ce tube porte en son milieu un robinet E et, sur le côté opposé à ce robinet, une clef mobile C (qui est représentée à part en C) : c'est cette pièce qui constitue la trompe aspirante.

Installation. — On soude une pièce à écrou D sur la conduite d'eau du laboratoire, puis on visse sur celle-ci le robinet A, et on relie la trompe elle-même à ce robinet auxiliaire, à l'aide d'un écrou spécial B.

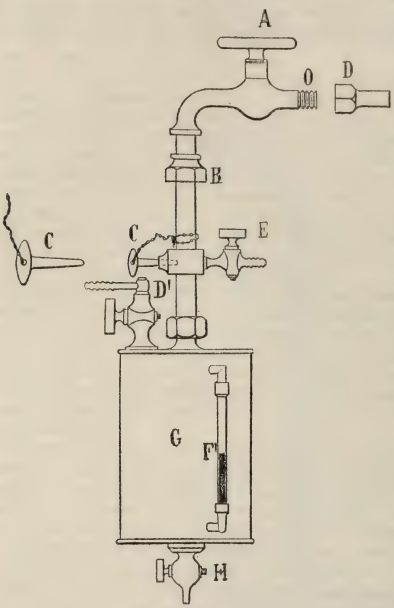


Fig. 298.

Fonctionnement. — On peut utiliser l'appareil soit comme trompe soufflante, soit comme trompe aspirante.

1° *Trompe soufflante.* — On retire la clef mobile C, on laisse ouvert ou fermé le robinet E, puis l'on ouvre les robinets H et D', enfin on fait arriver l'eau par le robinet A. L'air extérieur, entraîné par le courant d'eau, entre dans la trompe par l'orifice ouvert en C et pénètre avec l'eau dans le cylindre G où se fait la séparation.

Pour avoir un fonctionnement régulier, il faut maintenir constant le niveau de l'eau dans le cylindre, ce qui s'obtient aisément en réglant l'écoulement de l'eau à l'aide du robinet H.

2° *Trompe aspirante.* — On remet en place la clef O, puis on ferme le robinet D', on ouvre le robinet A, puis le robinet E dont la tubulure est mise en communication avec le récipient qu'il s'agit de vider.

APPLICATIONS DE L'AIR COMPRIMÉ ET DE L'AIR RARÉFIÉ.

271. **Généralités et classification.** — L'air comprimé, soit employé seul, soit associé à l'air raréfié, a depuis longtemps donné lieu à des applications de plus en plus nombreuses et intéressantes. Les plus anciennes sont les pompes, les siphons, les fontaines diverses, les machines élévatoires, et autres engins destinés à produire et à régler l'écoulement des liquides. Nous les étudierons dans le livre suivant, qui est consacré, en partie, aux notions d'hydrodynamique. Ces applications gardent un caractère scientifique, en ce sens que, dans la plupart des cas, on peut calculer d'avance, avec une certaine rigueur, les effets mécaniques de l'air

comprimé ou de l'air raréfié. Les autres applications, plus ou moins récentes, sont d'un ordre presque exclusivement industriel. L'air comprimé y joue le plus souvent le rôle d'une sorte de ressort métallique, dans lequel on a emmagasiné une provision de travail plus ou moins considérable et qu'on dépense ensuite, en détendant l'air, à un moment donné et sur un point déterminé, dans les conditions d'utilisation les plus favorables. On peut classer ces applications suivant la manière dont on réalise la détente de l'air comprimé. Tantôt on la produit d'un manière brusque et intermittente, comme dans le *fusil à vent*, la *poste* ou *télégraphe pneumatique*, les *horloges pneumatiques*, le *frein Westinghouse;* tantôt elle se réalise d'une manière lente, progressive et continue, comme dans les anciens *chemins de fer atmosphériques* (Kingstown, Saint-Germain), ou bien dans les récents systèmes de locomotion ou de transport à air comprimé (*voiture automobile Mékarski*, *locomotive Ribourt*) ; dans les *machines perforatrices*, qui ont été inventées pour le percement des tunnels du mont Cenis, du Saint-Gothard et de l'Arlberg; enfin, dans les appareils à air comprimé employés pour exécuter certains travaux sous l'eau, tels que le forage de puits de mine ou la fondation des piles de pont (*cloches à plongeur*, *scaphandres*, *appareils Triger*).

272. **Fusil à vent.** — Le *fusil à vent* est une des plus anciennes applications de l'air comprimé. L'*arquebuse à vent* a été quelque temps en usage dans les armées. Ce n'est plus aujourd'hui qu'un instrument de physique curieux.

Le *fusil à vent* a l'aspect extérieur d'un fusil ordinaire (fig. 299, I); toutefois le canon en est plus long, parce qu'il y a intérêt à prolonger l'action de l'air comprimé : or la détente de l'air agit évidemment aussi longtemps que le projectile n'est pas expulsé de l'âme du canon. La figure 299, II, représente (en coupe) le mécanisme de l'instrument.

Le réservoir à air comprimé est dans la *crosse* même M, laquelle est creusée en forme de boîte métallique très résistante : on y comprime l'air à une pression au moins égale à 8 ou 10 atmosphères. La communication entre le réservoir et l'*âme* du canon, qui renferme la balle, peut être établie à volonté par le jeu d'une soupape conique S. Au repos, la soupape est appliquée contre l'orifice du réservoir par l'air comprimé lui-même, et la communication est interrompue; mais si l'on appuie sur la *détente d*, le *chien* s'abaisse sur un petit levier *e*, dont l'autre bras pousse alors une tige H', qui force la soupape à céder brusquement et à ouvrir un passage à l'air comprimé. Celui-ci se détend et chasse la balle, avec une vitesse qui dépend de la force élastique initiale.

Cette vitesse peut atteindre celle des balles de fusil ordinaire; mais elle diminue rapidement, aux décharges suivantes, à mesure que le réservoir se vide. Il faut donc, après un petit nombre de coups, recharger le fusil, c'est-à-dire remplir de nouveau la crosse avec de l'air comprimé.

273. **Poste** ou **Télégraphe pneumatique.** — Depuis quelques années [1], le

1. Ce nouveau système fut inauguré à Londres en 1854; il est établi à Paris depuis 1865.

service télégraphique dans l'intérieur des grandes villes s'effectue non pas à l'aide de l'électricité, mais à l'aide de l'air comprimé. Les dépêches, au lieu

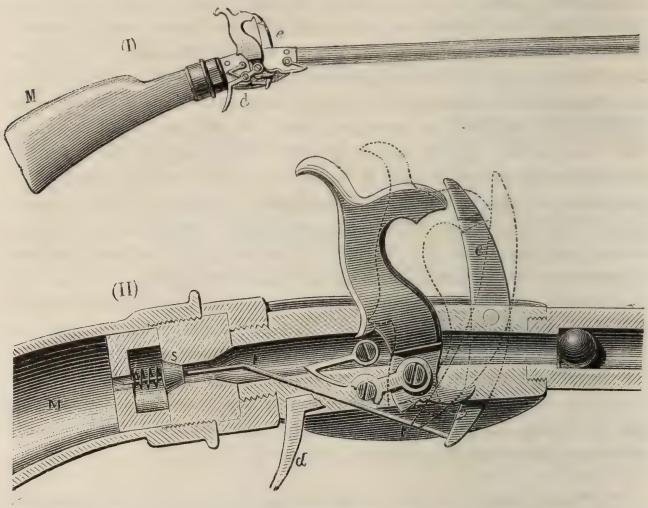


Fig. 299.

d'être expédiées séparément, sont empilées par groupes de 30 à 40 dans des boîtes en tôle recouvertes de cuir. On expédie en même temps 10 de ces boîtes, formant, avec un piston, une sorte de *train*, du poids de 4 kilogrammes. (La figure 300 représente le piston et une boîte à dépêches ouverte.) Ce train cir-

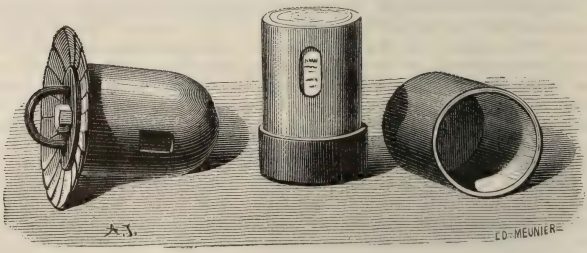


Fig. 300.

cule, non pas sur une voie ferrée, mais dans un *tube* en fonte, de 0m,065 de diamètre, et de un à deux kilomètres de longueur, qui relie les deux stations par une voie souterraine. De la station de départ il est *poussé* par un réservoir

à air comprimé, en même temps qu'il est *aspiré*, de la station d'arrivée, par

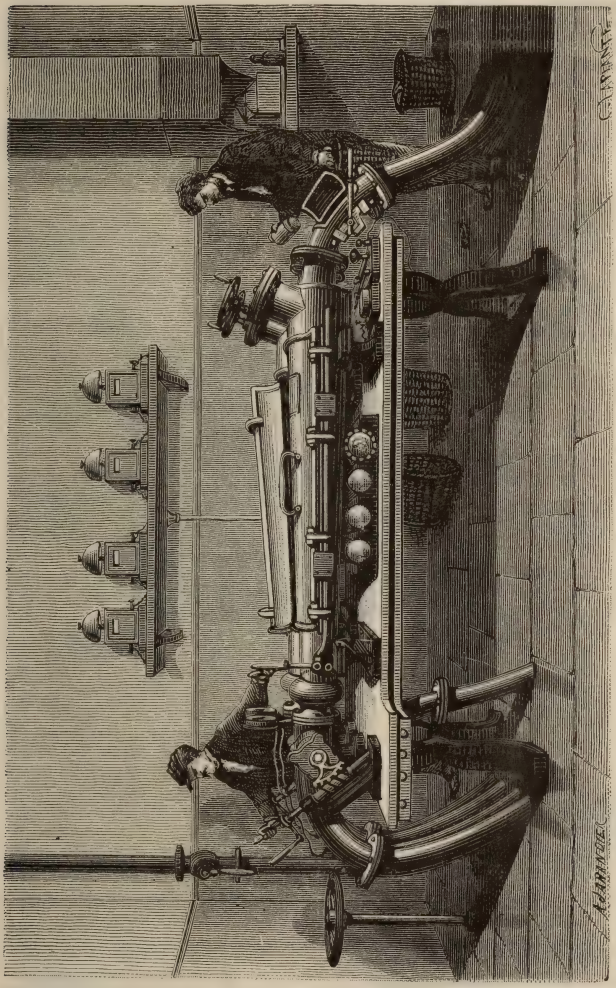


Fig. 301.

un réservoir à air raréfié. La différence des pressions exercées sur les deux faces du train ne dépasse pas trois quarts d'atmosphère, et cette poussée suffit

pour lui communiquer une vitesse moyenne de 1 kilomètre par minute. La compression et la raréfaction de l'air s'opéraient très simplement, au début, au moyen d'une sorte de fontaine de Héron, alimentée par les eaux de la ville. La complication du service actuel oblige d'employer, outre cette machine hydraulique, des pompes aspirantes et foulantes, mues à la vapeur.

Fig. 302.

La première communication de ce genre fut établie entre les deux stations du Grand-Hôtel et de la Bourse, distantes de 1100 mètres. La figure 301 représente (en perspective) l'installation primitive d'un bureau. Chacune des extrémités du tube pneumatique se terminait par deux chambres à air qui servaient l'une à introduire, l'autre à extraire le train (réduit à une seule boîte, à l'origine). Chaque chambre pouvait être mise en communication tour à tour avec l'air comprimé et avec l'air raréfié (ou bien, au début, avec l'air libre de l'atmosphère).

Ce système de télégraphie a pris de rapides développements. Dès 1873, outre la station centrale, installée rue de Grenelle, à proximité de l'Administration centrale des Télégraphes, il y avait dix-sept stations de quartier. Aujourd'hui, toute la ville et la banlieue sont desservies par un réseau complet de tubes pneumatiques; mais la distance entre deux stations consécutives reste limitée à 2 kilomètres environ, à cause de la diminution rapide, qui résulte de la distance, dans la tension de l'air comprimé [1].

274. **Horloges pneumatiques.** — Une application, moins importante mais aussi curieuse, de l'air comprimé, c'est la distribution simultanée de l'heure dans tous les quartiers d'une ville. Depuis 1880, un réseau distributeur de l'heure est installé à Paris : il donne l'heure d'une horloge centrale (avec un léger retard, plus ou moins accusé suivant la distance) en divers points des places et boulevards, ainsi que dans des maisons particulières, où sont installées des horloges secondaires, dites *horloges pneumatiques* (fig. 302), reliées à l'horloge principale.

1. La vitesse des trains varie en raison inverse de la racine carrée des longueurs, dans des tubes de même section. Ainsi, la vitesse étant de 20 mètres par seconde dans un tube de 1000 mètres (sous la pression de 1 atmosphère) ne sera plus que de 6 mètres environ dans un tube de 10 kilomètres, de $4^{m},50$ dans un tube de 20 kilomètres.

Le système complet comporte donc : 1° une usine centrale, qui comprend les machines de compression, les réservoirs à air comprimé, l'horloge *normale* ou *directrice* et le mécanisme *distributeur;* 2° les horloges *secondaires* ou *réceptrices,* disséminées dans les divers quartiers; 3° enfin la canalisation, qui propage, du centre à la périphérie, l'action de l'air comprimé.

L'*horloge-type* est une horloge ordinaire, munie, en outre, d'un excentrique qui, à l'instant précis où l'aiguille marque *chaque minute*, produit un effet de

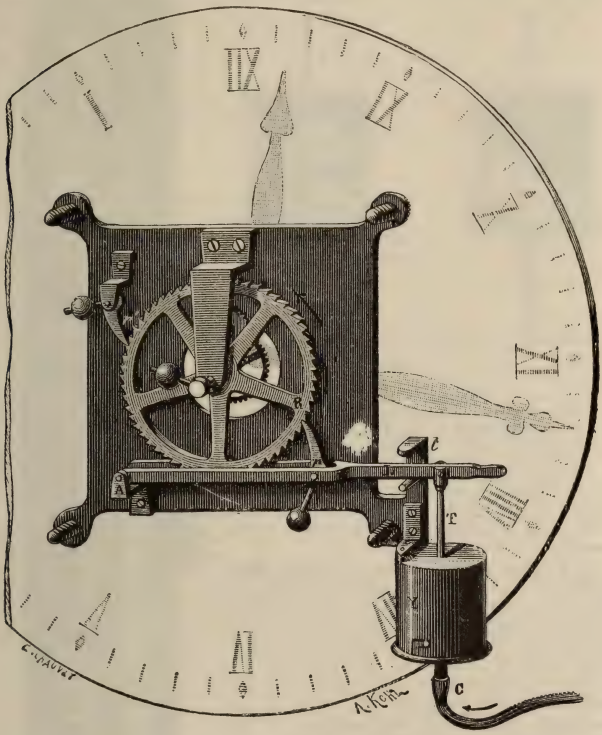


Fig. 303.

déclenchement, lequel met en jeu le mécanisme de distribution. Celui-ci consiste en une sorte de *boîte à tiroir* (analogue à celle des machines à vapeur), qui met, au moment voulu, la canalisation en communication avec de grands cylindres, dits *réservoirs à haute pression*, dans lesquels on maintient l'air comprimé à une pression constante de plusieurs atmosphères. L'air qui est lancé, à chaque minute, dans la canalisation, n'a d'ailleurs qu'un excédent de pression de sept dixièmes d'atmosphère; cela suffit pour faire jouer le mécanisme des horloges réceptrices.

Celles-ci ne sont pas de vraies horloges; ce sont des cadrans, munis de deux aiguilles, qui s'avancent par un mécanisme tout particulier (fig. 303). Le flux d'air comprimé arrive par un tuyau C dans un petit soufflet S (fig. 304), renfermé dans un tambour métallique Y. A l'état de repos, le soufflet est replié sur lui-même (fig. 304, I); le flux d'air vient le gonfler à chaque minute (fig. 304, II) et pousser en même temps une tige T qui est fixée à sa base supé-

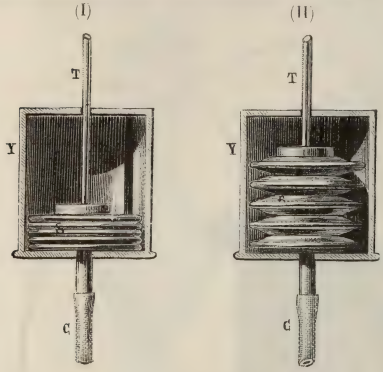


Fig. 304.

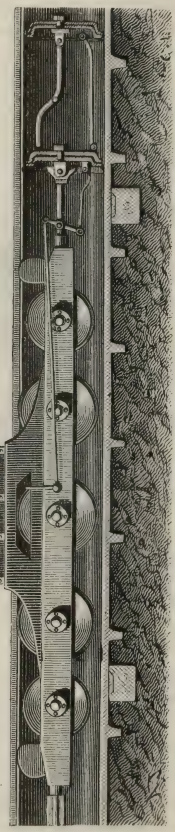


Fig. 305.

rieure. Le mouvement de cette tige T soulève un levier *l*, articulé en A (fig. 305), qui, par l'intermédiaire d'un rochet *r*, fait avancer d'une dent la roue dentée R. C'est l'axe de cette roue qui porte l'aiguille des minutes; comme la roue porte soixante dents, chaque tour complet correspond à une heure, et provoque un mouvement correspondant de l'aiguille des heures.

275. **Freins automoteurs. — Freins Westinghouse**. — On a récemment appliqué l'air comprimé au serrage continu et automatique des freins des wagons sur les voies ferrées. Avec ce système, le serrage peut s'effectuer simultanément sur toute la longueur du train, depuis la locomotive jusqu'à la dernière voiture. Le frein automoteur à air comprimé qui paraît le plus avantageux est le frein Westinghouse. Le mécanisme en est très ingénieux. L'air comprimé est lancé, à un moment donné, sur des pistons, qui arrêtent en quelques secondes un train lancé à toute vitesse.

276. **Chemins de fer atmosphériques.** — C'est plutôt une application de l'air raréfié que de l'air comprimé; et elle n'a plus qu'un intérêt historique, car elle est tombée en désuétude [1]; mais elle a

1. Ce mode de traction était beaucoup plus coûteux que l'emploi des locomotives à vapeur.

peut-être préparé l'invention de la poste pneumatique, car elle est fondée sur le même principe.

Le chemin de fer atmosphérique le plus connu est celui qui a fonctionné en France, pendant quelque temps, sur la pente rapide (0m,035 par mètre) de la ligne du Pecq à Saint-Germain [1]. Au milieu de la voie ferrée était fixé un tube pneumatique, de 63 centimètres de diamètre, où l'on faisait le vide, en avant du train, à l'aide de machines pneumatiques, mues à la vapeur, à la station de Saint-Germain. Le train tout entier était entraîné par un piston relié au premier wagon et poussé en avant dans le tube par la pression atmosphérique. Le tube était muni, à sa partie supérieure, d'une fente longitudinale, par où passait la lame ou tige fixe reliant le piston au wagon (fig. 305). En avant du piston, c'est-à-dire du côté du vide, la fente restait fermée par une bande de cuir, garnie de courtes lames de tôle, faisant fonction de soupape [2]; une série de galets, de grandeurs décroissantes, portés par le châssis du piston, soulevaient cette soupape à mesure que s'avançait la lame de jonction du piston.

Les dimensions du tube et des machines avaient été calculées de manière à donner à un train de 54 tonnes une vitesse de 1 kilomètre par minute, avec un excès de pression d'environ 1/3 d'atmosphère.

277. **Moteurs à air comprimé.** — Dans ces dernières années, on a construit de véritables moteurs pouvant servir, comme des locomotives, à la traction des matériaux et au transport des voyageurs, dans lesquels l'air comprimé joue le même rôle que la vapeur d'eau.

1° *Voiture automobile Mekarski.* — En 1875, le tramway de la place de l'Étoile à Courbevoie était traîné par un de ces moteurs. L'appareil était installé sous le châssis même de la voiture, entre les roues (fig. 306). C'est un mécanisme analogue à celui des locomotives à vapeur, mais fonctionnant à l'air comprimé. Au lieu de chaudière à vapeur, la voiture emportait avec elle des réservoirs cylindriques, très résistants, dans lesquels on comprimait l'air à 25 atmosphères, à l'aide de pompes installées, à poste fixe, à l'une des stations. Ce qui constituait la nouveauté du système de M. Mekarski, c'était un *régulateur de pression*, à l'aide duquel l'air comprimé, sortant des réservoirs à une pression décroissante, entrait dans le mécanisme moteur à une pression constante. De plus, pour éviter le refroidissement dû à la détente du gaz, on avait soin de faire passer l'air comprimé dans un réservoir d'eau surchauffée à 150° avant de l'utiliser dans le moteur.

2° *Locomotive Ribourt.* — Une véritable locomotive à air comprimé, avec tender, et entraînant un véritable train de matériaux, a été utilisée dans les travaux du tunnel du Saint-Gothard, pour enlever les débris du percement. (Une locomotive à vapeur ordinaire n'aurait pu être employée dans ce cas, parce que le foyer eût élevé la température, déjà trop forte, du tunnel, tandis que la fumée et la vapeur d'eau eussent contribué à en vicier l'air.) Ce type de locomotive à air comprimé fut construit par l'ingénieur Ribourt (fig. 307). Elle était munie d'un réservoir à air comprimé, qu'elle emportait avec elle comme une chaudière à vapeur, et l'air s'en échappait à une pression déterminée et constante, obtenue à l'aide d'un *régulateur de pression* spécial.

278. **Machines perforatrices.** — L'air comprimé a joué un rôle encore plus important dans les grands travaux de percement du Saint-Gothard, ainsi que dans les travaux antérieurs du mont Cenis. On ne pouvait songer à employer dans ces circonstances les procédés ordinaires, c'est-à-dire la vapeur et la

1. Le premier construit (1848) fut celui de Kingstown à Dalkey, en Irlande, sur un parcours de 3 kilomètres.

2. Voir les détails de cette application, ainsi que de toutes les autres, dans le *Monde physique* de Guillemin (tome Ier).

poudre, pour forer les trous de mine, car les gaz provenant de la combustion de la houille ou de l'explosion de la poudre eussent contribué à vicier l'air confiné des galeries souterraines et à le rendre complètement irrespirable. On construisit donc pour cet usage, d'après une idée de MM. D. Colladon et de Caligny,

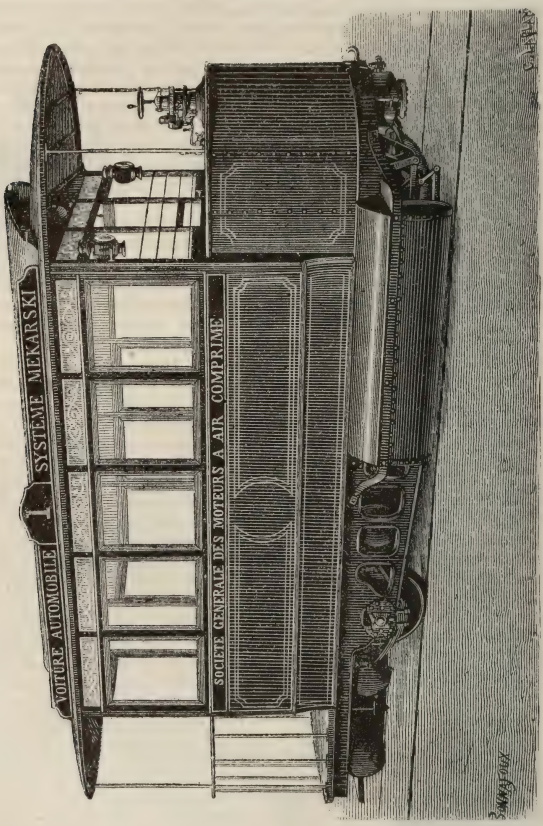


Fig. 506.

des machines spéciales à percer, dites *machines perforatrices*, actionnées à l'aide d'air comprimé.

1° *Percement du mont Cenis.* — Les premières machines perforatrices, celles du mont Cenis (fig. 508), se composaient d'une dizaine de forets, en forme de *fleurets*, installés sur un même affût, mobile sur des rails ; un second chariot, qui était attelé à l'affût, portait des réservoirs à eau et à air comprimé. Chaque fleuret était animé de trois mouvements simultanés, indispensables à la nature

du travail à exécuter : 1° un mouvement de va-et-vient longitudinal, produisant des chocs répétés sur la roche ; 2° un mouvement tournant helicoïdal, analogue à celui d'une vrille, produisant la pénétration ; 3° un mouvement de progression, parallèle à l'axe de l'outil et proportionnel à la rapidité du percement.

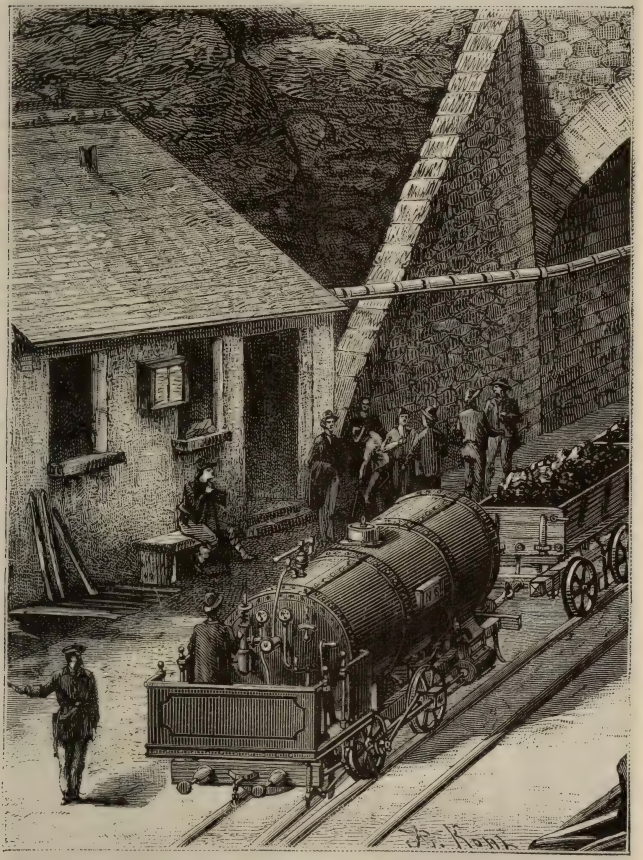


Fig. 307.

Ce triple mouvement était communiqué aux forets par l'air comprimé : le premier, par l'intermédiaire d'un piston, dont le mouvement était réglé par le jeu d'un tiroir ; les deux autres par l'intermédiaire d'une petite machine spéciale, disposée latéralement.

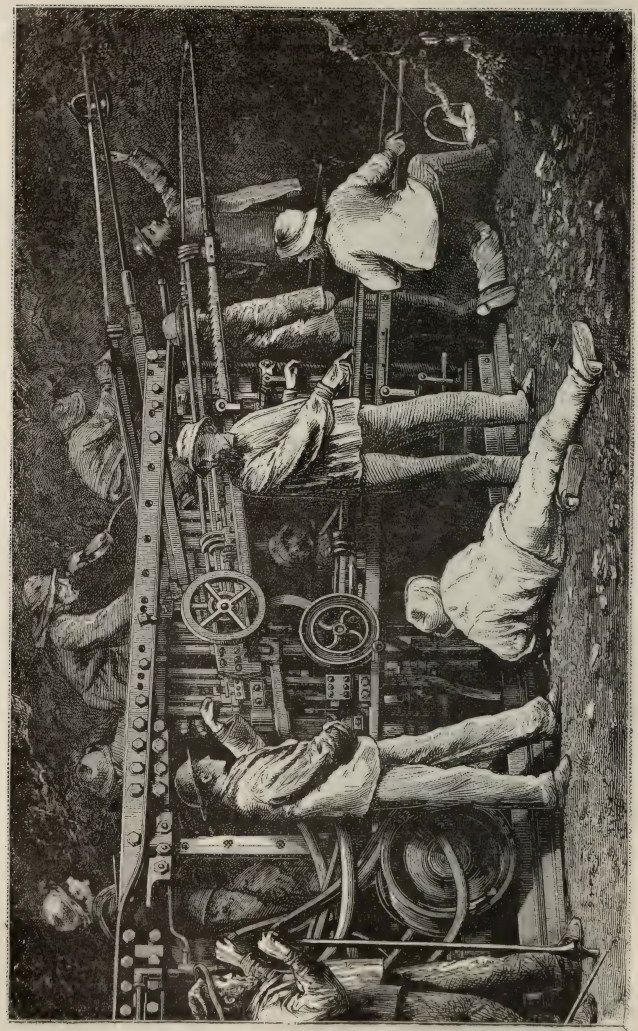


Fig. 308.

Quant à la compression de l'air, elle était obtenue à l'aide de machines de compression spéciales, dites *compresseurs*, qui empruntaient la force motrice nécessaire aux chutes d'eau du voisinage[1], en sorte que *la montagne était percée à l'aide de la force motrice de ses propres torrents.* Il y avait douze compresseurs, qui comprimaient en moyenne par vingt-quatre heures 116 500 mètres cubes d'air, enlevés à l'atmosphère extérieure. La pression fournie aux machines était de 7 atmosphères; l'excédent d'air comprimé était lancé dans les galeries pour en entretenir l'aérage dans de bonnes conditions hygiéniques.

2° *Percement du Saint-Gothard.* — Après le mont Cenis, le massif du Saint-Gothard a été percé du nord au sud, entre les villages de Göschenen (Suisse) et d'Airolo (Italie), d'un tunnel à deux voies, plus long que le précédent. Les difficultés étaient plus grandes qu'au mont Cenis, parce que la masse de roches à extraire était plus considérable et les couches à traverser généralement plus dures à percer. Aussi se servit-on de machines et de procédés perfectionnés.

La force motrice, empruntée aux torrents de la montagne, était distribuée par des turbines à de nouvelles machines de compression, construites par M. Colladon; l'air comprimé venait animer de nouvelles machines perforatrices, dont le travail était accéléré par l'emploi opportun de la dynamite Enfin, le déblaiement du tunnel et le transport des débris de roche furent considérablement facilités par l'emploi des locomotives Ribourt à air comprimé.

3° *Percement du tunnel de l'Arlberg.* — Ces procédés et ces machines ont été encore une fois perfectionnés à l'occasion du percement tout récent[2] d'un troisième tunnel de montagne : c'est le tunnel du col de l'Arlberg, qui traverse le massif du Vorarlberg, et ouvre une communication directe entre la Suisse et le Tyrol. On peut se rendre compte des progrès successivement accomplis dans ce genre d'applications de l'air comprimé en comparant les durées successives de ces gigantesques travaux. Le percement du mont Cenis (12 230 m.) avait duré 14 années; celui du Saint-Gothard (14 912 m.) n'avait duré que 9 ans et demi; enfin celui de l'Arlberg (10 240 m.) a été achevé en moins de 3 ans et demi.

279. **Travaux sous-marins : cloche à plongeur, scaphandre, appareil Triger.** — C'est encore l'emploi de l'air comprimé qui a permis d'effectuer, avec une facilité relative et une sécurité presque absolue, les travaux sous l'eau des fleuves et des mers : soit de simples recherches, telles que la pêche des éponges, des huitres perlières ou des épaves de naufrages; soit de grands travaux d'ingénieur, tels que le forage des puits de mines ou le fonçage des piles de ponts.

1° *Cloche à plongeur.* — L'origine et le premier modèle de ces appareils est l'ancienne *cloche à plongeur* (dont la figure 309 représente un modèle perfectionné). C'était une vaste boîte ou cloche à air, ouverte par le bas et hermétiquement close d'autre part, qu'on descendait sous l'eau avec l'outillage et les ouvriers, jusqu'à ce qu'elle reposât sur le fond, à la place où devait se faire le travail. Comme elle contenait, au moment de l'immersion, une masse limitée d'air sous la pression atmosphérique, elle était envahie par l'eau, par suite de l'excès de pression, et cette provision d'air, confinée à la partie supérieure, devenait rapidement irrespirable. Cet inconvénient limitait beaucoup la durée du travail et l'utilité de l'appareil.

2° *Appareil Triger.* — Un premier progrès consista à envoyer de l'air de l'extérieur dans la cloche, afin d'y renouveler l'atmosphère viciée. Un perfec-

1. C'était le ruisseau du Melezet, à la station italienne de Bardonnèche, et la rivière de l'Arc, à la station française de Modane.
2. L'inauguration de ce tunnel a eu lieu le 20 septembre 1884.

tionnement plus grand encore fut réalisé par l'ingénieur Triger[1]. Il eut l'idée d'envoyer de l'air *comprimé*, lequel non seulement alimente d'air respirable les ouvriers, mais leur permet de travailler presque à pied sec, en expulsant l'eau tout autour d'eux dans l'appareil.

C'est à l'aide d'un appareil Triger qu'ont été édifiées les quatre piles du pont de Kehl, et, plus récemment, celles du pont gigantesque de Saint-Louis sur le Mississippi. Chacune de ces piles est fondée sur trois ou quatre caissons rectangulaires en tôle, aux parois solidement boulonnées et renforcées de poutres et contreforts en fer, qu'on a remplis de béton après les avoir enfoncés, dans le lit du fleuve, jusqu'à la profondeur voulue. La figure 310 représente l'un des

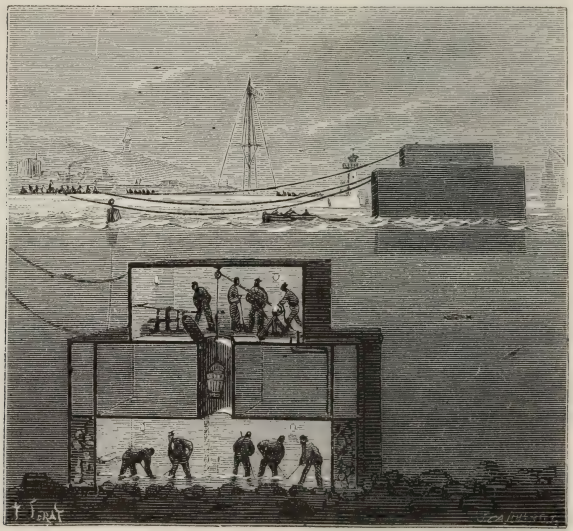


Fig. 309.

chantiers de fondation du pont de Kehl. On y voit l'un des caissons, déjà descendu au-dessous du lit du fleuve, et à l'intérieur de ce caisson les ouvriers qui travaillent aux déblais.

L'enfoncement du caisson s'opère de la manière suivante : Le caisson n'a pas de plancher et il est complètement ouvert par le bas ; son plafond n'est percé que de trois ouvertures circulaires, qu'on a surmontées de trois cheminées en tôle. La cheminée centrale descend jusqu'au-dessous de la base inférieure du caisson, et pénètre, comme un coin, dans le lit du fleuve, avant les parois du caisson. Les deux cheminées latérales communiquent simplement, d'une part, avec l'intérieur du caisson, et d'autre part avec les machines de compression. Elles sont munies de chambres à air, par où les ouvriers peuvent s'introduire pour descendre ensuite dans le fond du caisson. On descend cette sorte de

1. En 1841.

cloche à plongeur jusqu'à ce que la base ouverte touche le fond. L'eau y pénètre tout d'abord par la cheminée centrale et par l'espace annulaire, et s'y élève jusqu'à un plan horizontal, qui est le niveau même du fleuve. Mais si l'on fait arriver l'air comprimé par les cheminées latérales, l'eau sera refoulée peu à peu hors du caisson, et s'échappera par les fissures des bords intérieurs, laissant le lit du fleuve presque à sec, dans tout le compartiment annu-

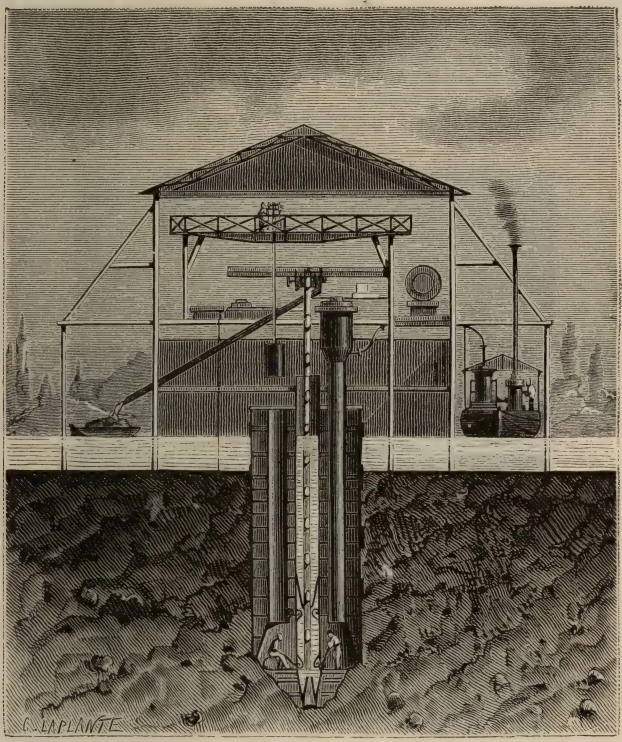


Fig. 310.

laire qui entoure la cheminée centrale. Celle-ci restera seule pleine d'eau : c'est par là que les ouvriers, descendus par les cheminées latérales, et travaillant à sec, sous la protection d'une pression de 2 ou 3 atmosphères, feront remonter, à l'aide d'une drague ou noria, les déblais de leurs fouilles et de la fondation. En même temps que les ouvriers creusent le sol, la maçonnerie est construite sur le plafond du caisson, et l'enfonce par son poids dans le trou qui s'ouvre au-dessous d'elle. Quand l'enfoncement est suffisant, les ou-

vriers remontent, remplissent le caisson et bouchent les trous des cheminées avec du béton : la fondation est alors terminée.

Remarque. — Le passage de la pression extérieure à la pression intérieure, qui est deux ou trois fois plus forte, ne serait pas sans danger pour la santé des ouvriers s'il se faisait brusquement. Aussi l'entrée ne se fait-elle pas directement de l'air extérieur dans le caisson, pas plus que la sortie. L'ouvrier pénètre d'abord dans une chambre latérale, qui est à la pression extérieure; il s'y enferme, ouvre un robinet donnant sur l'une des cheminées latérales et qui établit la communication et l'égalité de pression entre les deux compartiments voisins. Il peut alors pousser une porte, qui s'ouvre de l'extérieur à l'intérieur, et qui était précédemment fermée par l'excès de pression, et il pénètre dans la cheminée latérale, par où il descend au fond du caisson. La manœuvre inverse s'effectue pour la sortie.

3° *Scaphandre.* — Un perfectionnement plus simple de la cloche à plongeur

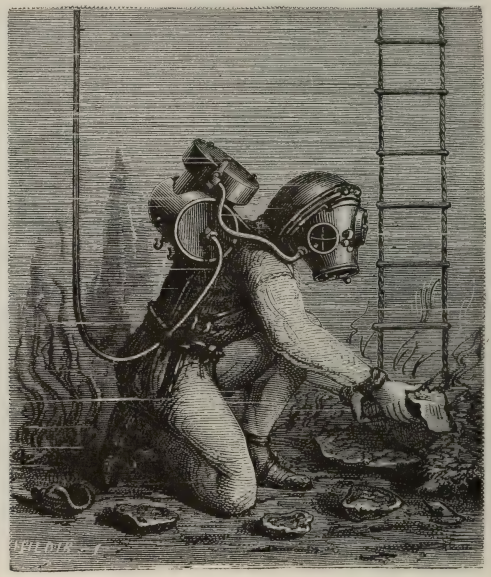


Fig. 311.

est le scaphandre [1], appareil journellement employé par les plongeurs, soit dans nos ports pour les travaux sous-marins, soit dans les mers de l'Archipel pour la pêche des éponges. Il se compose (fig. 311) d'une sorte de casque, qui peut s'emboîter solidement sur les épaules du plongeur, et qui est en communica-

1. De σκάφη, bateau, et ἀνήρ, ἀνδρὸς, homme.

tion permanente avec une boîte à air, posée sur son dos comme un sac de soldat ; un tuyau, que le plongeur entraîne avec lui, amène dans le réservoir de l'air comprimé (à une pression égale à celle qui s'exerce au fond de l'eau). L'air qui a été respiré peut s'échapper par des ouvertures convenablement disposées. Le plongeur peut voir et se conduire par d'autres ouvertures, hermétiquement fermées avec des glaces et protégées par des grilles. Une corde, attachée à sa ceinture, permet de le remonter à volonté, sur un signal convenu.

LIVRE V

HYDRODYNAMIQUE. — CAPILLARITÉ [1]

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS D'HYDRODYNAMIQUE

PRINCIPE DE TORRICELLI ET APPLICATIONS.

280. **Principe de Torricelli : Énoncé et formule.** — Lorsqu'un liquide pesant est en équilibre dans un vase A, si l'on pratique une ouverture en un point O de la paroi, le liquide s'échappe, et en même temps l'équilibre des pressions est rompu. La vitesse que possède chaque molécule liquide, au moment où elle passe par l'orifice, est déterminée par le principe suivant, dû à Torricelli :

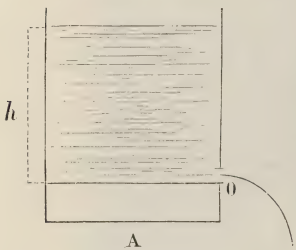


Fig. 312.

La vitesse d'un liquide qui s'échappe par un petit orifice percé en mince paroi est égale à celle qu'acquerrait un corps tombant librement dans le vide depuis la surface libre jusqu'au centre de l'orifice.

1. Nous avons défini ci-dessus l'*hydrodynamique :* c'est l'étude des liquides en mouvement, sous l'action, directe ou indirecte, de la pesanteur. Quant à la *capillarité*, c'est l'étude des phénomènes capillaires, c'est-à-dire d'un certain nombre de faits qui paraissent en contradiction avec les lois de l'hydrostatique et qu'on n'observe que dans des tubes extrêmement ténus. Il n'y a donc aucun lien rationnel entre ces deux parties de la physique, ni aucune raison pour les réunir dans un même livre. En effet, dans un traité de physique complet, on devrait les étudier chacune dans un livre distinct. Mais, comme les programmes, que nous suivons dans la rédaction de ce traité élémentaire, ne comportent que des notions d'hydrodynamique et des notions de capillarité, nous avons cru devoir réunir ces deux séries de notions dans un même livre, faute de pouvoir les rattacher logiquement à l'un quelconque des précédents.

En appelant V cette vitesse, h la hauteur que possède le niveau à l'instant considéré au-dessus du centre de l'orifice (fig. 312), on a, d'après les lois de la chute des corps *dans le vide*,

$$[1] \qquad V = \sqrt{2gh}.$$

C'est ce qu'on appelle la *formule de Torricelli*, et l'énoncé ci-dessus constitue le *Principe* ou la *Règle de Torricelli*.

281. **Démonstration du principe.** — Torricelli s'était contenté d'une expérience fort simple pour vérifier sa formule. Il avait observé qu'un jet liquide sortant de l'orifice O suivant la verticale atteignait sensiblement la même hauteur que le niveau MN dans le vase (fig. 313).

Daniel Bernoulli traita le problème par le calcul, en supposant : 1° que l'orifice était pratiqué dans une paroi infiniment mince ; 2° que son diamètre était infiniment petit par rapport à celui du vase ; 3° que les molécules liquides, qui s'échappent à chaque instant du vase, proviennent directement de la surface libre ; 4° que la pesanteur est la seule force qui intervienne dans l'écoulement.

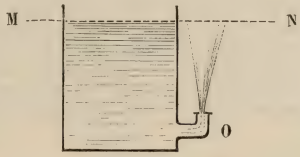


Fig. 313.

En appliquant tout simplement le théorème du travail et des forces vives pour l'intervalle de temps très court où une petite masse m du liquide s'échappe du flacon, on arrive à la même formule que Bernoulli. On a

$$[2] \qquad V = \sqrt{2g\left(h + \frac{p - p'}{d}\right)};$$

V est la vitesse d'écoulement à l'instant considéré, d représente le poids spécifique du liquide, p et p' représentent les pressions qui s'exercent sur le liquide, en haut à la surface libre et en bas à l'orifice, dans le milieu où se produit l'écoulement.

Dans le cas actuel, l'écoulement a lieu dans l'atmosphère : $(p - p')$ est donc le poids d'une colonne d'air ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance h de l'orifice à la surface libre. En appelant a le poids spécifique de l'air, dans les circonstances de température et de pression où l'on opère, la formule devient

$$[2\ bis] \qquad V = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{a}{d}\right)}.$$

La fraction $\frac{a}{d}$ étant généralement négligeable par rapport à l'unité, on retrouve la formule de Torricelli :

$$V = \sqrt{2gh}.$$

Remarque. — On peut donner à la formule de Bernoulli une forme plus commode. Il suffit d'évaluer les pressions extérieures p et p' en colonnes du liquide qui s'écoule. En appelant H et H′ les hauteurs des cylindres de ce liquide qui feraient équilibre aux pressions p et p' (par unité de surface), on a

$$p = Hd \qquad \text{et} \qquad p' = H'd.$$

En substituant ces valeurs dans la formule, elle devient, toutes réductions faites,

$$[5] \qquad V = \sqrt{2g\,(h + H - H')}.$$

282. **Vérification expérimentale de la formule de Torricelli.** — On peut démontrer la formule *à posteriori* par deux procédés, l'un fondé sur la forme que prend le jet (ou *veine liquide*) en s'échappant du vase, et l'autre fondé sur la *dépense*, c'est-à-dire sur la quantité de liquide qui s'écoule dans un temps donné.

1° *Forme de la veine liquide.* — Soit V la vitesse d'une molécule liquide au moment où elle s'échappe de l'orifice.

Si celui-ci est pratiqué dans une paroi plane verticale, la vitesse V est horizontale. Aussitôt sortie, la molécule subit l'effet de la pesanteur. Elle est donc animée de deux mouvements simultanés, l'un uniforme, rectiligne et horizontal, provenant de la vitesse initiale V, et l'autre uniformément accéléré, rectiligne et vertical, provenant de l'action de la pesanteur. Nous avons vu (57) que la trajectoire du mouvement résultant est une *parabole*, ayant pour *sommet* le point de départ de la molécule, pour *tangente au sommet* la direction du mouvement uniforme et pour *axe* la direction du mouvement uniformément accéléré. Chacune des molécules liquides qui traverse l'orifice, en même temps que la précédente, se trouve dans les mêmes conditions, et décrit une parabole identique. L'ensemble de ces *trajectoires matérielles* constitue un volume parabolique qui est la *veine liquide*.

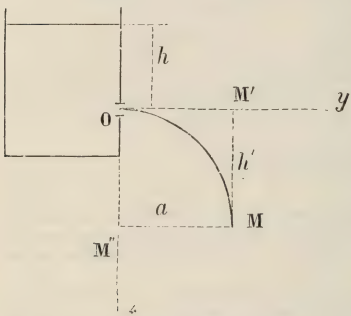


Fig. 314.

En mesurant l'*amplitude* (ou *portée*) a de la veine sur un plan tel que M''M, situé à une distance h' de l'orifice, on pourra en déduire la vitesse initiale V et, en comparant cette mesure au nombre donné par la formule, on pourra vérifier celle-ci.

La relation qui donne V en fonction de a et de h' est précisément l'équation de l'une des paraboles qui constituent la veine. Établissons, par exemple, celle qui correspond au centre de l'orifice (fig. 314). Prenons pour axes des coordonnées la direction Oy de la vitesse initiale V et la direction verticale Oz. Soit M la position de la molécule au bout du temps t. On a évidemment :

$$\text{pour l'abscisse OM'} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = Vt$$

$$\text{et pour l'ordonnée MM'} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{1}{2} g t^2.$$

En éliminant t entre ces deux égalités, il vient

$$y^2 = 2\,\frac{V^2}{g}\,z.$$

C'est l'*équation de la parabole*. En y donnant à z la valeur h' qui correspond

au plan MM', on a la valeur a de l'amplitude :

$$a^2 = 2\frac{V^2}{g}h', \qquad \text{d'où} \qquad V = a\sqrt{\frac{g}{2h'}}.$$

Il ne reste plus qu'à mesurer a et à comparer V avec la valeur théorique $\sqrt{2gh}$.

Cette mesure se fait aisément à l'aide d'un appareil très simple. C'est un cylindre métallique (fig. 315), muni d'orifices équidistants sur l'une de ses génératrices. Le niveau du liquide est maintenu à une hauteur constante à l'aide d'un *trop-plein*. La veine liquide peut être reçue au centre d'un disque horizontal évidé, porté par un petit chariot (fig. 316, I) qui se meut dans une rigole dont les bords sont rectilignes, parallèles et gradués.

Les distances sont réglées de manière que le plan horizontal du niveau supérieur soit élevé au-dessus de l'orifice supérieur d'une longueur égale à deux fois la distance d de deux orifices consécutifs, et que le plan du disque soit au-dessous de l'orifice inférieur d'une longueur égale $2d$. On connait donc d'avance les hauteurs h et h', correspondantes à chaque expérience; l'amplitude a est obtenue en mesurant la distance du centre du disque à la génératrice.

On voit, par le tableau d'expériences suivant, que la vérification est très satisfaisante [1].

HAUTEURS ou CHARGES	JET		VITESSES		RAPPORT des DEUX VITESSES
	a	h'	MESURÉE	CALCULÉE	
$2^m,29$	$6^m,28$	$7^m,53$	$6^m,65$	$6^m,70$	0,993
$3^m,93$	$4^m,66$	$8^m,15$	$8^m,67$	$8^m,70$	0,988
$7^m,17$	$1^m,41$	$6^m,25$	$11^m,67$	$11^m,88$	0,983

2° *Intersection des veines liquides.* — On peut, avec le même appareil, vérifier une conséquence curieuse des formules précédentes. La vitesse déduite de l'équation de la trajectoire est

$$V = a\sqrt{\frac{g}{2h'}};$$

la vitesse déduite de la règle de Torricelli est

$$V = \sqrt{2gh}.$$

En égalant ces deux expressions de la même vitesse, il vient

$$a\sqrt{\frac{g}{2h'}} = \sqrt{2gh}, \qquad \text{d'où} \qquad a^2 = 4hh'.$$

Cette formule prouve que, si l'on changeait h en h' et inversement, l'amplitude de la nouvelle trajectoire parabolique resterait la même pour le même plan M'M. C'est ce qu'on vérifie en ouvrant simultanément soit l'orifice supé-

1. Dubuisson, *Traité d'Hydraulique.*

rieur et l'orifice inférieur, soit le deuxième et le quatrième : on obtient alors deux veines qui se coupent au même point, au centre de l'anneau.

Remarquons que cette conséquence *nécessaire* de la règle de Torricelli ne serait pas *suffisante* pour la démontrer. En effet, elle ne cesserait pas d'être

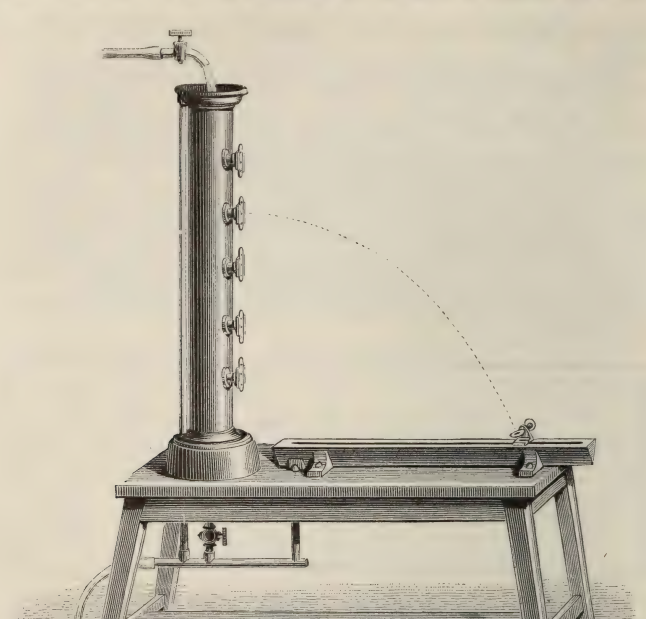


Fig. 315.

exacte, même si l'on donnait à la constante 4 une autre valeur : or dans ce cas l'équation de la trajectoire *ne représenterait plus une parabole.*

3° *Dépense.* — On appelle *dépense* le volume liquide qui s'écoule pendant un certain temps. Il est facile de la calculer d'avance, en partant de la formule de Torricelli. En effet, si S est la section de l'orifice, θ l'intervalle de temps considéré, V la vitesse donnée par la formule, l'eau écoulée forme un cylindre ayant pour base S et pour longueur $V\theta$. On a donc

$$D = SV\theta = S\theta\sqrt{2gh}.$$

On vérifie aisément la formule, en pesant le liquide écoulé et divisant ce poids par la densité.

Les nombres ainsi obtenus sont toujours très différents des nombres théoriques : ils leur sont *notablement inférieurs*. Cette anomalie est due à une circonstance particulière dont nous n'avons pas tenu compte dans le calcul de la dépense théorique. C'est que la veine liquide est *conique* à la sortie du vase, et ne devient *cylindrique* qu'à une certaine distance ; or la section du cylindre qui succède au tronc de cône initial est plus petite que l'orifice (on l'appelle *section contractée*) : elle est égale à une fraction c de l'orifice, qu'on appelle *coefficient de contraction*. Pour un même liquide, c varie avec la forme et la grandeur de l'orifice et avec la charge. Ainsi, pour des orifices circulaires dont le diamètre est compris entre $0^m,02$ et $0^m,16$ et pour une charge inférieure à $6^m,80$, on a $c = 0,62$.

Si l'on tient compte de cette circonstance dans le calcul de la dépense, c'est-à-dire si l'on substitue à la surface S de l'orifice celle de la section contractée cS, on trouve des nombres qui sont sensiblement d'accord avec les mesures directes.

283. **Écoulement par les ajutages et tuyaux.** — On appelle *ajutage* un bout de tuyau de quelques millimètres qu'on adapte à un orifice d'écoulement.

L'addition d'un ajutage cylindrique à un orifice circulaire a pour effet de supprimer la contraction de la veine liquide : celle-ci prend dès l'origine une section constante égale à celle de l'ajutage. Dans ce cas, la dépense *mesurée* est égale à la dépense *calculée*, mais à la condition de substituer à la vitesse de Torricelli une vitesse un peu moindre.

La vitesse d'écoulement par un ajutage est donc moindre que la vitesse d'écoulement par un orifice en mince paroi. L'appareil ci-dessus permet de mesurer cette diminution de vitesse. On se sert pour cela d'une plaque mobile, munie d'un orifice et de deux ajutages, l'un conique, l'autre cylindrique, qu'on peut substituer l'un à l'autre successivement (fig. 316, II et III).

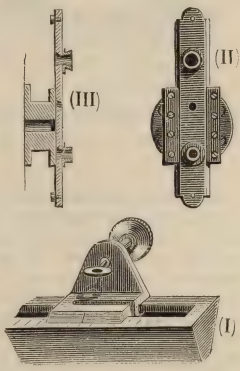


Fig. 316.

Formule de Prony. — Lorsque l'ajutage a une certaine longueur, il devient un *tuyau d'écoulement*. Dans ce cas, la vitesse est considérablement diminuée par suite du frottement des molécules du liquide sur les parois du tuyau. D'ailleurs cette vitesse n'est pas la même en tous les points d'une même section droite du tuyau : elle est minimum au contact des parois et maximum au centre. Lorsque l'écoulement a atteint un régime permanent, la vitesse moyenne, évaluée d'après la dépense, peut être calculée avec une certaine approximation, par la formule suivante, due à Prony :

$$V = -0,025 + 26,77\sqrt{\frac{2rh}{L}}.$$

L est la longueur du tuyau, r son rayon et h la distance verticale de ses deux extrémités. Cette formule peut être employée utilement dans la pratique, toutes les fois que L est inférieur ou au plus égal à $800r$.

284. **Flacon** ou **Vase de Mariotte.** — Le *flacon* ou *vase de Ma-*

riotte est un appareil qui permet d'obtenir l'écoulement constant d'un liquide qu'il contient. Il peut servir également à vérifier plusieurs conséquences du principe de Torricelli.

Il se compose simplement d'un flacon un peu grand, fermé par un bouchon que traverse un tube de verre ouvert à ses deux bouts (fig. 317). Sur la paroi du flacon sont alignées verticalement deux ou trois tubulures très courtes *a*, *b*, *c*, à orifice étroit ; on peut fermer chacune d'elles à l'aide d'un petit tampon de bois.

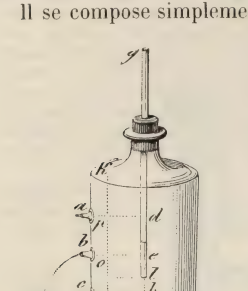


Fig. 317.

Fonctionnement. — On commence par remplir entièrement d'eau le vase et le tube, jusqu'en *g*. Nous supposerons que l'orifice inférieur de ce dernier vienne aboutir en *l*, dans l'intervalle des tubulures *b* et *c*. Il y a trois cas à considérer, suivant que l'on ouvre séparément l'un des trois orifices *a*, *b* et *c*. Le cas pratique, celui de l'écoulement constant, est le dernier. Les deux autres cas sont purement théoriques et servent de vérification au principe de Torricelli.

1° *L'orifice b est seul ouvert.* — Si l'on ouvre d'abord la tubulure *b*, il y a écoulement, le niveau baisse dans le tube *g*, et dès que le niveau y est le même qu'en *b*, l'écoulement s'arrête. Ces phénomènes s'expliquent par l'excès de pression qui avait d'abord lieu en *b*, de dedans en dehors, excès de pression qui disparaît lorsque le niveau dans le tube *g* est le même qu'en *b*. En effet, avant que l'écoulement commençât, la pression sur tous les points de la tranche horizontale *be* n'était pas la même. En *e* elle se composait de la pression atmosphérique, *plus* le poids de la colonne d'eau *ge*, tandis qu'en *b* la pression est seulement égale à celle de l'atmosphère. Mais une fois que le niveau est le même en *e* et en *b*, il y a équilibre, parce que dans le flacon et dans le tube la pression est alors la même sur tous les points de la tranche *be*. Cela résulte des principes d'hydrostatique démontrés précédemment.

2° *L'orifice a est seul ouvert.* — Si l'on ferme alors la tubulure *b* et qu'on ouvre la tubulure *a*, il n'y a pas d'écoulement; au contraire, l'air rentre dans le flacon par l'orifice *a*, et l'eau remonte dans le tube *g* jusqu'à la tranche *ad*, de manière que l'équilibre soit rétabli et que la pression soit la même sur tous les points de la tranche horizontale *ad*.

3° *L'orifice c est seul ouvert.* — Les orifices *a* et *b* étant fermés, on ouvre l'orifice *c*. Dans ce cas, l'eau s'écoule d'abord, avec une vitesse décroissante, jusqu'à ce que le niveau s'abaisse dans le tube *g* jusqu'en *l*. A partir de cet instant, l'écoulement continue avec une vitesse constante, qui est donnée par la formule de Torricelli, $V = \sqrt{2gz}$ (en appelant *z* la hauteur *lh*). En même temps l'air entre bulle à bulle par l'orifice *l* et gagne alors la partie supérieure du flacon. Ce régime dure aussi longtemps que le niveau de l'eau dans le flacon n'est pas descendu au-dessous de l'orifice *l*.

Cet écoulement constant s'explique par ce fait que la charge, c'est-à-dire la pression qui s'exerce sur la tranche horizontale mh, est *invariablement égale* à la pression de l'atmosphère, augmentée de celle de la colonne d'eau hl. Calculons, en effet, cette charge à un instant quelconque, par exemple quand le niveau s'est abaissé jusqu'au plan ad. L'air qui a pénétré dans le flacon est alors à une pression $(H - dl)$; or la couche mh supporte en outre le poids de la colonne d'eau dl; donc la pression transmise sur la tranche mh est en réalité $H - dl + dl + lh$, c'est-à-dire $H + lh$.

Cette pression est encore la même lorsque le niveau s'est abaissé en be, et ainsi de suite tant que le niveau est plus haut que l'orifice l: la pression sur la tranche mh *est donc constante*, et par conséquent il en est de même de la vitesse d'écoulement. Mais, une fois que le niveau est descendu au-dessous de l'orifice l, cette pression et, en même temps, la vitesse d'écoulement décroissent continuellement.

Remarque. — On peut se servir de cet appareil pour produire l'écoulement régulier d'un gaz. Dans ce cas, il faut évidemment chasser le gaz de son réservoir en y faisant arriver l'eau qui tombe du flacon de Mariotte. Si l'on aspirait directement le gaz en faisant communiquer l'extrémité g du tube droit avec le gazomètre, on n'obtiendrait pas une vitesse d'aspiration constante, puisque la pression du gaz, aspiré dans le flacon, irait en diminuant continuellement.

285. **Écoulement d'un liquide en contact avec une masse d'air limitée.** — Un autre cas très intéressant de l'écoulement des liquides est celui où leur surface libre, au lieu d'être en communication directe avec l'atmosphère, se trouve en contact avec une masse d'air limitée, dont la force élastique est supérieure ou inférieure à la pression extérieure.

Si h_0 est la *charge* initiale, c'est-à-dire la distance verticale de la surface libre à l'orifice, l'écoulement commence avec une vitesse V_0, qui est déterminée par la formule de Bernoulli,

$$V_0 = \sqrt{2g\left(h_0 + \frac{p_0 - p'}{d}\right)},$$

où p_0 désigne la pression intérieure au début, et p' la pression extérieure.

Or, tandis que celle-ci est constante, la pression p_0 diminue constamment, à mesure que le vase se vide, par suite de l'accroissement de volume de l'air confiné. Il en résulte que la vitesse d'écoulement se ralentit pour deux raisons : la première, c'est que la charge initiale diminue et prend une valeur h, constamment décroissante ; la deuxième, c'est que la différence des pressions $(p_0 - p')$ diminue aussi, puis s'annule, puis devient négative. Quand elle a atteint la valeur absolue hd, la quantité sous le radical, et par suite la vitesse d'écoulement, est nulle : l'écoulement doit s'arrêter.

Calcul de la charge finale h_1. — Proposons-nous de chercher la charge finale. Nous avons dit que la pression extérieure, qui est désignée par p' dans la formule, garde constamment la même valeur ; soit H la hauteur de la co-

lonne d'eau qui lui fait équilibre, on a $p' = \mathrm{H}d$. La pression initiale p_0 de l'air intérieur (que nous supposerons d'abord égale à la pression extérieure $\mathrm{H}d$) prend une valeur finale p_1, équivalente à une colonne d'eau H_1, de manière que l'on ait $p_1 = \mathrm{H}_1 d$. La quantité sous le radical deviendra donc, avec cette nouvelle notation,

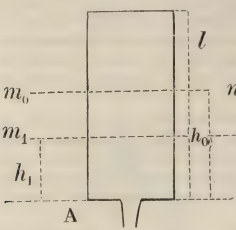


Fig. 318.

$$\frac{\mathrm{H}_1 d - \mathrm{H}d}{d} \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}_1 - \mathrm{H},$$

et l'équation du problème sera

$$[1] \qquad h + \mathrm{H}_1 - \mathrm{H} = 0.$$

Il existe d'ailleurs entre H_1 et H la relation de la loi de Mariotte, puisque ce sont les forces élastiques de la même masse d'air confinée, au commencement et à la fin de l'écoulement. On a donc, en appelant l la longueur du vase (et en supposant la section égale à l'unité),

$$(l - h_0)\,\mathrm{H} = (l - h)\,\mathrm{H}_1,$$

d'où

$$[2] \qquad \mathrm{H}_1 = \mathrm{H}\frac{l - h_0}{l - h}.$$

En remplaçant H_1 par sa valeur, l'équation [1] devient

$$h^2 - (\mathrm{H} + l)\,h + \mathrm{H}h_0 = 0,$$

d'où

$$h = \frac{\mathrm{H} + l}{2} \pm \sqrt{\frac{(\mathrm{H} + l)^2}{4} - \mathrm{H}h_0}.$$

Une seule des racines convient, c'est celle qui correspond au radical négatif, car l'autre est manifestement plus grande que l. On a donc

$$h_1 = \frac{\mathrm{H} + l}{2} - \sqrt{\frac{(\mathrm{H} + l)^2}{4} - h_0\mathrm{H}}.$$

Remarque. — Ce calcul trouve son application dans la théorie complète d'une foule de petits appareils, tels que la *pipette*, l'*entonnoir magique*, la *bouteille inépuisable*, la *fontaine intermittente*, etc.

286. **Pipette.** — On appelle ainsi un petit instrument, très employé dans les laboratoires et dans le commerce, pour puiser un peu de liquide dans un récipient qu'on ne veut ou qu'on ne peut déplacer.

C'est un simple tube droit, en verre ou en fer-blanc, dont la forme est analogue à celle d'un aréomètre qui serait ouvert aux deux bouts (fig. 319). L'extrémité inférieure se termine par un bec effilé, destiné à plonger dans le liquide, et l'extrémité supérieure par un orifice à rebords, qu'on peut aisément boucher avec un doigt.

Usage. — On plonge la pipette dans le liquide, par son bec effilé, l'orifice supérieur étant ouvert. Le tube se remplit jusqu'au milieu du renflement, soit par simple communication, soit par aspiration dans le cas des liquides lourds, comme le mercure. On retire alors le bec du liquide, en posant le doigt sur l'orifice supérieur. La pression atmosphérique, qui s'exerce à l'orifice inférieur, suffit pour maintenir le liquide dans la tige effilée. Mais, si l'on vient à rendre l'air en soulevant le doigt, l'écoulement se produit aussitôt avec une vitesse initiale déterminée par la formule de Bernoulli (285). Pour l'arrêter, il suffit de reboucher l'orifice : les quelques gouttes de liquide qui s'écoulent encore, suffisent pour raréfier l'air confiné au-dessus du liquide, au point d'annuler la vitesse d'écoulement, conformément au calcul précédent.

Fig. 319.

Remarque. — L'*entonnoir magique*, la *bouteille inépuisable* ou *bouteille magique* ne sont pas autre chose que des modifications plus ou moins curieuses de la *pipette*[1].

287. **Fontaine intermittente.** — *Description.* — La *fontaine intermittente* est formée d'un globe de verre C (fig. 320) fermé par un bouchon à l'émeri, et portant, à sa partie inférieure, deux ou trois tubulures capillaires D par lesquelles se fait l'écoulement. Un tube de cristal, ouvert à ses extrémités, pénètre par l'une dans le globe C, et par l'autre vient aboutir près d'un orifice pratiqué au centre d'une cuvette de cuivre B qui porte tout l'appareil.

Fonctionnement. — Le globe C étant rempli d'eau aux deux tiers environ, le liquide s'écoule d'abord par les orifices D; car la pression intérieure, en D, est égale à celle de l'atmosphère, qui se transmet par la partie inférieure du tube de cristal, *plus* le poids de la colonne d'eau CD, tandis qu'extérieurement, au même point, la pression est égale seulement à celle de l'atmosphère. Ces conditions persistent tant que l'orifice inférieur du tube est ouvert, et que, par suite de cette communication, la tension

1. Ce sont des jouets, plutôt que des instruments de physique. On en trouvera la description dans le *Monde physique* de Guillemin, tome Ier.

de l'air l'intérieur est égale à la pression de l'atmosphère.

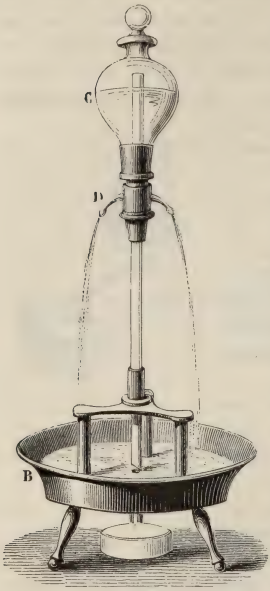


Fig. 320.

Mais l'appareil est réglé de manière que l'orifice pratiqué au fond de la cuvette B laisse écouler moins d'eau que n'en donnent les tubulures D; le niveau s'élève donc peu à peu dans la cuvette, et le tube finit par plonger entièrement dans le liquide. L'air extérieur ne pouvant plus alors pénétrer dans le globe C, on se trouve dans le cas d'un écoulement au contact d'une masse d'air limitée (285) : l'air s'y raréfie à mesure que l'écoulement continue, et il vient un moment où la pression due à la colonne d'eau CD, *plus* à la tension de l'air renfermé dans l'appareil, est égale à la pression extérieure qui s'exerce en D. A ce moment l'écoulement s'arrête; mais, la cuvette continuant à se vider, l'orifice inférieur du tube se trouve bientôt dégagé : l'air entre alors, l'écoulement recommence, et ainsi de suite tant qu'il reste de l'eau dans le globe C.

Remarque. — Toutes les particularités de cette expérience peuvent être déterminées à l'aide des formules du § 285.

CHAPITRE II

NOTIONS D'HYDRODYNAMIQUE (suite)

—

POMPES ET SIPHONS.

288. **Classification** et **Définitions préliminaires**. — Les pompes sont des machines qui servent à élever l'eau soit par aspiration, soit par pression, soit par les deux effets combinés. On les classe dans trois catégories :

1° Les *pompes aspirantes;*
2° Les *pompes foulantes;*
3° Les *pompes aspirantes et foulantes.*

Les différents organes ou pièces qui entrent dans la construction d'une pompe sont : le *corps de pompe*, le *piston*, les *soupapes* et les *tuyaux d'aspiration* et *d'ascension.*

Le *corps de pompe* est un cylindre creux et fixe, de métal ou de bois (fig. 324), dans lequel se meut le *piston.* Celui-ci est un cylindre de métal ou de bois, garni d'étoupe et glissant à frottement doux dans toute la longueur du corps de pompe. Les *soupapes* sont des disques de métal ou de cuir, servant à fermer alternativement les orifices qui font communiquer le corps de pompe avec les *tuyaux d'aspiration* ou *d'ascension.* Enfin, ceux-ci sont des tuyaux dans lesquels l'eau est d'abord aspirée jusqu'au corps de pompe, puis refoulée au-dessus, pour être enfin chassée au dehors.

Soupapes. — Les soupapes les plus fréquemment employées sont la *soupape à clapet* (fig. 321) et la *soupape conique* (fig. 322).

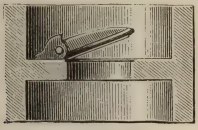


Fig. 321.

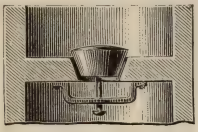


Fig. 322.

La première est un disque métallique fixé à charnière sur le bord de l'orifice qu'il doit fermer. Pour que la fermeture soit plus complète, la face inférieure du disque est garnie d'un cuir épais.

Quant à la soupape conique, elle consiste en un cône métallique s'engageant dans une ouverture de même forme. Au-dessous de celle-ci est une bride de fer, dans laquelle passe un bouton à tête fixé à la soupape. Ce dispositif limite le jeu de la soupape quand elle est soulevée par l'eau, et l'empêche de chavirer.

Remarque. — Il y a un grand intérêt, pour la facilité du fonctionnement, à ce que la section de la soupape et, par suite, celle de l'orifice qu'elle ferme, soient les plus grandes possibles. On diminue ainsi les frottements de l'eau sur les orifices qu'elle traverse.

289. **Pompes aspirantes.** — *Description.* — Tous les appareils de cette catégorie se composent essentiellement : 1° d'un corps de pompe cylindrique, portant à sa partie supérieure une tubulure latérale par laquelle l'eau s'écoule, et percé à sa base d'un *large*

trou recouvert d'une soupape à clapet S, s'ouvrant de bas en haut (fig. 325); 2° d'un tuyau d'aspiration A, fixé d'un bout au corps de pompe, et plongeant de l'autre dans le liquide qu'on veut élever; 3° d'un piston P porté par une tige à laquelle on imprime un mouvement de va-et-vient à l'aide d'une brimbale B. En son centre, le piston est percé d'un *large*

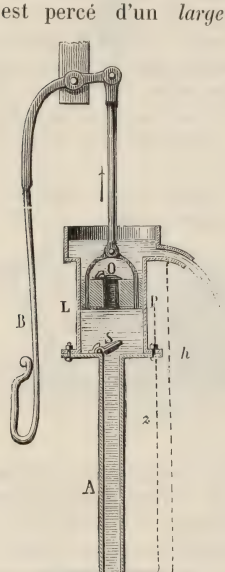


Fig. 325.

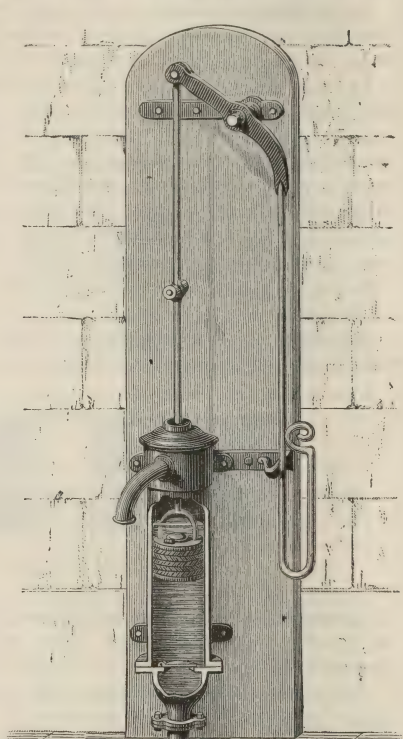


Fig. 324.

trou que recouvre et que ferme une soupape à clapet O s'ouvrant de bas en haut.

La figure 324 représente, en perspective, une *pompe ordinaire à balancier*.

Fonctionnement et *Théorie.* — Avant Galilée, on attribuait l'ascension de l'eau dans les pompes aspirantes à l'*horreur de la nature pour le vide.* C'est lui qui substitua à cette explication fantaisiste la véritable cause du phénomène, à savoir la *pression atmosphérique.*

Supposons que le piston soit d'abord au bas de sa course. Lorsqu'on l'élève, au premier coup de piston, le vide tend à se faire en dessous, et la soupape O reste fermée par l'effet de la pression atmosphérique, tandis que l'air du tuyau A, en vertu de son élasticité, soulève la soupape S, et passe en partie dans le corps de pompe. L'air étant ainsi raréfié, l'eau doit évidemment monter dans le tuyau *jusqu'à ce que la pression de la colonne liquide soulevée, ajoutée à la tension de l'air qui reste dans le tuyau, fasse équilibre à la pression atmosphérique qui s'exerce sur l'eau du puisard.* Lorsque le piston descend, la soupape S se ferme par son propre poids, et s'oppose au retour de l'air du corps de pompe dans le tube d'aspiration. L'air comprimé par le piston soulève la soupape O, et se dégage dans l'atmosphère par le trou réservé dans le piston. Au deuxième coup de piston, la même série de phénomènes se reproduit, et, après quelques coups, l'eau pénètre enfin dans le corps de pompe. On dit alors que la pompe est *amorcée.*

A partir de ce moment, le jeu de l'appareil change : pendant la descente du piston, la soupape S se ferme, l'eau comprimée soulève la soupape O et pénètre au-dessus du piston, qui la soulève ensuite, lorsqu'il remonte, jusqu'à la tubulure latérale par où se fait le déversement. Alors il n'y a plus d'air ni dans le corps de pompe ni dans le tube d'aspiration, et l'eau, poussée par la pression atmosphérique, suit le piston dans sa course : à la condition toutefois que le tube d'aspiration ne dépasse pas une hauteur limite de $10^m,33$ au-dessus du niveau de l'eau dans le puisard; car, dans le cas contraire, *la pompe se désamorcerait.* On a vu, en effet (194), que la pression atmosphérique ne peut soutenir que le poids d'une colonne d'eau de $10^m,33$.

Hauteur maximum du tuyau d'aspiration : calcul approché. — Dans la pratique, la hauteur du tuyau d'aspiration est loin d'atteindre la limite de $10^m,33$. Cela tient à ce que l'appareil ne présente à aucun degré la perfection des machines pneumatiques, et qu'il se produit au-dessous du piston des rentrées d'air qui s'ajoutent à la colonne d'eau soulevée pour équilibrer la pression extérieure.

Parmi ces imperfections, la plus notable est l'existence d'un *espace nuisible.* Le piston ne s'applique jamais exactement sur la base du corps de pompe, et lorsqu'il est au plus bas de sa course,

il existe encore au-dessous de lui un *espace nuisible* rempli d'air à la pression atmosphérique.

On peut évaluer, avec une assez grande approximation, l'influence de cet espace nuisible sur la réduction de la colonne liquide soulevée.

Supposons cet espace nuisible égal à $\frac{1}{30}$ du volume du corps de pompe : l'air qui s'y trouve se dilate à mesure que le piston remonte, et lorsque celui-ci est arrivé au haut de sa course, la tension de l'air qui reste dans le corps de pompe est $\frac{1}{30}$ de la pression atmosphérique, d'après la loi de Mariotte. L'air du tuyau d'aspiration ne peut donc être raréfié au delà de cette limite, et, par suite, dans ce tube, l'eau ne peut s'élever, dans le cas que nous considérons, qu'à une hauteur égale aux $\frac{29}{30}$ de $10^m,33$, c'est-à-dire à $9^m,98$. Et même cette hauteur est-elle encore trop grande, puisque l'eau doit s'élever d'une certaine quantité au-dessus de la soupape S. Aussi, en général, le tube d'aspiration n'a-t-il pas plus de 8 mètres.

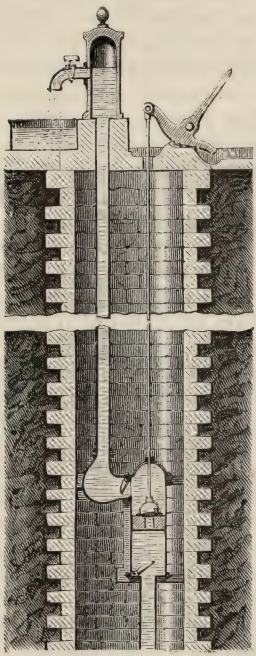


Fig. 325.

290. **Pompe aspirante et élévatoire.** — Dans la pompe aspirante, l'eau est donc élevée d'abord dans le tuyau d'aspiration par le fait de la pression atmosphérique et la hauteur ainsi obtenue ne saurait dépasser 8 à 9 mètres. Mais une fois que l'eau a passé par-dessus le piston, c'est la force ascensionnelle du piston qui élève l'eau et la hauteur qu'elle peut alors atteindre ne dépend que de l'effort appliqué au piston et de l'élévation du *tuyau de déversement*. Lorsque la pompe est disposée pour fonctionner ainsi, c'est-à-dire pour élever l'eau à une grande hauteur, on lui donne le nom de *pompe aspirante et élévatoire* (fig. 325).

291. **Travail nécessaire pour manœuvrer la pompe aspirante.** — On peut calculer le travail qu'il faut dépenser dans la manœuvre d'une pompe

aspirante, *à partir du moment où elle est amorcée.* La dépense de travail est d'ailleurs très différente pendant la descente ou pendant l'ascension du piston.

1° *Descente du piston.* — Pendant ce mouvement, la pression est sensiblement la même sur les deux faces du piston et ses effets se compensent. Tout le travail de la manœuvre est donc employé à vaincre les frottements. C'est pourquoi il est si important d'atténuer autant que possible ceux du liquide sur les parois de l'ouverture du piston, en donnant à celle-ci *le maximum de largeur.*

2° *Ascension du piston.* — Dans ce cas, les pressions p et p' qui s'exercent sur les deux faces, sont notablement différentes; il faut donc vaincre la différence $p - p' = \varpi$ (fig. 325).

Soient S la section du piston, e son épaisseur, H la hauteur de la colonne d'eau capable de faire équilibre à la pression atmosphérique, z la hauteur variable du piston au-dessus du niveau dans le puisard, et h la hauteur constante de l'orifice de déversement au-dessus du même niveau, enfin D la densité du liquide (lequel est ordinairement de l'eau). La pression p, de *haut en bas*, sur la face supérieure du piston, est évidemment égale à la pression atmosphérique (qu'on peut représenter par SHD) augmentée du poids de la colonne d'eau soulevée. On a donc

$$p = \mathrm{SHD} + \mathrm{S}\,(h - z - e)\,\mathrm{D}.$$

La pression p', de *bas en haut*, sur la face inférieure, est de même

$$p' = \mathrm{SHD} - \mathrm{S}z\mathrm{D}.$$

La différence des deux pressions, laquelle mesure l'*effort* à développer, est

$$\varpi = p - p' = \mathrm{SD}\,(h - e),$$

ou bien, en négligeant l'épaisseur e du piston par rapport à la hauteur totale du déversoir,

$$\varpi = \mathrm{S}h\mathrm{D}.$$

Tel est *l'effort à développer* pendant la manœuvre : on voit qu'il est le même en tous les points de la course du piston, et qu'il ne dépend que des dimensions de l'appareil ainsi que de la densité du liquide.

Quant au travail, il est égal, par définition, au produit de l'effort ϖ par le chemin que parcourt son point d'application, c'est-à-dire par la longueur de la course du piston. On a donc, en appelant l la longueur du corps de pompe,

$$\mathrm{T} = \varpi l = \mathrm{S}l\mathrm{D}h.$$

Interprétation du travail dépensé. — Remarquons que le produit $\mathrm{S}l\mathrm{D}$ représente le poids P d'un cylindre du liquide égal à la capacité du cylindre (jusqu'à l'orifice de déversement) : or ce poids P est précisément celui que débite la pompe à chaque coup de piston. D'autre part, h représente la distance verticale qui existe entre le niveau du puisard et le lieu où l'on recueille l'eau de la pompe. Le produit $\mathrm{S}l\mathrm{D}h$ ou $\mathrm{P}h$ représente donc le travail qu'on dépenserait en montant directement le poids d'eau que débite la pompe à chaque coup de piston. Par conséquent, la pompe à eau, comme toutes les machines, *ne crée pas de travail;* elle ne peut que transformer du travail, et permet de le produire d'une manière plus commode et plus rapide.

292. **Pompe aspirante à volant.** — C'est dans le but de rendre

la manœuvre plus rapide et plus aisée qu'on a substitué, dans beaucoup de pompes aspirantes, au mouvement du balancier, celui d'un volant à manivelle (fig. 326). C'est un perfectionnement mécanique analogue à celui qu'a apporté M. Bianchi dans la manœuvre de l'ancienne machine pneumatique à deux corps de

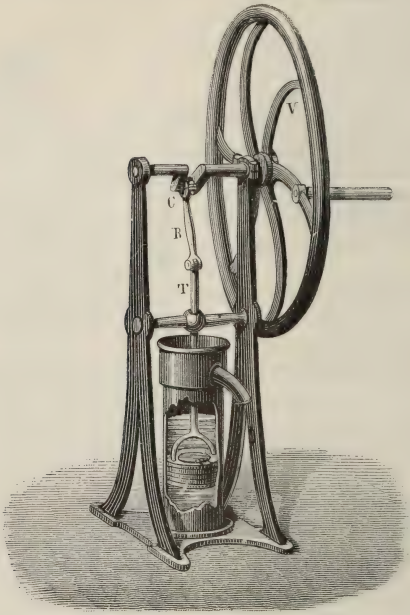


Fig. 326.

pompe. L'appareil représenté par la figure 326 est très employé aux usages domestiques, de préférence à la pompe à balancier (fig. 324).

293. **Pompes foulantes.** — Dans les pompes foulantes, on n'utilise pas la pression atmosphérique; c'est par la pression directe d'un piston plein qu'on fait monter l'eau.

Le type ordinaire de pompe foulante est représenté en coupe dans la figure 327. Elle diffère de la précédente en ce que son piston est plein, et qu'elle n'a pas de tuyau d'aspiration, le corps de pompe étant plongé dans l'eau même qu'on veut élever; enfin

sur le côté du corps de pompe est adapté un tuyau D qui est le tuyau d'ascension. A la partie inférieure de ce tuyau est une soupape O, ouvrant de bas en haut, et à la base du corps de pompe est une soupape semblable S.

Lorsque le piston monte, la soupape S s'ouvre, soulevée par la poussée du liquide, et le corps de pompe se remplit. Puis, lorsque le piston descend, la soupape S étant fermée par son propre

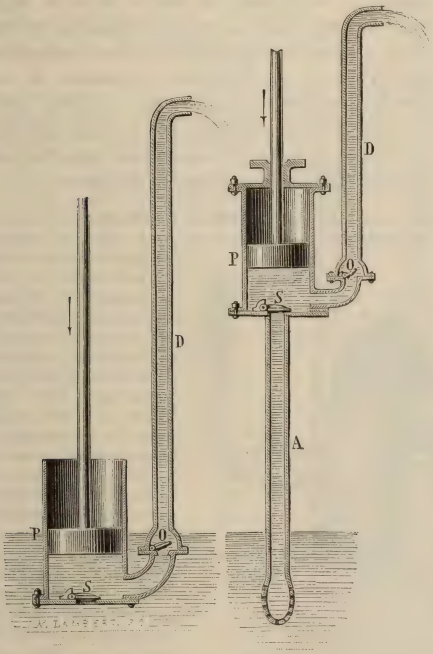


Fig. 327. Fig. 328.

poids et par la pression qu'elle supporte, l'eau, refoulée par le piston, fait ouvrir la soupape O, et s'élève dans le tuyau D, à une hauteur qui n'a d'autres limites que la pression exercée par le piston et la solidité de l'appareil.

Calcul du travail. — L'effort nécessaire pour manœuvrer le piston se calcule comme précédemment. Ici il n'y a pas d'effort à développer pendant l'ascension du piston, car les pressions sur les deux faces sont alors sensible-

ment les mêmes. Mais, pendant la descente, la pression sur la face supérieure n'est que SHD, tandis que sur la face inférieure elle est (SHD + ShD), en appelant h la hauteur de l'orifice de déversement au-dessus de la base du corps de pompe. L'effort à développer est donc ShD, et le travail à dépenser est ShD . l ou SlD . h ou Ph, en représentant par P le poids d'eau (SlD) expulsé à chaque coup de piston : même conclusion que précédemment (291).

294. **Pompes aspirantes et foulantes.** — La pompe aspirante et foulante élève l'eau à la fois par aspiration et par pression. Un des types usuels est représenté en coupe dans la figure 328. Le piston est plein, et à la base du corps de pompe est une soupape ouvrant de bas en haut et fermant un tube d'aspiration A. Sur le côté du corps de pompe est un tube d'ascension D avec sa soupape O. Quand la pompe fonctionne, l'eau, aspirée par le tuyau A toutes les fois que le piston monte, est ensuite refoulée, lorsqu'il descend, dans le tuyau D. La théorie de ces appareils est une conséquence de celles des deux systèmes précédents.

295. **Pompes oscillantes. — Pompe de Bramah.** — Pour faciliter la manœuvre, en diminuant les frottements, on a supprimé le piston plein dans certaines pompes dites *oscillantes*. Ce nom leur vient de leur organe principal, qui est une pièce métallique, *oscillant* autour d'un axe, de manière à jouer le rôle du piston d'une pompe ordinaire, aspirante et foulante.

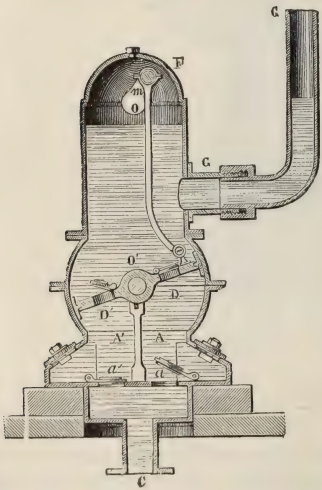


Fig. 329.

La figure 329 représente, en coupe, la pompe oscillante de Bramah. La pièce mobile est DD'; elle peut osciller autour de l'axe O', et on lui communique ce mouvement à l'aide d'une espèce de bielle reliée à une manivelle Om. Les tuyaux d'aspiration et de déversement sont disposés comme dans la pompe aspirante et foulante ordinaire : le déversement se fait par le haut et l'aspiration par le bas. Le corps de pompe lui-même est partagé en deux compartiments par une cloison verticale ; chacun d'eux peut communiquer alternativement avec le tuyau d'aspiration, puis avec le tuyau de déversement, par le jeu de deux couples de soupapes, aa' et DD', celles-ci fixées sur la pièce mobile même, et les autres placées sur le fond du corps de pompe. Dans sa position actuelle (fig. 329), la pièce mobile aspire l'eau dans le compartiment A et la chasse du compartiment A'; c'est le contraire qui se produirait dans la position symétrique de la pièce mobile.

296. **Pompes à jet continu.** — Dans tous les appareils précédents, l'écoulement est intermittent, car il est interrompu soit lorsque le piston s'abaisse pour les pompes aspirantes, soit quand le piston s'élève pour les pompes foulantes, soit enfin aux *points morts*, c'est-à-dire aux points d'arrêt du piston, pour les pompes aspirantes et foulantes. On a cherché depuis longtemps à rendre l'écoulement ou le jet continu. On y est arrivé de deux manières :

1° Par le dispositif de la *pompe à double effet;*

2° Par le réservoir à air de la *pompe à incendie.*

1° *Pompe à double effet.* — C'est une pompe aspirante et foulante, dont les deux tuyaux, d'aspiration et de déversement, se subdivisent chacun en deux embranchements (fig. 330) qui aboutissent au corps de pompe par deux orifices munis de soupape A, A′ et B, B′. Supposons que, dans sa position actuelle, le piston soit en train de monter : l'aspiration se produit par l'orifice A, tandis que la soupape A′ est fermée par la colonne d'eau que soulève le piston ; en même temps le refoulement de l'eau se produit par l'orifice B′, tandis que la soupape B reste fermée sous la pression de l'eau contenue dans le tuyau de déversement. Pendant la descente, au contraire, l'aspiration se fait en A′ et le refoulement en B′.

Le jet est donc *à peu près continu*, mais la manœuvre du piston exige nécessairement un effort double.

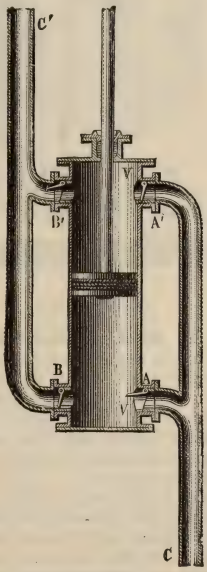


Fig. 330.

2° *Pompe à incendie.* — La pompe à incendie est une pompe foulante dans laquelle la régularité et la continuité du jet s'obtiennent à la fois : 1° par la réaction d'une masse d'air comprimée dans un réservoir spécial ; 2° par le jeu alternatif de deux pompes foulantes (fig. 331) accouplées, *m* et *n*, mues par un même balancier PQ, auquel huit hommes à la fois peuvent s'appliquer. Elles plongent dans une caisse (ou *bâche*), MN, qu'on maintient pleine d'eau tout le temps que l'appareil fonctionne. D'après la disposition des soupapes, on voit que lorsqu'une des pompes aspire l'eau de la bâche, l'autre la refoule dans un compartiment R qu'on nomme le *réservoir d'air;* de là, poussée par la réaction du gaz, l'eau passera par un orifice Z, dans un long tuyau de cuir qu'on dirige sur le foyer de l'incendie.

La vitesse de l'eau, à son entrée dans ce réservoir, étant plus grande qu'à sa sortie, son niveau s'élève au-dessus de l'orifice Z et l'air qui remplit le réservoir est comprimé. Par suite, toutes les fois que les pistons s'arrêtent, l'air comprimé, réagissant sur le liquide, le force à s'écouler d'une manière continue, jusqu'à ce que les pistons reprennent leur mouvement.

Pompe à vapeur. — Cette pompe à incendie peut être disposée de manière que le mouvement des pistons soit effectué par un petit moteur à va-

peur[1]. Elle est ordinairement munie d'une chaudière du système Field, qui produit en 8 minutes la vapeur d'eau nécessaire au travail de la pompe. Elle est assez puissante pour fournir un débit de 900 litres d'eau par minute et pour lancer un jet de 43 mètres de hauteur.

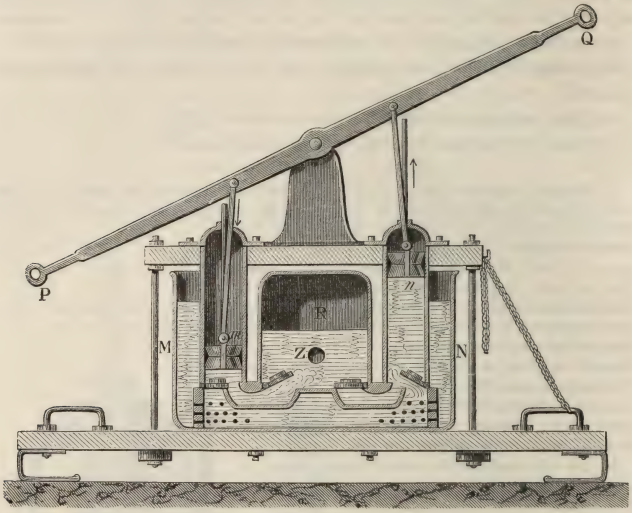


Fig. 351.

297. **Machines élévatoires** ou **Machines d'épuisement.** Quand il s'agit non plus des usages domestiques, mais de grands travaux industriels, tels que l'épuisement des mines ou le dessèchement des lacs, les modèles de pompe que nous avons décrits plus haut seraient insuffisants. On emploie alors, sous le nom de *machines élévatoires* ou de *machines d'épuisement*, de véritables machines qui ne sont plus manœuvrées à bras d'hommes, mais qui sont mues tantôt par l'eau, le vent ou la vapeur, et qui tantôt se meuvent elles-mêmes automatiquement.

Les plus usuelles parmi ces machines se composent d'un certain nombre de pompes aspirantes et foulantes, convenablement accouplées. Chacune de ces pompes doit présenter une grande solidité d'organes, à cause des pressions et des résistances considérables qu'elles sont destinées à subir. Leur piston plein est ordinairement un long cylindre massif, analogue au piston des presses hydrauliques, qu'on appelle *piston plongeur* (fig. 352).

Machine de Marly. — Telle était la fameuse *machine de Marly*, construite sous Louis XIV, pour élever l'eau de la Seine jusqu'aux châteaux royaux de Marly et de Versailles. Elle se composait de 221 pompes accouplées, qui étaient actionnées par 14 roues hydrauliques, établies sur le fleuve même, en un point

1. Voir dans Guillemin (*Monde physique*, t. Ier) la description de ce type de pompe à incendie.

où la rapidité du courant suffisait pour donner la vitesse et le travail nécessaires. — Aujourd'hui, la nouvelle machine de Marly se compose seulement de 25 pompes, mues par 5 roues hydrauliques, et elle débite une quantité d'eau beaucoup plus grande que l'ancienne machine.

C'est une machine du même genre, établie à une centaine de mètres de la Seine, qui alimente d'eau la ville de Fontainebleau; mais elle est mue à l'aide d'un moteur à vapeur.

D'autres machines d'épuisement, dont la plus connue est la grande machine de Schemnitz, fonctionnent plus lentement, mais automatiquement. Elles sont fondées sur un tout autre principe que les pompes. Elles dérivent d'un très ancien appareil hydraulique, connu sous le nom de *Fontaine de Héron*.

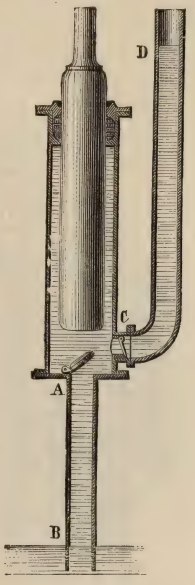


Fig. 332.

298. **Fontaine de Héron.** — Cet appareil[1] se compose de deux réservoirs de verre M et N (fig. 333) reliés entre eux par deux tubes droits en cuivre A et B. Le réservoir supérieur est surmonté d'une cuvette en cuivre D, et l'ensemble repose sur un trépied. La cuvette est mise en communication avec la partie inférieure du ballon N par le long tube B, tandis que le tube A fait communiquer entre eux les deux ballons. Enfin, un troisième tube plus petit traverse le fond de la cuvette et se rend à la partie inférieure du ballon M. Ce dernier tube peut s'enlever à volonté : on le retire pour introduire une certaine quantité d'eau dans le ballon M; puis on le replace et l'on verse de l'eau dans la cuvette. Le liquide descend, par le tube B, dans le ballon inférieur et en chasse l'air, qui vient s'accumuler dans le ballon supérieur; là cet air comprimé réagit sur l'eau et la fait jaillir par le tube central qu'on peut munir d'un ajutage. Le liquide devrait s'élever, au-dessus du niveau en M, à une hauteur égale à la différence de niveau dans les deux ballons; mais la hauteur du jet est notablement moindre, à cause de la résistance de l'air et du frottement de l'eau contre les tuyaux.

On peut donner d'autres formes à la fontaine de Héron. Celle qui est représentée par la figure 334 est la plus propre à faire comprendre l'application qu'on en a faite dans la construction de la machine de Schemnitz; la théorie en est la même.

1. L'invention en est attribuée à Héron d'Alexandrie, 120 ans av. J.-C.

299. **Machine de Schemnitz.** — Cet appareil a été construit à Schemnitz (Hongrie) pour servir à l'épuisement des mines. Il fonctionne automatiquement

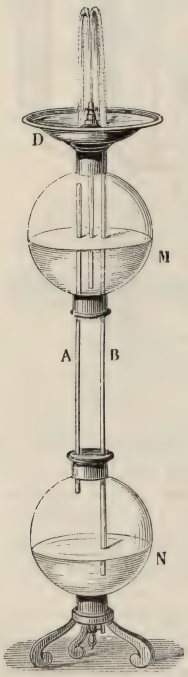


Fig. 533.

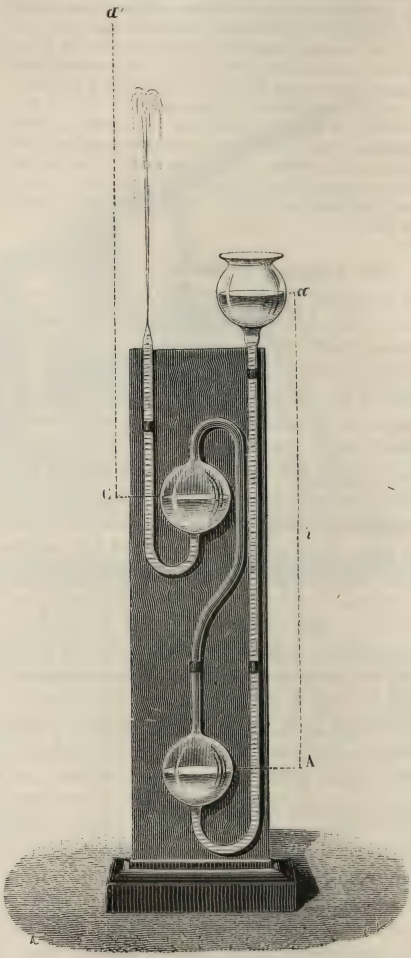


Fig. 534.

(fig. 533). Un premier réservoir R (correspondant au vase A de la figure 534) est situé au niveau de l'orifice du puits de mine : il reçoit un courant d'eau, pro-

venant d'une chute qui est élevée au-dessus du sol d'une hauteur h supérieure à la profondeur du puits; là s'effectue la compression de l'air qui doit servir de moteur. Cet air comprimé se rend, par des tuyaux de conduite, dans un deuxième réservoir R', situé au fond du puits, et où viennent se rassembler, par le tuyau à robinet r'', les eaux provenant des mines M qu'il s'agit d'épuiser (R' correspond au vase C de l'appareil 334). Quand la tension de l'air y est devenue suffisante, il se détend, en comprimant l'eau, et en l'expulsant par un tuyau abducteur ($r'a'$ correspondant au tube Ca de l'appareil 334). Des robinets convenablement placés, $r\,r'\,r''\,r'''$, permettent de régler la marche de la machine, en fermant et en ouvrant successivement les réservoirs à eau et à air comprimé.

Remarque. — On voit que l'appareil fonctionne automatiquement par l'intervention de l'air comprimé. On aurait donc pu le citer également comme application de l'air comprimé.

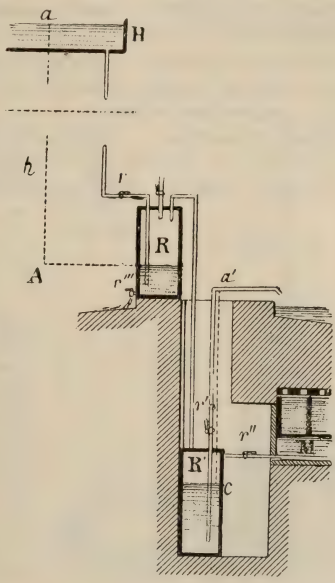


Fig. 335.

300. **Siphons.** — On appelle *siphons* des instruments, très employés dans les laboratoires et dans les arts, pour transvaser les liquides d'un vase à un autre.

Le siphon ordinaire consiste simplement en un tube recourbé à branches inégales (fig. 336).

Fonctionnement. — Pour se servir du siphon, on commence par l'*amorcer*, c'est-à-dire par le remplir de liquide. Pour cela, on le retourne, et on l'emplit directement; puis, fermant momentanément ses deux orifices, on le place de manière que ce soit la petite branche qui plonge dans le liquide à transvaser. Ou bien, l'on met tout d'abord le siphon en place, puis on aspire avec la bouche, par l'orifice B, l'air qui est dans l'appareil : le vide se faisant alors dans celui-ci, le liquide du vase C est refoulé dans le tube par l'effet de la pression atmosphérique et le remplit.

Lorsque le liquide à transvaser est un liquide corrosif, on emploie un siphon à trois branches. Tantôt cette troisième branche est un tube latéral M (fig. 337), par l'orifice duquel on aspire l'air (en ayant soin de fermer en même temps l'orifice P). Tantôt cette

branche additionnelle est un tube soudé à la grande branche, et terminé par un petit ballon de verre (fig. 338). En chauffant doucement celui-ci, l'air s'y dilate et s'échappe en assez grande quantité pour que le siphon s'amorce ensuite de lui-même par suite du refroidissement et de la diminution de pression qui en résulte.

Par quelque procédé que le siphon ait été amorcé, l'écoulement se continue de la petite branche vers la grande, tant que la première plonge dans le liquide.

Théorie élémentaire. — Expliquons pourquoi cet écoulement a lieu. D'une part, la force p qui presse le liquide en M (fig. 336) et le sollicite à s'écouler dans la direction CMB, est égale à la pres-

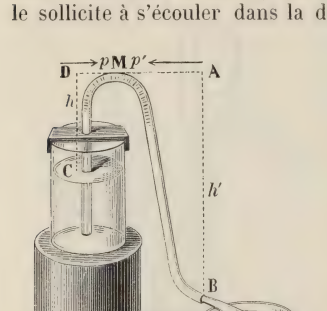


Fig. 336.

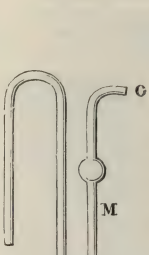


Fig. 337.

Fig. 338.

sion atmosphérique (Hd), *moins* le poids (hd) d'une colonne d'eau, dont la hauteur *verticale* est DC ($= h$). D'autre part, il existe une force contraire p', qui sollicite le liquide dans la direction BMC, et qui est égale au poids de l'atmosphère Hd, *moins* celui ($h'd$) d'une colonne d'eau ayant pour hauteur verticale AB ($= h'$). Or h' étant plus grand que h, il en résulte que la pression p' est plus petite que p. C'est donc celle-ci qui l'emporte, et qui pousse la tranche liquide dans le sens CMB et l'écoulement doit avoir lieu en vertu de la différence de ces deux forces $f = (h' - h)d$. Et, comme la poussée est la même sur toute tranche liquide située en un point quelconque du siphon, le liquide s'écoulera en bloc, et pour ainsi dire d'un seul morceau.

La vitesse d'écoulement est déterminée par la formule de Torricelli $V = \sqrt{2g(h' - h)}$. Par suite, *la vitesse d'écoulement est d'au-*

tant plus grande que la différence de niveau entre l'orifice B *et la surface du liquide dans le vase* C *est plus grande.*

301. **Théorie complète du siphon.** — Dans l'explication précédente, nous avons supposé que l'instrument fonctionnait dans l'atmosphère, et nous avons négligé le poids spécifique de l'air par rapport à celui du liquide qui s'écoule. On peut faire la théorie du siphon en le supposant placé dans un milieu dont la densité d ne soit pas négligeable par rapport à la densité D du liquide à transvaser. Supposons le siphon *amorcé*, et considérons une tranche liquide m, située à un niveau quelconque dans le siphon; soient h et h' les distances verticales de cette tranche aux surfaces libres MN et M'M' des vases A et A' (fig. 339); enfin, soit ϖ la pression par unité de surface que le milieu ambiant, de densité d, exerce au niveau de la surface libre MN : il résulte des principes fondamentaux de l'hydrostatique que la pression exercée, au niveau M' N', sera supérieure à ϖ d'une quantité égale au poids d'une colonne fluide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance verticale $(h' - h)$ des deux niveaux : elle sera donc $\varpi + (h' - h)\,d$.

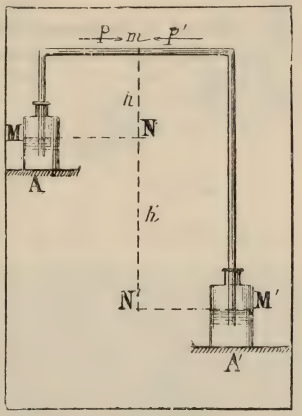


Fig. 339.

Cela posé, évaluons les poussées p et p' que supporte la tranche m, du côté de chaque vase. Soit s la section de cette tranche, et D la densité du liquide. On a évidemment

$$p = \varpi s - shD.$$

On a de même

$$p' = [\varpi + (h' - h)\,d]\,s - sh'D.$$

Soit f la différence de ces deux poussées, on a

$$f = \varpi s - shD - [\varpi + (h' - h)\,d]\,s + sh'D = s\,(h' - h)\,(D - d).$$

Cette formule renferme tous les cas particuliers que peut présenter l'usage des siphons, dans un milieu ambiant quelconque.

1° *d est négligeable vis-à-vis de* D. — C'est le cas ordinaire ; on a alors $f = s\,(h' - h)\,D$, la *charge* est $h' - h$, et la vitesse d'écoulement est fournie par la formule de Torricelli $V = \sqrt{2g\,(h' - h)}$. On voit que la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la distance verticale des niveaux (et non pas à la différence des branches); elle s'annulera lorsque, par suite de l'écoulement, le niveau M'N' aura atteint le niveau MN.

2° *d n'est pas négligeable, mais est inférieur à* D. — C'est le cas d'un liquide s'écoulant dans un milieu fluide, de densité inférieure à la sienne. Le terme $(D - d)$ est positif, ainsi que la force f. Cela signifie que la poussée p est plus forte que la poussée p' : l'écoulement a donc lieu du vase supérieur au vase inférieur, avec une vitesse proportionnelle à $\sqrt{h' - h}$.

3° *d est supérieur à* D. — Ce serait le cas d'un liquide s'écoulant dans un autre liquide plus dense. Alors le terme (D — *d*), et par suite la force *f*, sont *négatifs*. Cela veut dire que la poussée *p'* l'emporte sur la poussée *p*; l'écoulement aura lieu *du vase inférieur* A' *au vase supérieur* A.

Vérification. — On peut réaliser cette curieuse expérience en réunissant deux vases A et A', pleins de pétrole, par un siphon, qu'on amorcera dans un vase extérieur plein d'eau.

302. **Siphon à écoulement constant.** — D'après ce qui précède, pour que la vitesse d'écoulement soit constante, il faut que la

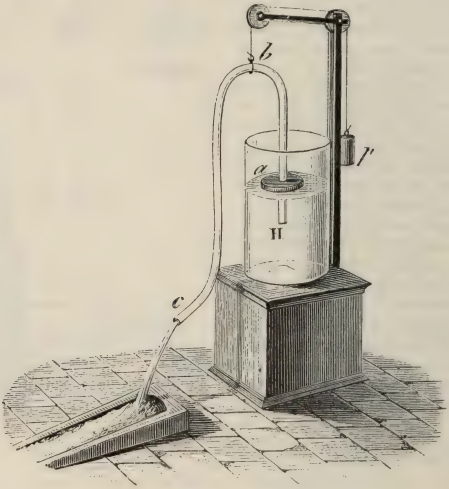


Fig. 340.

distance verticale des deux niveaux du liquide, dans les deux branches, soit toujours la même. On réalise cette condition à l'aide d'un dispositif très simple, indiqué par Héron d'Alexandrie[1]. Le siphon est maintenu en équilibre au moyen d'un flotteur *a* et d'un poids *p* (fig. 340), de manière qu'à mesure que le niveau baisse dans le vase H, le siphon descend avec lui; la différence entre les hauteurs *ab* et *bc* demeure donc invariable, et, par suite, la vitesse d'écoulement est constante.

303. **Siphon intermittent** ou **Vase de Tantale.** — Le *siphon intermittent*, ainsi que son nom l'indique, donne un écoulement

1. Dans son traité intitulé *Pneumatiques*.

qui n'est pas continu. Ce siphon est disposé dans un vase de manière que la branche la plus courte s'ouvre près du fond, tandis que la plus grande traverse ce fond et va déboucher au dehors (fig. 341). Le vase étant alimenté par une source d'eau constante, le niveau s'y élève peu à peu, et en même temps dans la petite branche, jusqu'au sommet du siphon. Celui-ci s'amorce alors par l'effet de la pression du liquide, et l'écoulement s'opère comme le montre la figure. Si l'appareil est disposé de manière que l'écoulement du siphon soit plus rapide que celui du tube d'alimentation, le niveau baisse dans le vase, et la petite branche

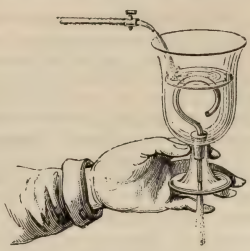


Fig. 341.

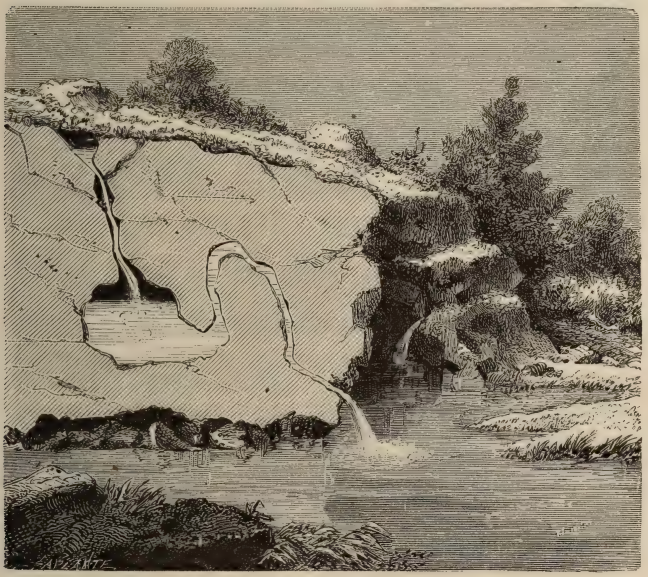


Fig. 342.

émerge bientôt : alors le siphon se *désarmorce*, et l'écoulement est interrompu. Mais, le vase continuant à être alimenté par la

source constante, le niveau s'élève de nouveau, et la même série de phénomènes se renouvelle périodiquement.

304. **Fontaines intermittentes naturelles.** — C'est un phénomène naturel qu'on observe dans plusieurs contrées. Il y a de ces fontaines qui, après avoir donné de l'eau pendant plusieurs jours ou plusieurs mois, s'arrêtent tout d'un coup pendant un intervalle plus ou moins long, puis recommencent à couler. Pour d'autres, ces périodes successives d'écoulement et de repos se renouvellent plusieurs fois par heure. On peut expliquer aisément ce singulier phénomène, en assimilant la fontaine à une sorte de vase de Tantale, de grandes dimensions, constitué par une série de cavités et de conduites souterraines (fig. 342). Le vase se remplit, plus ou moins vite, par l'apport des eaux provenant de sources voisines, et commence à se vider dès que le siphon naturel, formé par les fissures du sol, est amorcé. L'écoulement s'arrête quand le siphon est désamorcé par suite de la rentrée de l'air, et il reprend dès que l'amorçage est rétabli par l'arrivée des eaux extérieures

---

CHAPITRE III

NOTIONS DE CAPILLARITÉ.

305. **Phénomènes capillaires : Définitions.** — Il se produit au contact soit des solides avec les liquides, soit des liquides entre eux, une série de phénomènes qui paraissent en contradiction avec les principes d'hydrostatique. Tels sont, par exemple, les phénomènes suivants.

Lorsqu'on plonge un corps solide dans un liquide qui est de nature à le mouiller, — par exemple une tige de verre bien propre dans de l'eau, — le liquide, *comme s'il n'était plus soumis*

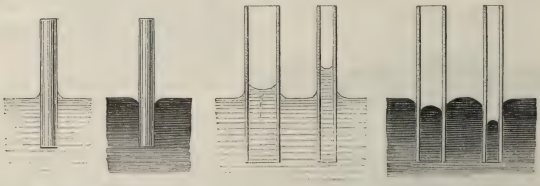


Fig. 343. Fig. 344. Fig. 345. Fig. 346.

aux lois de l'hydrostatique, est soulevé autour du corps solide, et sa surface, cessant d'être horizontale, prend une forme concave (fig. 343).

Si au contraire le corps solide plongé n'est pas mouillé par le

liquide, — ce qui a lieu pour le verre en contact avec le mercure, — le liquide, au lieu de s'élever, se déprime, et sa surface prend une forme convexe tout autour du corps plongé (fig. 344).

En outre, la surface du liquide affecte la même courbure, concave ou convexe, sur les bords du vase qui le contient, suivant qu'il en mouille ou n'en mouille pas les parois.

Ces phénomènes deviennent plus apparents lorsque, au lieu d'une tige pleine, on plonge dans le liquide des tubes de verre creux d'un petit diamètre. Selon que ces tubes sont ou ne sont pas mouillés, il s'y produit une ascension ou une dépression du liquide, d'autant plus grande que le diamètre est plus petit (fig. 345 et 346). De plus, lorsque les tubes sont mouillés, la surface libre du liquide y prend la forme d'une surface courbe concave, analogue à un segment sphérique : c'est ce qu'on appelle un *ménisque concave* (fig. 345); quand ils ne sont pas mouillés, la colonne déprimée se termine par une surface courbe convexe, qu'on appelle *ménisque convexe* (fig. 346).

Les tubes qui servent à ces expériences sont dits *capillaires*, parce que leur diamètre intérieur est assez fin pour être comparable à celui d'un cheveu (*capillus*). Les phénomènes qu'on y observe sont appelés eux-mêmes *phénomènes capillaires*, et ils servent de type à un grand nombre d'autres phénomènes analogues, qu'on rattache à la même cause et qu'on désigne sous le même nom.

La partie de la physique qui étudie ces phénomènes s'appelle *capillarité*. On appliquait également ce nom autrefois à la force moléculaire qu'on avait imaginée pour les expliquer.

On voit, d'après ce qui précède, qu'il y a, dans les phénomènes fondamentaux de la capillarité, deux cas bien distincts : celui des liquides qui mouillent les parois solides du corps, plein ou creux, avec lequel ils sont en contact, et le cas des liquides qui ne les mouillent pas. Le premier cas est défini par l'ascension de l'eau et le second par la dépression du mercure, dans les tubes en verre. Le premier est le seul dont les phénomènes soient parfaitement nets et les lois rigoureusement établies. C'est celui que nous étudierons tout d'abord. Après en avoir vérifié les lois par l'expérience, nous les expliquerons par la théorie actuellement admise. Cela nous permettra d'exposer ensuite plus aisément les phénomènes de dépression capillaire, ainsi que les autres phénomènes qui se rattachent à la capillarité.

I — PHÉNOMÈNES PRODUITS AU CONTACT DES SOLIDES PAR LES LIQUIDES QUI LES MOUILLENT.

306. **Lois de l'ascension des liquides dans les tubes capillaires.** — 1re Loi ou loi de Jurin. — *Pour un même liquide, et à une même température, les hauteurs moyennes soulevées dans divers tubes capillaires sont en raison inverse des diamètres de ces tubes* (fig. 345).

On appelle *hauteur moyenne* la hauteur d'un cylindre à bases circulaires qui aurait exactement le même volume que la colonne liquide soulevée. En appelant h cette hauteur et $2r$ le diamètre du tube, la loi de Jurin peut s'exprimer par l'équation

$$[1] \qquad rh = \text{constante}.$$

La valeur de cette *constante* sera déterminée plus tard, comme conséquence de la théorie.

2e Loi. — *Pour un même liquide et à une même température, les hauteurs moyennes soulevées sont indépendantes de la forme du tube capillaire, au-dessus et au-dessous du ménisque, ainsi que de la substance des parois du tube et de leur épaisseur.*

La première partie de cette loi signifie que la forme du tube capillaire, au-dessus ou au-dessous de la région où se fait le ménisque, n'intervient pas dans le phénomène. Les colonnes soulevées seraient très inégales en poids, mais égales en hauteur, dans un tube évasé, ou dans un tube à large base, ou encore

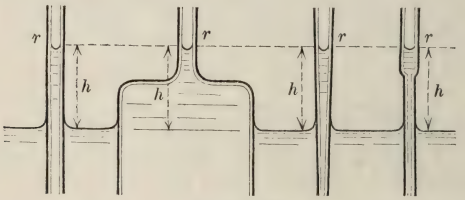


Fig. 347.

dans un tube exactement cylindrique, qui auraient tous le même diamètre à l'endroit où s'arrête le liquide (fig. 347). Le coefficient r qui entre dans la formule [1] est donc le diamètre qui correspond à la région du ménisque.

3e Loi. — *Pour divers liquides et à une même température, les hauteurs moyennes soulevées, dans un même tube capillaire, varient avec la nature du liquide.*

Par exemple, dans un tube en verre de diamètre égal à $1^{mm},295$, l'alcool de densité égale à 0,819 s'élève à $9^{mm},182$; l'alcool de densité 0,941 s'élève jusqu'à $9^{mm},997$; l'essence de térébenthine, jusqu'à $9^{mm},952$, etc. (Expériences de Gay-Lussac.)

4e Loi. — *Pour tous les liquides, les hauteurs moyennes soulevées dans un même tube capillaire diminuent (jusqu'à devenir nulles) quand la température s'élève.*

En même temps que les hauteurs *s'abaissent*, les ménisques *s'aplatissent*, de sorte que, à partir d'une certaine température, qui est variable pour les di-

vers liquides, la surface capillaire est devenue plane et horizontale, et son niveau coïncide avec le niveau extérieur.

307. **Loi de l'ascension des liquides entre deux lames parallèles.** — *Pour un même liquide et à une même température, la hauteur moyenne soulevée entre deux lames parallèles* (fig. 348) *est moitié de la hauteur moyenne qui serait soulevée dans un tube capillaire de diamètre égal à la distance des lames.*

On peut encore dire que *la hauteur soulevée est la même que dans un tube capillaire de rayon égal à la distance des lames parallèles.*

Le phénomène de l'élévation de l'eau entre deux lames en verre, parallèles et suffisamment rapprochées, est aussi net que celui de l'élévation dans les tubes capillaires, et il se prête aussi aisément aux mesures de précision.

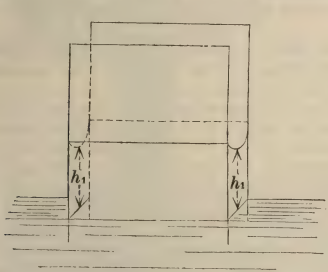


Fig. 348.

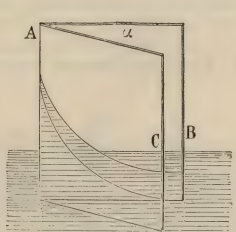


Fig. 349.

308. **Loi de l'ascension des liquides entre deux lames inclinées.** — *Entre deux lames inclinées l'une sur l'autre (d'un très petit angle), plongées verticalement dans un liquide qui les mouille, celui-ci s'élève de manière que sa surface terminale concave ait pour section verticale, dans le plan bissecteur, une hyperbole équilatère.*

Cette loi ne se confirme que dans le cas où l'angle α des lames AB et BC est suffisamment petit (fig. 349). On voit alors le liquide s'élever le long de l'arête verticale du dièdre, et deux courbes analogues à des hyperboles équilatères se dessiner sur les faces B et C.

309. **Vérification des lois. — Expériences de Gay-Lussac.** — La plupart des lois précédentes ont été d'abord trouvées *à priori* par Laplace, à l'aide de l'analyse mathématique. Elles ont ensuite été vérifiées expérimentalement par divers savants, entre autres par Gay-Lussac, le premier, puis, longtemps après lui, par Édouard Desains, Frankenheim, Simon (de Metz), Quet, M. Valson, M. Wilhelmy et M. Quincke (de Heidelberg), M. Van der Mensbrugghe et M. Wolf, etc.

Ce fut à la demande de Laplace, et pour vérifier les formules de ce dernier, que Gay-Lussac entreprit ses expériences. Ce n'étaient pas les premières mesures qui eussent été faites sur les phénomènes capillaires, mais toutes les mesures précédentes, depuis celles de Haüy jusqu'à celles de Newton, étaient complètement discordantes, pour avoir été faites en l'absence de certaines précautions indispensables. Ce sont ces précautions mêmes qui caractérisent la méthode de Gay-Lussac et en ont rendu les résultats rigoureusement précis et parfaitement concordants.

1° *Lavage des tubes capillaires.* — Gay-Lussac reconnut qu'une des princi-

pales causes d'erreur dans les expériences antérieures, c'était le défaut de propreté de la surface intérieure des tubes. Un voile, aussi mince qu'il soit, d'une impureté quelconque suffit pour transformer le verre en une autre substance et pour empêcher le contact parfait du liquide, — condition nécessaire à la vérification des lois. — Avant d'employer un tube ou une lame de verre, Gay-Lussac avait donc soin de les laver d'abord à l'alcool, puis aux acides.

2° *Remplissage des tubes capillaires.* — Les tubes étant parfaitement propres et complètement secs, Gay-Lussac ne les plongeait point sans précautions. Il faisait monter le liquide, en l'aspirant, jusqu'à l'extrémité supérieure du tube. Une gaine liquide restait alors adhérente à la surface parfaitement nette du verre ou de toute autre substance. C'est dans cette gaine liquide que le liquide montait ou descendait, et se fixait à un niveau déterminé, comme dans un tube du même liquide, auquel le tube solide n'aurait servi que de support.

Remarque. — Les hauteurs moyennes observées par Gay-Lussac, dans ces conditions particulières de propreté des tubes, étaient beaucoup plus grandes, toutes choses égales d'ailleurs, que dans des tubes *non préparés* [1].

3° *Mesure des hauteurs moyennes.* — La hauteur moyenne, d'après sa définition même, n'est pas directement observable. Elle se compose d'abord de la distance h_1 du niveau général extérieur au point le plus bas du ménisque dans le tube, *plus* d'une correction ε qui est égale à la hauteur d'un cylindre ayant même section que le tube et *même volume que le ménisque liquide* (fig. 350). On mesurait donc directement h_1, l'on calculait ε, et l'on avait $h = h_1 + \varepsilon$.

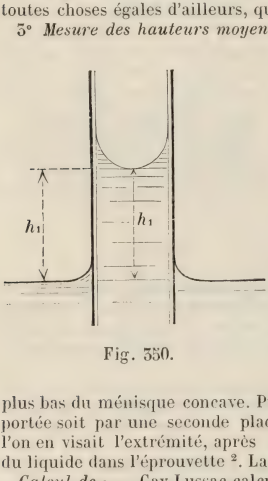


Fig. 350.

Mesure de h_1. — Le tube capillaire était fixé perpendiculairement à une planchette, qu'on posait sur les bords bien dressés d'une éprouvette en verre *ee*, à moitié pleine du liquide (fig. 351). L'ascension du liquide dans le tube capillaire ayant été réalisée (par le procédé de l'aspiration), on relevait au cathétomètre le niveau *lln* du point le plus bas du ménisque concave. Puis on substituait au tube une vis à pointe *b*, portée soit par une seconde plaque horizontale, soit par la même plaque, et l'on en visait l'extrémité, après l'avoir amenée au contact de la surface plane du liquide dans l'éprouvette [2]. La différence des deux lectures donnait h_1.

Calcul de ε — Gay-Lussac calculait ε d'après la *correction de Laplace.* Celle-ci consiste à considérer la surface extérieure du ménisque liquide comme assimilable à un hémisphère, de rayon égal à celui du tube. Le volume v de ce ménisque liquide est alors égal à la différence de deux volumes : 1° celui d'un cylindre, de hauteur r et de base égale à la section du tube, πr^2 (ce volume est donc πr^3) ; 2° celui d'une demi-sphère de rayon r, c'est-à-dire $\frac{2}{3}\pi r^3$. On a donc

$$v = \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

1. Elles étaient à peu près doubles de celles qu'avaient observées Newton, puis Haüy, dans des conditions analogues (Violle, *Physique*, t. Ier).

2. On enlevait, avant de viser, un peu du liquide, de manière à dégager la pointe à viser.

D'autre part, le cylindre équivalent à ce ménisque aurait pour expression de son volume $v = \pi r^2 \varepsilon$. En égalant ces deux expressions de v, il vient

$$\pi r^2 \varepsilon = \frac{1}{3} \pi r^3, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon = \frac{r}{3}.$$

Remarque. — Telle est la formule de correction proposée par Laplace et

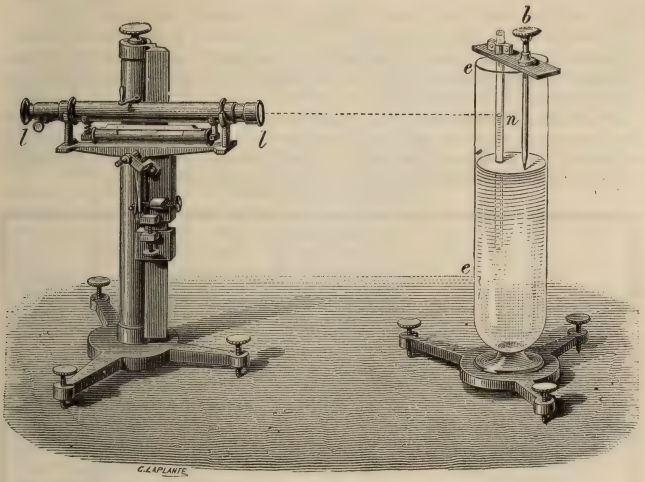


Fig. 351.

adoptée par Gay-Lussac. Elle ne convient qu'à des tubes *très étroits* (de 1 millimètre à 2 millimètres), pour lesquels l'assimilation du ménisque à un hémisphère est suffisamment rigoureuse. Pour des tubes plus larges on peut calculer ε à l'aide d'autres formules, proposées par Poisson, par Hagen, par Ed. Desains et par M. Quet. Celle de Quet est la plus générale. Elle consiste en une série qui donne le rapport de la hauteur h à la hauteur observée h_1, en fonction de celle-ci et du rayon r du tube capillaire.

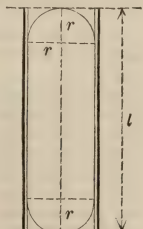


Fig. 352.

4° *Mesure des diamètres des tubes capillaires.* — Les diamètres, ou les rayons des tubes, qui entrent dans la loi de Jurin, sont ceux de la région où se forme le ménisque. Gay-Lussac les mesurait à l'aide d'un jaugeage au mercure. Il prenait un bout du tube, de longueur l, et le remplissait de mercure (fig. 352). Ce liquide y formait un cylindre, de longueur l, terminé par deux ménisques convexes, qu'on pouvait assimiler à deux hémisphères de rayon r.

L'expression géométrique de ce volume était évidemment

$$\pi r^2 (l - 2r) + \frac{4}{3} \pi r^3.$$

On pesait ce mercure : soit p son poids. On pouvait exprimer ce poids en fonction du volume et de la densité D du mercure. On avait ainsi l'équation

$$[1] \qquad \left[\pi r^2 (l - 2r) + \frac{4}{3}\pi r^3\right] D = p.$$

C'était une équation du 3e degré en r. On commençait par résoudre celle-ci,

$$[2] \qquad \pi r^2 l D = p,$$

laquelle suppose le volume du mercure parfaitement cylindrique; puis, avec la valeur approchée de r qu'on en déduisait, on résolvait l'équation [1] par approximations successives.

5° *Résultats numériques.* — Gay-Lussac ne fit qu'un petit nombre de mesures. Ses principaux résultats sont contenus dans le tableau suivant. Les rayons r, ainsi que les hauteurs d'ascension, y sont évaluées en centimètres (unités C. G. S.); h_1 est la hauteur mesurée, h la hauteur corrigée $(h_1 + \varepsilon)$.

	r	h_1	h	rh
Eau (à 8°,5 C.)	0c,06472 0,09519	2c,31634 1,55861	2c,33791 1,59034	0,15131 0,15139
Alcool (à 8° C.). (Densité = 0,81916)	0,06472 0,09519	0,918235 0,608397	0,939808 0,640127	0,060824 0,060953
Alcool (à 8° C.). (Densité = 0,859)	0,06472	0,93010	1,14580	
Alcool. (Densité = 0,941)	0,06472	0,99970	1,02127	
Essence de tébérenthine . . .	0,06472	0,99520	1,01677	

Les résultats relatifs à l'eau (prise à la température de 8° C.), et à l'alcool de densité = 0,819, vérifient la loi de Jurin. On voit que le produit rh est *sensiblement constant* pour chacun de ces liquides.

On voit de même que, dans un même tube (r = 0c,064), les hauteurs soulevées sont différentes pour différents liquides (3e loi). Cette même loi a été vérifiée depuis par des mesures de Frankenheim et de Simon (de Metz), ayant porté sur un grand nombre d'autres liquides.

Lames parallèles. — Gay-Lussac vérifia également la loi de l'ascension entre deux lames de verre, parallèles et verticales. Il les prenait assez rapprochées pour que la surface du ménisque concave pût être assimilée à celle d'un demi-cylindre circulaire. Dans ce cas, *la hauteur moyenne h* se déduit de la hauteur observée h_1, en ajoutant à celle-ci un terme correctif ε qu'on calcule par la formule

$$\varepsilon = e\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0{,}107\, e,$$

e étant la distance des deux lames.

Par exemple, pour l'ascension de l'eau entre deux lames de verre, distantes de 0,1069, il trouva $h_1 = 4^c,3574$ et $h = 1,3689$; par suite, le produit $eh = 0,14633$ et il est à peu de chose près égal à la constante 0,151 qui correspondrait à un tube de verre de rayon égal à 0,1069.

310. **Expériences d'Édouard Desains.** — Les expériences de Gay-Lussac furent reprises par Édouard Desains, dans des conditions plus variées et encore plus précises.

Comme Gay-Lussac, Desains lavait soigneusement ses tubes capillaires, aux acides d'abord, puis à la potasse, enfin à l'alcool et à l'eau. Il y produisait également par aspiration l'ascension des liquides. Enfin il en mesurait les diamètres par le procédé de Gay-Lussac, soit par un jaugeage au mercure pour les tubes les plus fins, soit par un jaugeage à l'eau pour les tubes plus larges [1]. Mais il mesurait les hauteurs soulevées à l'aide d'un procédé plus précis que celui de Gay-Lussac.

Il supprimait l'éprouvette, pour éviter les erreurs de réfraction, et plaçait le tube capillaire dans une large soucoupe, qu'il remplissait du liquide jusqu'au-dessus des bords (ceux-ci étaient préalablement graissés, de manière que le liquide ne les mouillât pas et formât au-dessus d'eux un ménisque convexe). Le tube capillaire, porté par un trépied à vis calantes, était plongé verticalement dans le liquide (fig. 353) : on relevait au cathétomètre la hauteur h_1 du point le plus bas du ménisque. Quant au niveau extérieur, il était déterminé par une pointe i qu'on amenait à y affleurer exactement ; on relevait ensuite la hauteur de la pointe i et celle de l'image i' de cette pointe, réfléchie par le liquide ; la moyenne de ces deux lectures donnait évidemment la hauteur du niveau extérieur.

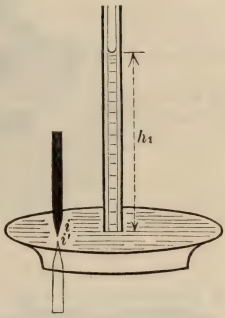


Fig. 353.

Les résultats de ces mesures confirmèrent l'exactitude de la loi de Jurin.

Desains vérifia également la loi de l'ascension entre les lames. Il employait pour cela un petit appareil spécial (fig. 354). Il se composait de deux lames de verre, préalablement nettoyées, qu'on séparait aux quatre angles par quatre bouts de fil de cuivre coupés dans le même morceau, et qu'on serrait l'une contre l'autre à l'aide de quatre petites presses à vis. On ne relevait la hauteur soulevée que lorsque la ligne de raccordement du liquide et de la paroi était des deux côtés horizontale, dans sa plus grande étendue.

311. **Influence de la température. — Expériences de M. Wolf.** — La quatrième loi, ci-dessus énoncée, résume l'action de l'élévation de la température sur l'abaissement de la colonne soulevée. L'effet est beaucoup plus grand que ne le supposait Laplace. D'après les expériences d'Edouard Desains, de Brünner, de M. Wolf, la diminution de la hauteur moyenne est beaucoup plus rapide que la diminution de densité, qui résulte pour le liquide de la même élévation de température. Ainsi pour l'eau, tandis que la diminution moyenne de densité est d'environ 0,00045 par degré entre 0° et 100°, la diminution moyenne de hauteur moyenne est environ quatre fois plus grande (0,00182).

M. Wolf a poussé beaucoup plus haut l'étude de cette influence. En opérant en vase clos, il a pu atteindre et dépasser la température à laquelle le liquide bout normalement, sous la pression atmosphérique. Il a opéré sur plusieurs

1. Il s'est servi de tubes qui avaient jusqu'à $4^{mm},6$ de rayon.

liquides, l'*eau*, l'*éther*, l'*alcool*, le *sulfure de carbone*, l'*huile de naphte*. On voit ces liquides baisser rapidement dans les tubes capillaires, à mesure que la température s'élève, et en même temps la concavité de leur ménisque s'aplatir; on finit par atteindre une température pour laquelle la capillarité cesse

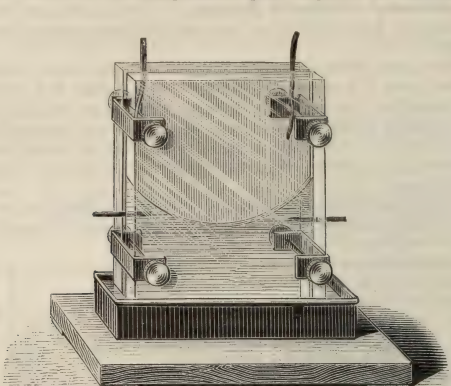


Fig. 354.

de se manifester, au double point de vue de l'ascension dans les tubes et de la courbure des surfaces terminales. Cette température est variable avec les divers liquides. Elle n'est pour l'éther que de 191°,1, tandis qu'elle dépasse 500° pour l'eau.

312. **Tension superficielle.** — A l'étude expérimentale de la capillarité on doit rattacher le phénomène de la *tension superficielle*, qu'on peut présenter comme *un fait* et établir *expérimentalement*, en dehors de toute idée théorique préconçue.

1° *Définitions.* — La surface libre d'un liquide est le siège d'une traction ou *tension* tangentielle, égale dans toutes les directions, et comparable en tous points à celle que présenterait une mince membrane de caoutchouc enveloppant le liquide [1]. Il en résulte que, si l'on imagine la couche superficielle du liquide coupée normalement par un plan quelconque, il existe une *force de réunion* du liquide pour lui-même, s'exerçant dans le plan tangent et uniformément en tous les points, qui *maintiendrait réunis* les deux bords de la section.

C'est cette force de réunion qu'on appelle proprement la *tension superficielle* du liquide. On donne aussi ce nom à la mesure même de cette force, qu'on a l'habitude d'exprimer *en milligrammes* et de rapporter au *millimètre* de lon-

1. Cette assimilation est très ancienne. Ce fut le physicien Segner qui en eut la première idée (1752); et elle servit ensuite à Young, pour établir sans calcul la théorie des phénomènes capillaires.

gueur. On désigne également ce coefficient sous le nom de *constante de cohésion* ou de *constante capillaire.*

2° *Démonstration expérimentale directe.* — On peut établir expérimentalement de deux manières l'existence de cette tension superficielle : soit en la mettant directement en évidence, soit en vérifiant les conséquences théoriques qu'on en peut déduire. Nous citerons quelques-unes des expériences directes les plus probantes.

Expérience de Dupré. — On prend un vase quadrangulaire plat ABCD (fig. 355), dont la paroi métallique CD est mobile autour d'une charnière coïncidant avec l'arête C. Au moyen d'un fil attaché en E, on applique et l'on maintient la paroi CD contre une cale, suivant la direction CD_1. On verse alors de l'eau jusqu'aux bords du vase, et, quand l'équilibre est établi, on brûle brusquement le fil d'attache D_1E : on voit immédiatement la paroi CD_1 revenir spontanément à sa position normale CD. Or la poussée hydrostatique tendrait au contraire à la maintenir pressée contre la cale : il faut donc qu'il y ait une force de *traction tangentielle* qui la ramène dans la verticale : c'est un effet de la *tension superficielle.*

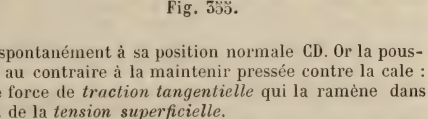


Fig. 355.

Expérience de M. van der Mensbrugghe. — On prend un cadre en fil de fer de forme quelconque (fig. 356) et on le plonge dans le *liquide glycérique* de

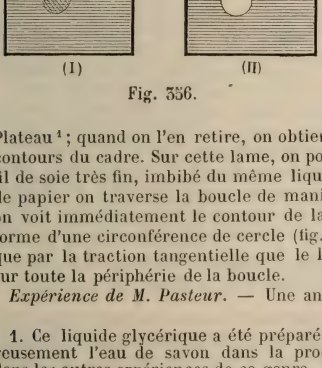


Fig. 356.

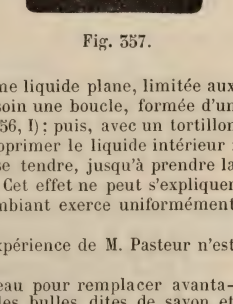


Fig. 357.

Plateau[1]; quand on l'en retire, on obtient une lame liquide plane, limitée aux contours du cadre. Sur cette lame, on pose avec soin une boucle, formée d'un fil de soie très fin, imbibé du même liquide (fig. 356, I); puis, avec un tortillon de papier on traverse la boucle de manière à supprimer le liquide intérieur : on voit immédiatement le contour de la boucle se tendre, jusqu'à prendre la forme d'une circonférence de cercle (fig. 356, II). Cet effet ne peut s'expliquer que par la traction tangentielle que le liquide ambiant exerce uniformément sur toute la périphérie de la boucle.

Expérience de M. Pasteur. — Une ancienne expérience de M. Pasteur n'est

1. Ce liquide glycérique a été préparé par Plateau pour remplacer avantageusement l'eau de savon dans la production des bulles dites de savon et dans les autres expériences de ce genre. Il se compose d'un mélange, fait dans certaines conditions, de trois volumes d'eau de savon (savon de Marseille, 25 grammes par litre) bien filtrée avec deux volumes de glycérine pure.

pas moins démonstrative que les précédentes. Elle consiste à enfoncer verticalement une baguette de verre dans un bain de mercure (fig. 357) dont la surface a été préalablement saupoudrée de grès finement pulvérisé. On voit la poussière disparaître aussitôt dans le trou formé comme si elle était posée sur une membrane que la baguette entraînerait en s'enfonçant. Dès qu'on retire la baguette, le grès reparaît (en même temps, en quelque sorte, que cette membrane hypothétique) et reprend sa position primitive.

On réussit également bien cette expérience dans un bain d'eau saupoudré de poudre de lycopode. On graisse alors la baguette de verre, de façon qu'elle ne soit pas mouillée.

315. Origine de la tension superficielle. — Cohésion des liquides. — État de la couche superficielle. — La tension superficielle est manifestement un effet de la *cohésion des liquides*.

On a donné le nom de forces de *cohésion* aux forces attractives qui s'exercent entre les molécules des corps. Ces forces sont parfaitement nettes dans le cas de l'état solide : ce sont elles qui s'opposent à la rupture des corps solides. De nombreuses expériences prouvent que la cohésion existe également, à un degré plus ou moins élevé, soit entre les molécules des liquides, soit entre celles-ci et les molécules des corps solides et même des gaz qui sont en contact avec les liquides.

Une baguette de verre, trempée dans un liquide qui la mouille, entraîne à son extrémité inférieure, quand on la retire du liquide, une gouttelette plus ou moins grosse. La portion du liquide qui est immédiatement en contact avec le verre est évidemment retenue par la cohésion du liquide pour le verre; le reste de la gouttelette est retenu par la cohésion du liquide pour lui-même.

De même une gouttelette de mercure qui, étant posée sur un plan de verre qu'elle ne mouille pas, y prend une forme sphérique, démontre la cohésion du liquide pour lui-même.

Enfin, l'entraînement de l'air et d'autres gaz, dans les trompes aspirantes, par un filet d'eau ou de mercure, met en évidence la cohésion de ces liquides pour les gaz.

Tous les faits de ce genre prouvent d'ailleurs que ces forces attractives ne s'exercent qu'*au contact*, ou plutôt à des distances tellement petites, qu'elles ne tombent pas sous les sens : dès que la distance devient sensible, tout effet de cohésion est annulé. Laplace a appelé *sphère d'activité moléculaire* une sphère comprenant toutes les molécules sur lesquelles une molécule centrale peut exercer une action sensible. Le rayon de cette sphère d'activité représente évidemment la distance maximum à laquelle la cohésion peut se faire sentir : il est variable avec la nature des substances et avec leur état physique.

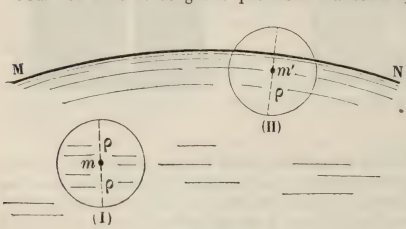


Fig. 358.

Or, soit un liquide quelconque en équilibre : considérons une molécule m située à une distance de la surface libre MN supérieure au rayon d'activité ρ, caractéristique de ce liquide (fig. 358, I). Cette molécule n'est soumise qu'aux attractions des molécules comprises dans la sphère d'activité dont elle est le centre : par suite toutes ces actions égales et symétriques se détruisent. Il ne

reste plus que les pressions hydrostatiques, dépendant de la profondeur du niveau. Il en sera de même pour toutes les molécules situées dans la position (I); il n'y a point pour elles d'action résultant de la cohésion. Mais pour toute molécule m', située dans la position (II), c'est-à-dire à une distance de la surface libre inférieure au rayon d'activité, cette symétrie n'existe plus, puisque la sphère d'activité est coupée par la surface libre, et qu'une portion plus ou moins considérable des molécules liquides est remplacée par des molécules gazeuses de moindre cohésion. Donc cette molécule, et toutes celles qui sont dans le même cas, sont nécessairement soumises à certaines actions, bien distinctes des pressions hydrostatiques, et dépendant uniquement des forces de cohésion. Il existe donc pour une *couche superficielle* (dont l'épaisseur est définie par le rayon d'activité moléculaire) un état dynamique spécial, d'où résulte évidemment la tension superficielle que l'expérience nous a révélée.

On démontre[1], en effet, en s'appuyant uniquement sur les hypothèses précédentes, les deux propositions suivantes :

1° A l'intérieur d'un liquide en équilibre, il existe, indépendamment de la pression hydrostatique, une autre pression, qu'on peut nommer *pression moléculaire*, qui est constante et normale à chaque élément, quelle qu'en soit l'orientation.

2° Dans la *couche superficielle* (d'épaisseur égale au rayon d'activité moléculaire), la pression moléculaire décroît progressivement, depuis sa valeur normale jusqu'à zéro; en outre, elle décroît plus rapidement dans le sens perpendiculaire à la surface que dans le sens parallèle.

Il résulte évidemment de cette dernière proposition que, tandis que les composantes de cette pression sont annulées *perpendiculairement à la surface*, elles existent encore, à partir d'un certain niveau, *tangentiellement à la surface libre. Ce sont ces composantes tangentielles de la cohésion qui produisent* les effets mécaniques que nous avons mis en évidence précédemment sous le nom de *tension superficielle*.

314. **Conséquences de la tension superficielle. — Pression capillaire. — Formule de Laplace.** — L'existence de cette force de traction, que nous appelons tension superficielle et qui s'exerce tangentiellement à la surface du liquide, peut donc être considérée comme démontrée, non seulement par l'expérience, mais aussi par le raisonnement. Nous allons en déduire certaines conséquences, qui nous permettront d'abord de mesurer expérimentalement la valeur de la tension superficielle et puis d'établir très simplement la théorie des phénomènes capillaires.

On démontre géométriquement que :

1° Lorsque la surface libre d'un liquide *est plane*, il ne résulte du fait de la tension superficielle aucune force ou pression verticale;

2° Lorsque la surface libre d'un liquide est *courbe* (convexe ou concave), il résulte de la tension superficielle qui s'y exerce en chaque point une force (ou pression verticale), qui *s'ajoute* ou *se retranche* à la pression hydrostatique, dans la couche superficielle, suivant que la surface est *convexe* ou *concave*.

Cette pression s'appelle quelquefois la *pression capillaire* au point considéré. Elle est exprimée par la formule

$$[1] \qquad N = \pm S\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

où S est la *constante de cohésion*, définie précédemment, et R et R' les rayons de courbure principaux de la surface liquide au point considéré.

1. Voir la *Physique* de Violle, t. Ier, ch. III.

La pression capillaire est positive ou négative, c'est-à-dire additive (fig. 359, I ou soustractive (II) par rapport à la pesanteur, suivant que la surface libre est convexe ou concave, c'est-à-dire suivant que le liquide ne mouille pas ou mouille les parois du vase qui le contient.

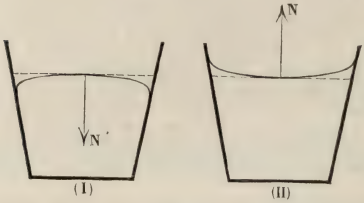


Fig. 359.

La formule [1] s'appelle *formule de Laplace*[1].

315. **Vérification de la formule de Laplace. — Expériences de Plateau.** — Avant de tirer de la formule de Laplace les conséquences que nous avons annoncées précédemment, nous allons la vérifier expérimentalement à l'aide d'expériences très curieuses, dues au physicien belge Plateau.

Imaginons en effet qu'on puisse réaliser un liquide *sans poids*, et qu'on en place une petite masse à l'abri de l'attraction moléculaire de toute paroi solide. La condition d'équilibre de cette masse liquide, c'est qu'elle prenne une surface telle, que la pression capillaire y soit partout normale et uniforme. Cette condition sera exprimée par la formule de Laplace, où l'on supposera N = constante. En divisant les deux membres par le coefficient S (qui est une constante pour un liquide déterminé), on aura l'équation

$$[2] \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{constante}.$$

Telle est l'équation générale des surfaces extérieures que peut prendre une masse liquide dénuée de poids, et soustraite à toute autre action moléculaire que sa propre cohésion. Or on sait, en géométrie, que toutes les surfaces *à courbure moyenne constante* satisfont à cette équation. Telles sont, par exemple, la *sphère*, le *plan*, la *surface latérale d'un cylindre circulaire droit*.

M. Plateau a pu réaliser ces différentes figures d'équilibre à l'aide de petites masses d'huile, mises en suspension dans une plus grande masse d'eau alcoolisée, *de même densité*. En vertu du principe d'Archimède la masse d'huile était ainsi absolument soustraite à l'action de la pesanteur. Les expériences se faisaient dans un appareil, devenu classique, qui consiste en un vase cubique, dont les parois sont des glaces à faces parallèles (fig. 360). On le remplit d'abord presque entièrement avec l'eau alcoolisée; puis on y introduit, à l'aide d'une petite seringue à bec effilé et recourbé, une petite quantité d'huile.

Première expérience. — On voit d'abord l'huile s'arrondir en une sphère parfaite (fig. 361, I). En augmentant peu à peu sa masse, on peut l'amener jusqu'à un diamètre de 10 centimètres. Cette forme sphérique est parfaitement stable : elle se reproduit spontanément dès qu'on l'a altérée.

Deuxième expérience. — Une fois qu'on a obtenu cette sphère liquide, on peut, en la soumettant à l'action de la force centrifuge, réaliser une autre expérience curieuse. Il suffit pour cela de la traverser, suivant son diamètre vertical, par une tige très fine, à laquelle on peut imprimer un mouvement de rotation sur elle-même, plus ou moins rapide.

1. C'est Laplace qui l'a établie le premier par une autre méthode. Le calcul de Laplace est plus compliqué que celui qui est fondé sur l'existence de la tension superficielle et il a le grand inconvénient de ne point définir l'état de la couche superficielle d'un liquide en équilibre.

Pour une vitesse ordinaire, la sphère s'aplatit aux pôles et prend la forme du sphéroïde terrestre (fig. 361, II). Pour une vitesse plus grande, une partie de

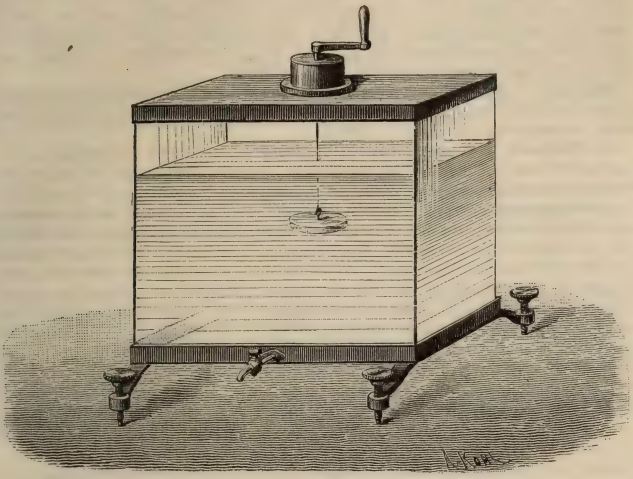


Fig. 360.

la masse d'huile se détache, dans le plan de l'équateur, et forme autour du noyau central, qui reste sphérique, un anneau concentrique, qui rappelle l'anneau de Saturne (fig. 361, III).

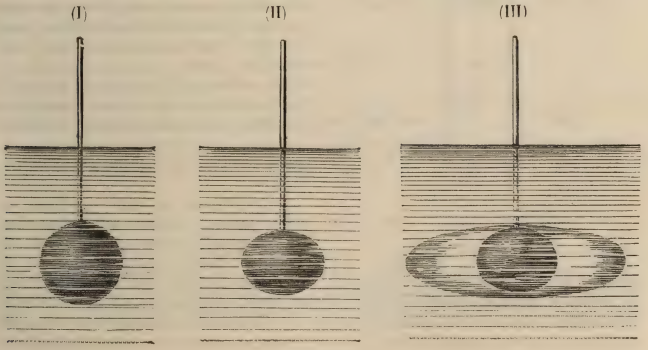


Fig. 361.

Troisième expérience. — Pour réaliser d'autres surfaces satisfaisant à l'équation [2], il est nécessaire d'assujettir la masse d'huile à passer par certaines

pièces solides fixes, qui servent en quelque sorte de carcasses ou de supports à la surface liquide. Ainsi, pour faire un cylindre droit à base circulaire, on prend deux petits disques en acier, de même diamètre, fixés en face l'un de l'autre, à une distance égale à deux ou trois fois ce diamètre, et l'on injecte entre eux une masse d'huile suffisante pour remplir l'espace intermédiaire. Après quelques tâtonnements, en ajoutant ou en retranchant du liquide, on arrive à réaliser un cylindre parfaitement stable [1].

Remarque. — Ces expériences vérifient indirectement l'existence de la tension superficielle des liquides, en démontrant directement la formule [2] et, par suite, la formule [1] qu'on en a déduite.

316. **Théorie des phénomènes capillaires.** — Toute la théorie de la capillarité peut se déduire de la notion de tension superficielle, et toutes ses lois sont contenues dans la formule de Laplace.

1° *Interprétation de la formule de Laplace.* — La valeur de la *pression capillaire* en un point d'un ménisque capillaire, concave ou convexe, est donnée par la formule de Laplace (314). Nous allons d'abord en préciser la signification. Du fait de la tension superficielle il résulte que la surface de séparation d'un liquide et d'un fluide, lorsqu'elle est courbe, semble agir comme une membrane élastique tendue : tout se passe *comme si elle comprimait le fluide qui est situé du côté de sa partie concave.* Par suite, lorsqu'on passe du côté convexe au côté concave d'un ménisque capillaire, on trouve un brusque accroissement de la pression hydrostatique en chaque point des milieux en contact. C'est cet accroissement de pression hydrostatique que nous avons désigné sous le nom de *pression capillaire*, et qui est exprimé par la formule de Laplace :

$$N = S\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

2° *Ascension des liquides dans les tubes capillaires.* — Le phénomène le plus simple et le plus net de la capillarité, c'est l'ascension des liquides dans les tubes capillaires. Il y a ascension toutes les fois que le liquide mouille parfaitement la substance du tube : c'est le cas de tubes en verre, bien nettoyés, plongés dans de l'eau pure. Nous avons vu que l'eau monte alors dans une véritable gaine d'eau, à laquelle le tube solide sert de support, et que la surface libre de la colonne ascendante liquide se termine par un ménisque concave. De la forme même de ce ménisque résulte l'explication de l'ascension.

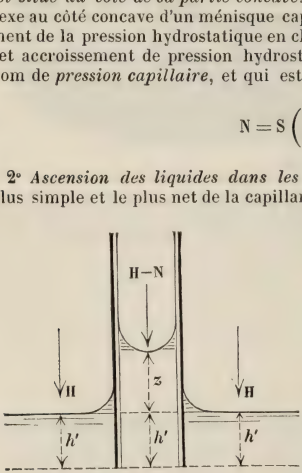


Fig. 362.

En effet, soit un tube capillaire en verre plongé verticalement dans une masse d'eau (fig. 362) et supposons l'équilibre établi, après l'ascension du liquide et la formation des ménisques à l'intérieur et à l'extérieur du tube : la pression hydrostatique doit être la même en tous les points d'une tranche horizontale, placée à une profondeur h', à l'extrémité inférieure du tube. Or,

1. Plateau a réalisé de cette manière plusieurs autres surfaces de révolution, qui satisfont à l'équation [2]. Elles se rattachent toutes à trois types, qu'il nomme, d'après la forme de leur courbe méridienne, l'*onduloïde*, la *caténoïde*, (dont la méridienne est une *chainette*) et la *nodoïde*.

en dehors du tube, elle est égale à la pression atmosphérique H, augmentée du poids $h'D$ d'une colonne de liquide, ayant pour section l'unité de surface et pour hauteur h' ; au dedans du tube, la pression se compose d'abord de la colonne $h'D$, *plus* de la pression atmosphérique H, diminuée de la pression capillaire N. Il y aurait donc d'une part la pression $h'D + H$, et d'autre part la pression $h'D + H - N$. L'équilibre ne pourrait donc subsister si le liquide ne montait dans le tube d'une hauteur telle, qu'au point considéré la diminution de pression N soit compensée par un accroissement de pression hydrostatique zD : de telle manière qu'on ait finalement l'équation d'équilibre

$$[1] \qquad h'D + H = h'D + H - N + zD.$$

3° *Lois de l'ascension capillaire dans les tubes.* — Il résulte de cette équation d'équilibre que la pression hydrostatique zD en un point du niveau de l'orifice inférieur du tube peut s'exprimer par la formule

$$zD = N,$$

N étant défini par la formule de Laplace, z étant la hauteur du liquide soulevé dans le tube au-dessus du point considéré, R et R′ étant les rayons de courbur au point où la verticale du point considéré perce la surface du ménisque. Évaluons la pression totale supportée par la tranche liquide, placée dans le tube capillaire, au niveau de l'orifice inférieur.

Sur un élément de surface ω, la pression est ωzD, et elle est exprimée par la formule

$$\omega zD = \omega N.$$

La pression totale est la somme de ces pressions élémentaires, et elle est donnée par la formule

$$[2] \qquad \sum \omega zD = \sum \omega N.$$

Calculons chacune de ces sommes. La première, $\sum \omega zD$, représente le poids total du liquide soulevé : en appelant Ω la section du tube, et h la *hauteur moyenne* du liquide soulevé (c'est-à-dire la hauteur du cylindre circulaire équivalent à la colonne soulevée), on a

$$\sum \omega zD = \Omega hD.$$

Évaluons la deuxième somme. N est la pression capillaire en un point du ménisque situé sur la même verticale que l'élément ω; on a donc (314)

$$N = S\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

En général, le terme $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ est variable avec le point considéré, tandis que le terme S, qui est la *constante de cohésion* ou *tension superficielle*, est un coefficient constant pour un même liquide. Mais si l'on se met dans le cas des tubes étroits et cylindriques, pour lequel les lois de l'ascension ont été vérifiées par l'expérience, le ménisque concave ne diffère pas sensiblement d'un hémisphère, et la courbure moyenne $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ est la même en tous les points. En appelant r le rayon de l'hémisphère, lequel est égal à celui du tube, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2}{r},$$

et l'on peut écrire

$$\sum \omega N = N \sum \omega = \frac{2S}{r} \Omega.$$

En remplaçant les valeurs des deux sommes dans l'équation [2], il vient

$$\Omega h D = \Omega \frac{2S}{r},$$

d'où

[3] $$rh = \frac{2S}{D}.$$

L'équation [3] contient toutes les lois vérifiées par Gay-Lussac. Le second membre, étant le quotient de deux constantes S et D, est une constante : l'équation exprime donc la *loi de Jurin*. Elle donne, en outre, la valeur de la constante : elle est égale à $\frac{2S}{D}$.

La hauteur moyenne varie donc avec la nature du liquide pour deux raisons : 1° par suite de la variation de la densité D ; 2° par suite de la variation de la tension superficielle S. Celle-ci, variant pour un même liquide avec la température (expériences de Wolf), il en sera de même de la hauteur moyenne. Enfin, la hauteur moyenne est indépendante de la substance des tubes, laquelle n'intervient pas dans la formule.

4° *Ascension des liquides entre deux lames parallèles.* — Soit r la distance des deux lames, D la densité du liquide, z la hauteur d'un point du ménisque au-dessus du niveau général, N la valeur de la pression capillaire en ce point [1]. Par le même raisonnement que dans le cas précédent, nous arriverons à la même équation d'équilibre

$$\sum \omega z D = \sum \omega N.$$

En appelant Ω la surface de la section rectangulaire du volume liquide soulevé et h la hauteur moyenne, c'est-à-dire la hauteur du parallélépipède liquide équivalent à la colonne soulevée, on aura

$$\sum \omega z D = \Omega h D.$$

La pression capillaire N au point considéré est donnée ici par la formule

$$N = 2S \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

car il y a ici deux tensions superficielles qui proviennent des deux lames et dont les effets s'ajoutent pour produire la pression capillaire en chaque point du ménisque.

Les deux lames étant assez rapprochées pour que le ménisque concave puisse être confondu avec la demi-surface latérale d'un cylindre de révolution, la courbure moyenne $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ est constante, et se réduit à $\frac{1}{r}$, puisque l'un des rayons de courbure est infini, tandis que l'autre est égal au rayon de la section même du cylindre, c'est-à-dire à la distance r des deux lames. On a donc

$$\sum \omega N = N \sum \omega = \frac{2S}{r} \cdot \Omega,$$

1. On peut se reporter à la figure 362, à la condition de la considérer, non plus comme la section d'un tube et d'un ménisque hémisphérique, mais comme la section de deux lames parallèles et d'un ménisque hémicylindrique.

et l'équation d'équilibre devient

$$\Omega h D = \Omega \frac{2S}{r},$$

d'où la formule

$$hr = \frac{2S}{S}.$$

Cette formule exprime la loi énoncée et vérifiée ci-dessus : *La hauteur moyenne soulevée varie en raison inverse de la distance des lames, et elle est égale à la hauteur qui serait soulevée dans un tube ayant pour rayon la distance des lames.*

5° *Ascension des liquides entre deux lames inclinées.* — Le cas de deux lames inclinées est une conséquence directe du cas des lames parallèles, à la condition que l'inclinaison soit très faible, car alors deux éléments m et m' des lames (fig. 363), placés en regard l'un de l'autre, sur une même perpendiculaire au plan bissecteur, peuvent être considérés comme parallèles (II).

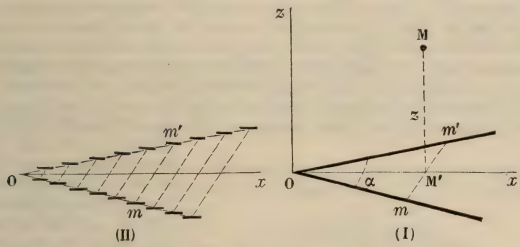


Fig. 363.

Cherchons à déterminer un point M du ménisque, situé dans le plan bissecteur zOx, et prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires Ox, Oz situées dans ce plan. L'ordonnée z est fournie par la loi des lames parallèles, en considérant z comme la hauteur correspondante aux deux éléments parallèles m et m'. Soit e la distance de ces deux éléments, on a

$$[1] \qquad ez = \frac{2S}{D}.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle rectangle $OM'm'$, entre l'abscisse x, la distance e et l'inclinaison α, la relation

$$[2] \qquad \frac{e}{2} = x \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{e}{2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}.$$

En multipliant membre à membre les équations [1] et [2], il vient

$$zx = \frac{S}{D \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}.$$

Le point M appartient donc à une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes les droites Ox et Oz : or la courbe des points M est précisément l'inter-

section du ménisque concave par le plan bissecteur et elle caractérise la forme de ce ménisque (fig. 349).

II. — PHÉNOMÈNES PRODUITS AU CONTACT DES CORPS SOLIDES PAR LES LIQUIDES QUI NE LES MOUILLENT PAS.

317. Contact des liquides et des solides. — Angle de raccordement. — La simplicité et la netteté des phénomènes précédents tenaient à ce que le liquide était constamment en contact avec une mince couche du même liquide, à laquelle le tube solide ne faisait que servir de support. En un mot, il n'y avait pas, à proprement parler, contact entre un liquide et un solide, mais contact d'un liquide avec lui-même.

Les phénomènes capillaires se compliquent et deviennent moins nets dans le cas où le liquide ne mouille pas la substance du tube capillaire. Si, par exemple, sur une surface plane et horizontale bien propre, on verse quelques gouttes d'un liquide qui ne la mouille pas, ce liquide (fig. 364) forme généralement une sorte de masse plus ou moins arrondie, se raccordant avec la surface solide par un angle déterminé $CAS_1 = \omega$, qu'on appelle *angle de raccordement*. Cet élément, dont nous n'avions pas eu à nous occuper jusqu'ici, joue un rôle capital dans les phénomènes capillaires qu'il nous reste à étudier.

Calcul de ω. — On peut calculer cet angle en fonction des forces de cohésion qui s'exercent soit entre les molécules liquides, soit entre les molécules liquides et les molécules solides en contact. Soit une section ABC de la goutte liquide par un plan vertical qui passe par son axe (fig. 364) et par un élément du contour limitant la goutte. Considérons les forces qui agissent en A sur cet élément. Il y a d'abord la tension superficielle S_1 du liquide, qui agit tangentiellement à l'élément; il y a ensuite l'attraction exercée par le solide sur le liquide : on peut la représenter par une force S_2, analogue à une tension superficielle, et s'exerçant sur l'unité de longueur. Il y a encore une autre force attractive de cohésion, qui s'exerce au contact entre les molécules liquides du milieu (1) et les molécules solides du milieu (2); on peut la représenter, par analogie avec ce qui se produit dans la surface libre d'un liquide, par une certaine tension superficielle S_{1-2}[1]. Enfin, il faut évidemment joindre à ces forces une autre force attractive, émanant du solide et normale à la paroi, car sans cela la composante normale de la tension S_1 ne pourrait pas être contrebalancée.

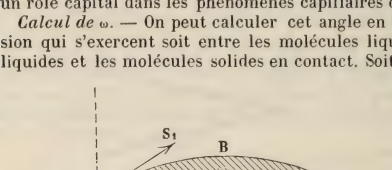


Fig. 364.

Pour exprimer qu'il y a équilibre, il faut écrire que la somme des projections des forces sur deux axes rectangulaires passant au point A est nulle. Prenons pour axes la paroi AC et la normale en A. On a successivement

$$[1] \qquad S_1 \cos\omega + S_{1-2} - S_2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \cos\omega = \frac{S_2 - S_{1-2}}{S_1}, \qquad [1\ bis]$$

$$[2] \qquad S_1 \sin\omega - f = 0.$$

1. Cette tension S_{1-2} est nulle lorsqu'il se forme une couche de liquide adhérente à la paroi solide, comme dans le cas des liquides qui mouillent parfaitement (M. Terquem, *Capillarité, Encyclopédie chimique*).

De cette dernière équation, combinée avec la précédente, on peut tirer la valeur de cette force auxiliaire f. On a, toutes réductions faites,

$$f = S_1 \sqrt{1 - \left(\frac{S_1 - S_{1-2}}{S_1}\right)^2}.$$

Mais ne nous occupons que de l'angle de raccordement. Il est donné par son cosinus; par conséquent cette valeur n'est pas admissible dans tous les cas. Il faut que l'on ait

$$\frac{S_2 - S_{1-2}}{S_1} < 1 \quad \text{ou} \quad S_2 < S_1 + S_{1-2}.$$

Et si l'on a

$$S_2 = S_1 + S_{1-2},$$

le cosinus de ω est égal à 1, et par suite ω estégal à zéro. L'angle de raccordement étant nul, le liquide se répand à la surface du corps. Ceci a lieu *à fortiori* si l'on a $S_2 > S_1 + S_{1-2}$, car alors le liquide forme, à la surface du corps solide, une couche très mince et adhérente à celui-ci.

318. **Étude expérimentale de l'angle de raccordement.** — Théoriquement, *l'angle de raccordement est constant pour le même corps solide et le même corps liquide*. Cela résulte de la formule [1 *bis*]. Une ancienne expérience de Gay-Lussac semble vérifier cette constance dans le cas du mercure et du verre.

Expérience de Gay-Lussac. — Gay-Lussac avait pensé démontrer que le mercure se raccorde au verre sous un angle constant, voisin de 45°. Il introduisait une quantité croissante de mercure dans un tube capillaire à deux branches (fig. 365), dont l'une était soudée à un large tube cylindrique A et l'autre à une boule creuse B, parfaitement sphérique. A mesure que le niveau du mercure s'élève dans la boule B, sa surface libre prend, au contact du verre, une série de formes variables qu'on ne peut s'expliquer qu'en admettant un angle de raccordement *constant et voisin de* 45°. En effet, quand le niveau en A arrive en 1′, on a en B un bouton fortement convexe (1) avec une forte dépression, mesurée par la distance verticale (1′ — 1); puis, sur le parallèle de 45° dans l'hémisphère inférieur, le ménisque (2) quittera verticalement de paroi, et la dépression (2′ — 2) sera moins forte; à l'équateur, en 3, le ménisque se raccordera exactement à 45° avec l'élément correspondant de la paroi, qui est vertical, et la dépression (3′ — 3) aura encore diminué; sur le parallèle de 45°, dans l'hémisphère supérieur, la surface libre du mercure en B sera exactement plane et horizontale, de manière à faire toujours le même angle de 45° avec la paroi, et la dépression correspondante (4′ — 4) *sera nulle;* à par-

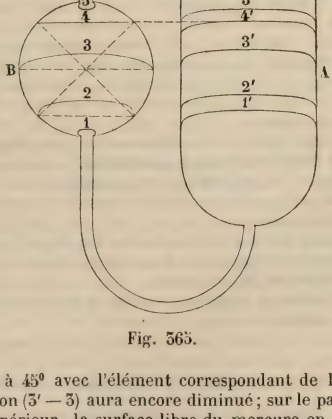


Fig. 365.

tir de ce moment, la surface libre du mercure se creusera, en même temps qu'elle s'élève, et elle finira par former au sommet de la boule un bouton (5) analogue au bouton (1), mais *concave* au lieu d'être *convexe :* pendant cette dernière période, la dépression, qui était nulle en (4'), est devenue négative; le niveau mercuriel dans la branche A est au-dessus du niveau dans la boule B.

Expériences de M. Quincke. — Des expériences plus précises n'ont pas confirmé ce résultat de Gay-Lussac. M. Quincke a mesuré par un procédé optique l'angle de raccordement de diverses gouttes de mercure posées sur un même plan de verre. Il mesurait en outre trois éléments géométriques, qui en définissaient la forme : l'ordonnée maximum a, l'ordonnée du point extrême de contact b, enfin l'ordonnée du bord de la goutte c (fig. 366). Il a constaté les faits suivants :

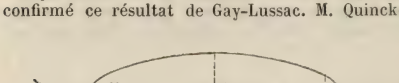


Fig. 366.

1° Il se produit un changement continu dans la forme des gouttes, très rapide d'abord pendant les premières minutes qui suivent le dépôt sur le verre, puis se ralentissant de plus en plus, sans cesser d'ailleurs au bout de plusieurs heures et même de plusieurs jours.

2° Il y a de même une variation continue dans la grandeur de l'angle aigu ω' de raccordement.

Conclusions. — Il résulte de ces deux faits que l'équilibre capillaire n'est jamais *complet* ni *stable*, pour une goutte de mercure posée sur un plan de verre. De nombreuses observations [1] ont démontré qu'il en est de même pour des colonnes de mercure, ascendantes ou descendantes, dans des tubes en verre, bien qu'ici le frottement puisse y établir un équilibre apparent, lequel n'est que momentané.

L'angle de raccordement *n'est donc pas constant* entre un même liquide et un même solide. Pour le verre et le mercure, en particulier, on a trouvé qu'il peut varier, *sans raison apparente*, entre 38° et 45°. La variation est, *à fortiori* plus grande et plus brusque lorsqu'il y a une cause apparente, telle que l'ébranlement de la lame ou du tube solide, ou bien l'interposition de la moindre couche de substance étrangère sur le liquide et le solide en contact.

319. **Lois de la dépression des liquides dans les tubes capillaires, et entre les lames parallèles.** — La théorie de la capillarité conduit, dans le cas où les liquides ne mouillant pas les solides subissent une dépression, aux mêmes lois que dans le cas de l'ascension. Nous n'énoncerons que les deux principales.

Loi de Jurin. — *Pour un même liquide et à une même température, les dépressions moyennes dans divers tubes capillaires sont en raison inverse des diamètres de ces tubes.*

Cette loi s'exprime, comme la loi analogue des liquides qui mouillent, par la formule

$$rh = \text{constante}.$$

Cette constante est déterminée par la théorie. Elle est égale à $\frac{2S_1 \cos \omega'}{D}$, S_1 étant la *tension superficielle* propre du liquide, D la densité et ω' l'angle

1. Observations de Bravais et Expériences de M. Quincke.

aigu de raccordement (fig. 366). La formule complète est donc

$$rh = \frac{2S_1 \cos \omega'}{D}.$$

On voit, d'après la formule même, que la dépression moyenne h est fonction de l'angle de raccordement.

Loi des lames parallèles. — *Pour un même liquide et à une même température, la dépression moyenne, entre deux lames parallèles, est moitié de la dépression qui se produirait dans un tube capillaire de diamètre égal à la distance des lames.*

320. **Vérification des lois de la dépression capillaire.** — La vérification de ces lois a été faite, ou du moins tentée, pour le mercure et le verre. Elle présente de nombreuses difficultés, les unes expérimentales qu'on a pu surmonter, et les autres théoriques qui sont insurmontables.

1° La première est l'*opacité* du mercure, qui empêche l'observation directe des colonnes déprimées. On la tourne aisément, soit par le *procédé de Gay-Lussac*, qui consistait à amener le tube capillaire contre la paroi même du vase en verre contenant la masse de mercure ; soit par le *procédé de Regnault*, qui consistait à employer un tube à siphon, dont l'une des branches était assez large pour qu'il n'y eût pas de dépression (fig. 367) : celle-ci était alors mesurée par la distance verticale h des niveaux dans les deux branches.

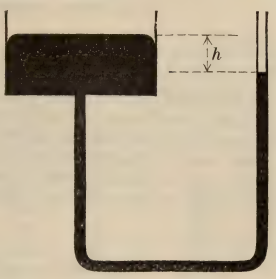


Fig. 367.

2° De plus, il est difficile d'obtenir du mercure *parfaitement pur*, en contact avec du verre *parfaitement propre*.

3° Le frottement du mercure contre la paroi intervient pour modifier la tension superficielle du mercure et il la modifie différemment, suivant que la colonne est ascendante ou descendante.

4° Enfin la difficulté théorique, qu'il est presque impossible de surmonter, c'est l'instabilité de l'équilibre et la variabilité constante de l'angle capillaire (ou *de raccordement*), mise en évidence par les expériences de M. Quincke.

Malgré cela, on peut considérer ces lois comme étant vérifiées, d'une manière suffisamment approchée, par les expériences de nombreux expérimentateurs (Gay-Lussac, Edouard Desains, Bède, Danger, M. Quincke).

321. **Conséquences relatives à la correction barométrique. — Construction des Tables de correction.** — Si la loi de Jurin était rigoureusement exacte, l'erreur due à la capillarité, dans les tubes barométriques, serait facile à corriger, puisqu'elle serait exactement en raison inverse des diamètres. Il suffirait de faire une seule observation, sur un verre donné, pour calculer la table de correction correspondante à toute espèce de tubes du même verre. Mais, à cause de la variabilité de l'*angle de raccordement*, il est indispensable de faire intervenir la valeur de cet angle dans les tables de correction. Aussi toutes ces tables de correction, depuis les plus anciennes, dues à Bouvard, jusqu'aux plus récentes, dues à Mlle Gutkowska, donnent-elles, pour un même diamètre de tube, les dépressions correspondant à différentes valeurs possibles de l'angle capillaire ω'.

Usage de la flèche du ménisque. — Au lieu de mesurer l'angle capillaire ω', il est plus commode de mesurer la *flèche* f du ménisque. On appelle ainsi la

distance du point le plus élevé du ménisque au-dessus du plan de la ligne de raccordement. Dans le cas où le ménisque est exactement circulaire, ces deux éléments sont reliés l'un à l'autre par une formule très simple. En effet, soit une section du ménisque et du tube par un plan passant par l'axe (fig. 368); soit r le rayon du tube, qui est en même temps le rayon du petit cercle de la sphère dont le ménisque fait partie et soit R le rayon de cette sphère. On a évidemment

Fig. 368.

$$f = \mathrm{OP} - \mathrm{OP}'$$

avec

$$\mathrm{OP} = \mathrm{R}, \qquad \mathrm{OP}' = r \sin \omega' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R} = r' \cos \omega'.$$

En substituant ces valeurs, il vient

$$f = r \,.\, \frac{1 - \sin \,.\, \omega'}{\cos \,.\, \omega'}.$$

Construction des tables. — Si l'on admet que le ménisque soit circulaire, la dépression moyenne h est liée à la flèche et à la tension superficielle S_1 par l'équation

$$h = \frac{4S_1 f}{D(r + f^2)}.$$

On peut donc, en admettant une valeur constante de S_1, construire une table indiquant pour chaque valeur du rayon r les dépressions correspondantes aux diverses valeurs possibles de la flèche f.

Cette table conviendra en général pour un baromètre quelconque, parce que, s'il est vrai que l'angle ω' varie beaucoup d'un mercure à l'autre (de 38° à 46°), en revanche la tension S_1 varie très peu (à peine de $\frac{1}{20}$ de sa valeur).

III — PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES DIVERS. — APPLICATIONS.

322. **Longueur de la colonne liquide suspendue dans un tube ouvert.** — Lorsqu'on plonge un tube capillaire dans un liquide qui le mouille (fig. 369, I), celui-ci s'élève jusqu'à une hauteur h déterminée par la loi de Jurin, et il se termine par un ménisque concave. Cette hauteur h est telle, qu'elle fait équilibre à la composante normale N de la tension superficielle, déterminée par la courbure du ménisque.

Si l'on retire avec précaution le tube du liquide, non seulement on emporte avec lui la colonne liquide soulevée, mais celle-ci est *plus grande* que dans le cas précédent : elle peut être *double*, c'est-à-dire égale à $2h$, si l'orifice inférieur du tube est taillé en biseau.

En même temps, la colonne liquide se termine inférieurement par un ménisque *convexe*, de même courbure que le ménisque supérieur (fig. 369, II). Ce dernier fait explique le précédent. En effet, le ménisque inférieur, étant identique au ménisque supérieur, développe comme lui une composante normale, dirigée de haut en bas, et également capable de faire équilibre à une colonne h. La colonne suspendue doit donc avoir une hauteur totale $2h$.

Enfin, si l'orifice inférieur est terminé par des bords plans (fig. 369, III), le ménisque inférieur qui s'y forme correspond au *diamètre extérieur* du tube et non plus au *diamètre intérieur*, comme dans le cas du biseau. Ce ménisque extérieur est moins courbe que le précédent, et développe une composante normale $N' < N$: par suite, la colonne h' qu'il peut soutenir est plus petite que h. La

hauteur totale suspendue est donc plus faible que dans le cas précédent; elle n'est plus que $h + h'$ ($< 2h$).

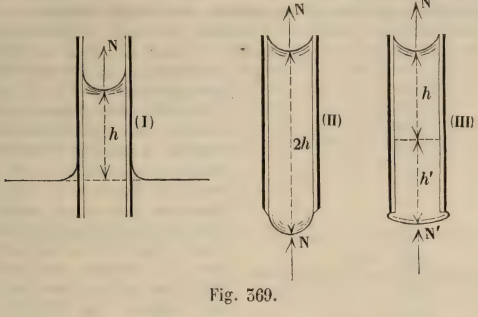


Fig. 369.

323. Formation des gouttes à un orifice capillaire. — Loi de Tate. — Théorie du compte-gouttes. — Nous avons dit que l'effet du ménisque inférieur, joint à celui du ménisque supérieur, suffit pour soutenir la colonne $h + h'$. Si le ménisque inférieur était seul, il pourrait équilibrer une pression h'. C'est ce qui explique pourquoi, lorsqu'un liquide est contenu dans un vase terminé par un orifice étroit à sa partie inférieure, tel qu'un compte-gouttes (fig. 370, I), il faut un certain excès de pression pour faire écouler le liquide par cet orifice. Si cette pression est limitée, comme dans l'expérience précédente, le ménisque inférieur garde une forme invariable et la goutte s'arrête dans son développement. Si, au contraire, la pression intérieure est croissante, elle finit par triompher de la résistance du ménisque, la goutte se gonfle progressivement, comme dans un petit sac élastique dont la tension diminue à mesure qu'il grossit; puis, lorsque la goutte est devenue assez volumineuse pour que son poids dépasse la composante normale de la tension superficielle, elle s'étrangle à la partie supérieure (fig. 370, II) et finit par se détacher, en se rompant suivant une circonférence $o'o'$ qui est à peu près égale à celle de l'orifice oo.

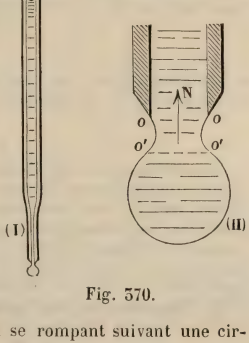


Fig. 370.

Loi de Tate. — *Les gouttes qui se forment ainsi à l'orifice de divers tubes capillaires ont, pour un même liquide, des poids proportionnels aux diamètres de ces tubes.*

On a également démontré par l'expérience que :

1° Les poids des gouttes sont indépendants de la substance solide qui forme l'orifice (quand elle est parfaitement mouillée par le liquide).

2° Ces poids diminuent quand la température s'élève.

Ces lois prouvent que ce phénomène est une conséquence directe de la tension superficielle qui s'exerce tout le long du cercle de gorge $o'o'$, dont le diamètre peut être considéré comme proportionnel à celui de l'orifice.

Elles constituent la théorie du *compte-gouttes*, petit instrument en verre (fig. 370, I) qu'on emploie, en thérapeutique, pour obtenir une masse déter-

minée d'une liqueur pharmaceutique d'après le nombre de gouttes versées. On voit combien il importe d'employer, en pharmacie, des instruments ayant exactement le même diamètre à l'orifice.

324. **Exception aux lois de l'équilibre des corps flottants.** — Plusieurs exceptions curieuses au principe de l'équilibre des corps flottants s'expliquent par des effets de la tension superficielle et rentrent dans la catégorie des phénomènes capillaires. Tels sont les faits suivants.

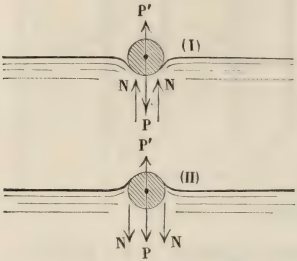


Fig. 371.

Aiguilles métalliques flottant sur l'eau. — Une aiguille d'acier, préalablement recouverte d'une très mince couche graisseuse et posée avec précaution à la surface de l'eau *ne s'y enfonce pas*, bien que sa densité soit environ 7 fois 1/2 plus forte que celle du liquide (fig. 371, I). En même temps l'eau se déprime fortement autour d'elle. Mais si le liquide vient à mouiller l'aiguille (fig. 371, II), elle est immédiatement entraînée au fond du vase.

Ces phénomènes s'expliquent aisément par l'effet des composantes normales de la tension superficielle, qui s'exercent en N, N, de bas en haut. Dans le premier cas, ces composantes s'ajoutent à la poussée P' du liquide pour faire équilibre au poids P de l'aiguille, de manière qu'on ait

$$P = N + P'.$$

Dans le deuxième cas, les composantes N s'ajoutent au poids P, de manière que la poussée P' est impuissante à équilibrer ces deux forces. On a

$$P + N > P'.$$

Insectes marchant sur l'eau. — L'expérience précédente explique la curieuse faculté que possèdent certains insectes[1] de marcher sur l'eau, sans s'y enfoncer, malgré leur plus grande densité. Ils sont dans le même cas que l'aiguille d'acier graissée, parce que leurs pattes sont naturellement enduites d'une sécrétion huileuse. Il suffit en effet de dissoudre cette couche grasse, en lavant ces pattes à l'éther, pour enlever à ces animaux leur faculté de marcher sur l'eau.

325. **Mouvements des gouttes dans les tubes capillaires coniques.** — Il y a deux cas à considérer, suivant que le liquide mouille ou ne mouille pas la substance du tube.

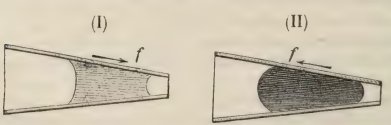


Fig. 372.

1° On introduit une goutte d'eau dans un tube capillaire en verre, de forme conique et disposé horizontalement (fig. 372, I). La goutte s'étale en formant à ses deux extrémités deux ménisques concaves, inégalement courbes; la plus grande courbure est tournée vers le bout étroit du tube et la plus petite courbure

1. On peut citer les insectes à longues pattes appelés *tisserands*.

vers le bout large; de plus, au lieu de *se fixer* dans la position où on l'a mise, *elle se meut spontanément vers le bout étroit* du tube.

2° On introduit une goutte de mercure bien propre dans le même tube ou dans un tube analogue (fig. 372, II). On voit se produire le phénomène *inverse*. La goutte se termine par deux ménisques convexes, et *s'avance vers le bout large* du tube.

Ces deux faits sont des effets très simples de la tension superficielle. Dans le premier cas, chaque point du ménisque A, le centre en particulier, est sollicité par la pression atmosphérique H, diminuée de la composante normale N de la tension. En supposant que le ménisque est hémisphérique, et en appelant R le rayon du tube en ce point, on a

$$N = S\left(\frac{2}{R}\right) = \frac{2S}{R}.$$

La force qui presse le ménisque en A est donc (par unité de surface)

$$H - \frac{2S}{R}.$$

De même, la force qui pousse le ménisque en B est (par unité de surface)

$$H - \frac{2S}{r}.$$

La résultante de ces deux forces est égale à f :

$$f = 2S\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

On voit qu'elle est *positive*, puisque r est $< R$: par conséquent, la goutte sera poussée vers la partie étroite du tube.

Dans le deuxième cas, les deux pressions sont en A..... $H + \frac{2S}{R}$,

en B..... $H + \frac{2S}{r}$.

Leur différence est $2S\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$: elle est *négative*. Donc la pression s'exerce de B vers A : la goutte sera poussée vers la partie large.

326. **Mouvements de deux plans parallèles plongeant dans un liquide.** — Il y a encore deux cas à considérer, suivant que les plans solides sont tous les deux mouillés ou non par le liquide, ou que l'un des deux est mouillé et l'autre pas.

1° On plonge deux plans de verre dans de l'eau, en les plaçant parallèlement l'un à l'autre, à une très petite distance, et en les soutenant à l'aide de longs fils très flexibles. On voit alors les deux plans se rapprocher l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils arrivent au contact.

Si l'on plonge, de la même manière, deux lames de verre bien propres dans un bain de mercure, il y a encore rapprochement, jusqu'au contact.

2° Si l'on plonge dans l'eau deux lames en verre, dont l'une étant bien propre est parfaitement mouillée, et l'autre étant enduite d'une mince couche graisseuse n'est pas mouillée, on observe une répulsion entre ces lames.

On doit remarquer en outre dans la figure 373 (qui représente en coupe un schéma des trois expériences) que : 1° dans le cas de l'ascension, le liquide s'élève *moins* à l'extérieur qu'à l'intérieur de la lame; 2° dans le cas de la

dépression, le liquide s'abaisse *moins* à l'extérieur qu'à l'intérieur; 3° dans le cas de la répulsion des lames, les deux effets précédents se contrarient et produisent un effet résultant inverse : sur la lame mouillée, le liquide monte *moins* à l'intérieur qu'à l'extérieur; et sur la lame non mouillée, le liquide s'abaisse *plus* à l'extérieur qu'à l'intérieur. De cette disposition du liquide sur les lames résulte une explication très simple de leurs mouvements.

Il suffit, en effet, de considérer les pressions qui s'exercent, dans chacun des cas, sur les deux faces de chaque lame, soit dans la région qui est en contact avec le liquide par ses deux faces, soit dans la région qui est en contact par une seule face.

Cas de l'ascension. — Dans la région mouillée de part et d'autre, la pression est la même sur les deux faces de chaque lame (fig. 373, I) : elle est $H - p$, H étant la pression atmosphérique, et p la diminution de pression (pression ca-

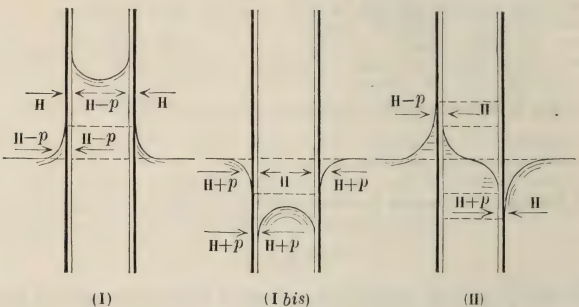


Fig. 373.

pillaire) qui résulte du ménisque concave. Dans la région uniquement mouillée à l'intérieur, la pression est différente sur les deux faces de chaque lame : elle est H à l'extérieur, et $H - p$ à l'intérieur. Chaque lame est donc poussée vers l'autre par une force égale à p : il doit y avoir rapprochement.

Cas de la dépression. — Dans la région qui est en contact avec le mercure de part et d'autre (fig. 373, I *bis*), la pression est la même sur les deux faces de chaque lame : elle est $H + p$, H étant la pression atmosphérique et p l'accroissement de pression (pression capillaire) qui résulte du ménisque convexe. Il y a donc équilibre entre ces deux systèmes de pression. Mais dans la région où le mercure ne touche aux lames que par une seule face, la pression est différente sur les deux faces de chaque lame : elle est $H + p$ sur la face externe et H sur la face interne. Chaque lame est donc poussée vers l'autre par la différence p de ces deux forces : il doit y avoir rapprochement.

Cas mixte. — Sur la lame mouillée, dans la région où le liquide touche aux deux faces, il n'y a pas de différence de pression (fig. 373, II) ; mais dans l'autre région la pression est $H - p$ sur la face externe, tandis qu'elle est H sur la face interne : il y a donc une différence de pression p, dirigée de l'intérieur à l'extérieur. C'est le contraire qui a lieu sur la lame non mouillée : dans la région où le liquide touche d'un seul côté, la pression extérieure est H, tandis que la pression intérieure est $H + p$; la différence est donc p, et elle est encore dirigée de l'intérieur vers l'extérieur. Il y a donc *répulsion*.

327. **Attractions et répulsions des corps flottants.** — La même explica-

tion s'applique aux mouvements d'attraction ou de répulsion qu'on observe entre certains corps légers qui flottent à la surface de liquides qui les mouillent ou ne les mouillent pas.

Deux balles de liège flottant sur l'eau s'attirent brusquement dès qu'elles arrivent dans le voisinage l'une de l'autre. On remarque en outre que le liquide les mouille et monte plus haut entre elles qu'à l'extérieur (fig. 374, I). De là l'explication de l'attraction, comme dans l'expérience précédente.

Deux balles de liège, passées au noir de fumée ou bien graissées, flottant sur l'eau (fig. 374, I *bis*), s'attirent de même lorsqu'elles sont suffisamment rapprochées. On remarque en outre que le liquide ne mouille pas les balles et qu'il

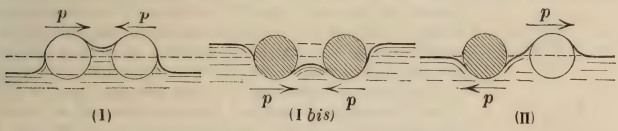


Fig. 374.

s'abaisse plus entre les deux corps qu'à l'extérieur. De là l'explication de l'attraction.

Enfin, deux balles de liège, l'une noircie et l'autre non noircie, flottant sur l'eau, *se repoussent* brusquement (fig. 374, II) dès qu'elles arrivent dans le voisinage l'une de l'autre; et l'on remarque que le liquide s'abaisse le long de la première balle *plus à l'extérieur qu'à l'intérieur*, et qu'il s'élève de même le long de la deuxième balle, *plus à l'extérieur qu'à l'intérieur*.

Remarque. — On explique de la même manière les attractions ou les répulsions exercées sur les corps flottants, soit par les bords des vases, soit par d'autres objets immergés dans le liquide, suivant que celui-ci mouille ou ne mouille pas les deux corps en présence, ou bien qu'il mouille l'un et ne mouille pas l'autre.

328. **Expérience de M. Lippmann. — Phénomènes électrocapillaires.** — Parmi les mouvements dus aux effets de la tension superficielle, on peut citer une très curieuse expérience de M. Lippmann. On dépose sur une soucoupe une large goutte de mercure et, par-dessus, on verse une couche d'eau, acidulée et additionnée de bichromate de potasse; enfin, sur le bord de la soucoupe on fixe un fil de fer, qui pénètre dans l'eau acidulée et vient toucher la surface extérieure du mercure. Dès qu'il y a contact, la goutte se contracte et abandonne le fer, puis elle reprend sa forme initiale, touche de nouveau le fer, et se contracte de nouveau : le même mouvement alternatif se continue indéfiniment.

Ici le phénomène capillaire proprement dit se complique d'un phénomène chimique et d'un phénomène électrique. Il faut faire intervenir ces trois effets pour expliquer le mouvement. Au contact de l'eau acidulée, le mercure s'oxyde, sa tension superficielle diminue et la goutte s'aplatit : c'est alors qu'elle touche le fil de fer. Il se forme alors entre le mercure, l'eau acidulée et le fer un *couple voltaïque*, dont le courant réduit l'oxyde de mercure, et rend à la surface sa netteté primitive ainsi que sa tension superficielle normale, et la goutte s'arrondit de nouveau en se contractant; puis l'oxyde se reforme, la tension superficielle diminue, la goutte s'aplatit de nouveau, et ainsi de suite.

Ce phénomène capillaire, dans lequel intervient l'électricité, est le type d'une catégorie de phénomènes extrêmement curieux, connus sous le nom de *phénomènes électrocapillaires*. M. Lippmann est parvenu à débrouiller l'obscure complexité de ces phénomènes, et à découvrir la loi qui lie l'état électrique (ou

Potentiel) d'une surface à la valeur de sa tension superficielle. Il a appliqué cette loi à la construction de son *électromètre capillaire*, l'un des instruments les plus ingénieux et le plus précis de la physique contemporaine[1].

329. **Application de la capillarité aux aréomètres.** — Nous avons dit, dès le début de ce chapitre, que les tiges pleines, de diamètre capillaire, étaient soumises, tout comme les tubes creux, aux attractions et aux répulsions capillaires. Tous les aréomètres sont munis de tiges capillaires et sont plongés dans des liquides qui les mouillent. Il doit en résulter nécessairement des attractions qui faussent l'équilibre, tel que nous l'avions établi précédemment en ne tenant compte que des pressions ou des poussées hydrostatiques.

1° *Erreurs dues à la capillarité.* — Un aréomètre étant plongé dans un liquide qui le mouille (fig. 375), celui-ci s'élève en ménisque concave tout autour de sa tige, et exerce sur toute la circonférence de raccordement un effet de traction, dû à la tension superficielle. Cette traction s'ajoute donc au poids de l'instrument, pour l'enfoncer un peu plus que ne l'indique l'équation d'équilibre hydrostatique. On a calculé, par exemple[2], que, pour un densimètre pesant $27^g,220$, et plongé dans de l'eau ordinaire, l'accroissement de poids, dû à la tension superficielle, est égale à $23^{cg},5$ (environ $\frac{1}{100}$ du poids total), et qu'il en résulte un excès d'immersion de $0^{cm},3$: par suite, si la tension superficielle du liquide disparaissait, l'instrument remonterait de 3 millimètres.

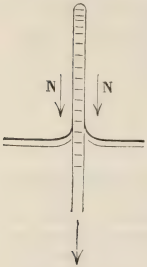


Fig. 375.

Dans un autre liquide, où la tension superficielle serait, de 1/3 seulement, inférieure à celle de l'eau, le même aréomètre se relèverait de 1 millimètre[3].

2° *Correction de l'erreur capillaire.* — Soit r le rayon de la tige capillaire au niveau de la ligne de flottaison, et soit N la valeur de la composante verticale de la tension superficielle du liquide. La pression qui s'exerce sur toute la circonférence de flottaison a pour valeur $2\pi r\mathrm{N}$. L'équation d'équilibre doit donc s'écrire de la manière suivante (P, poids de l'instrument ; v, volume immergé ; D, densité du liquide) :

$$v\mathrm{D} = \mathrm{P} + 2\pi r\mathrm{N}. \tag{1}$$

Si l'on plonge le même instrument dans un autre liquide, de densité D′ et de tension superficielle différente, le volume immergé deviendra v', et l'équation d'équilibre sera

$$v'\mathrm{D}' = \mathrm{P} + 2\pi r\mathrm{N}'. \tag{2}$$

En divisant ces deux équations membre à membre, et en isolant le rapport $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'}$, il vient

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'} = \frac{v'}{v} \cdot \frac{\mathrm{P} + 2\pi r\mathrm{N}}{\mathrm{P} + 2\pi r\mathrm{N}'}. \tag{3}$$

On voit que le rapport des densités des deux liquides n'est plus égal au rapport inverse des volumes immergés. La divergence, représentée par le fac-

1. Nous en donnons la description plus loin, dans le chapitre consacré à l'Électrométrie.
2. M. Duclaux, *Journal de physique* (1872).
3. Dans un liquide qui ne mouillerait pas l'aréomètre, l'effet de la tension superficielle serait inverse : l'instrument serait relevé, au lieu d'être enfoncé.

teur $\frac{P + 2\pi r N}{P' + 2\pi r N'}$, dépend de la différence des tensions superficielles des liquides considérés.

3° *Conclusion.* — Il résulte de cette discussion qu'on ne peut employer avec rigueur le même aréomètre pour des liquides différents, car il suffit d'une variation dans la tension superficielle pour fausser l'équilibre, en produisant un déplacement plus ou moins grand de la ligne d'affleurement. Par exemple, lorsqu'un aréomètre sensible est plongé dans l'eau et s'y tient en équilibre, il suffit de répandre à la surface de l'eau une trace imperceptible d'un corps gras, qui s'y étend comme un voile extrêmement mince, pour faire remonter l'instrument d'une quantité notable, par suite de la diminution de la tension superficielle.

Les seuls aréomètres parfaitement justes seront donc les aréomètres à graduation empirique et ne servant *que pour un seul liquide*, construits sur le modèle de l'alcoomètre de Gay-Lussac.

LIVRE VI

ACOUSTIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRODUCTION, PROPAGATION ET RÉFLEXION DU SON.

330. **Objet de l'acoustique.** — L'*acoustique*[1] a pour objet l'étude des sons au double point de vue de leur production et de leur transmission.

La musique considère les sons par rapport aux sentiments et aux passions qu'ils peuvent exciter en nous; l'acoustique ne traite que des propriétés physiques des sons, abstraction faite des sensations esthétiques qu'ils nous font éprouver.

331. **Son et bruit.** — Le *son* est une sensation excitée dans l'organe de l'ouïe par le mouvement vibratoire des corps, lorsque ce mouvement se transmet à l'oreille par l'intermédiaire d'un milieu élastique.

Tous les sons ne sont pas identiques : ils présentent des différences assez sensibles pour qu'on puisse les distinguer entre eux, les comparer et déterminer leurs rapports.

On distingue le son d'avec le *bruit*. Le son proprement dit, ou *son musical*, est celui qui produit une sensation continue et dont on peut apprécier la valeur musicale; tandis que le bruit est, ou bien, comme le bruit du canon, un son trop court pour qu'on puisse le classer dans l'échelle musicale, ou bien un mélange confus de plusieurs sons discordants, comme le roulement du tonnerre ou le bruit des vagues. Toutefois la différence entre le son et le bruit n'est pas nettement tranchée : on peut apprécier les hauteurs d'une suite de bruits produits successivement et en évaluer les rapports.

332. **Cause du son.** — Le son est le résultat d'oscillations rapides imprimées aux molécules des corps élastiques, lorsque, par

1. En grec, ἀκουστικός, de ἀκούειν, entendre.

le choc ou le frottement, l'état d'équilibre de ces molécules a été troublé. Elles tendent alors à reprendre leurs positions initiales; mais elles n'y reviennent qu'en exécutant, en deçà et au delà de ces positions, des mouvements vibratoires extrêmement rapides, dont l'amplitude décroît très vite.

On nomme *corps sonore* celui qui rend ou peut rendre un son, et *vibration simple* le mouvement qui ne comprend qu'un *aller* ou un *retour* des molécules vibrantes, *vibration double* ou *complète* le mouvement d'*aller* et de *retour*.

L'état vibratoire d'un corps qui résonne est facile à constater par des expériences très simples. Qu'on projette une poussière légère sur le corps sonore, elle prend un mouvement de trépidation rapide et visible à l'œil nu. De même, si l'on pince une corde tendue un peu longue, ses vibrations sont apparentes à l'œil. On n'a qu'à prendre une cloche de verre par le bouton supérieur (fig. 376) et, pendant qu'on la tient d'une main dans une position verticale, donner de l'autre main un coup sec sur les parois, de manière à les faire vibrer. Or, si l'on a placé au dedans un petit fragment de métal, il subit, de la part des parois vibrantes, de petits chocs rapides et réitérés, d'où résulte un mouvement de trépidation plus ou moins vif, accompagné d'un bruit sec particulier. En posant la main sur la cloche, on éteint les vibrations et ces chocs cessent aussitôt.

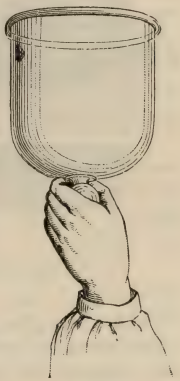


Fig. 376.

333. **Le son ne se propage pas dans le vide.** — Les vibrations des corps élastiques ne peuvent faire naître en nous la sensation du son que par l'intermédiaire d'un milieu pondérable, interposé entre l'oreille et le corps sonore et vibrant avec lui. Ce milieu est ordinairement l'air; mais les gaz, les vapeurs, les liquides, les solides, transmettent aussi le son.

Pour démontrer qu'un milieu est nécessaire à la propagation du son, on place sous la cloche d'une machine pneumatique un timbre métallique qui résonne automatiquement à l'aide d'un mouvement d'horlogerie (fig. 377). Tant que la cloche est pleine d'air à la pression ordinaire, on entend le son du timbre; mais à mesure qu'on raréfie l'air, l'intensité du son diminue et il cesse d'être perceptible lorsque le vide est poussé à un degré suffisant.

Pour que l'expérience réussisse bien, il faut poser la sonnerie sur de la ouate : autrement les pièces métalliques de l'instrument transmettraient leurs vibrations à la platine de la machine pneumatique, et celle-ci à l'air extérieur.

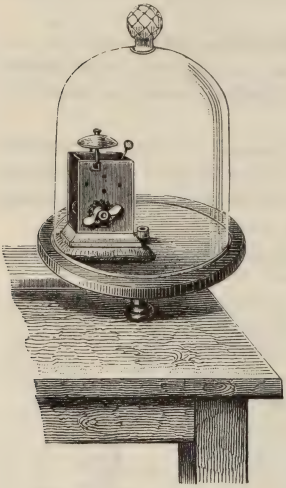


Fig. 377.

On fait aussi usage d'un ballon de verre à robinet, contenant une petite sonnette suspendue à un fil. Si l'on agite le ballon lorsqu'il est plein d'air, on entend distinctement la sonnette; mais après qu'on a suffisamment raréfié l'air qu'il renferme, on n'entend plus rien.

334. **Le son se propage dans tous les corps élastiques.** — Si, dans les expériences ci-dessus, après avoir fait le vide, on laisse rentrer dans le récipient un gaz ou une vapeur, on entend de nouveau le timbre ou la sonnette : cela démontre que le son se propage dans les gaz et dans les vapeurs comme dans l'air.

Le son se propage encore mieux dans les liquides. Lorsqu'on choque deux pierres sous l'eau, dans une rivière, on entend distinctement de la rive le bruit du choc. Inversement, un plongeur perçoit au fond de l'eau ce qu'on dit sur le rivage.

Quant aux solides, leur conductibilité est telle, qu'un bruit extrêmement léger, comme celui d'une barbe de plume qu'on frotte à l'extrémité d'une poutre en bois, est perçu à l'autre extrémité. Le sol conduit si bien le son, que, la nuit, en appliquant l'oreille contre terre, on peut entendre, à de grandes distances, des pas de chevaux ou tout autre bruit.

335. **Vitesse du son dans les gaz.** — La propagation du son dans les gaz, les liquides ou les solides, n'est pas instantanée; le son ne peut se transmettre d'un lieu à un autre que dans un intervalle de temps plus ou moins long. C'est ce que démontrent un grand nombre de phénomènes, et, entre autres, le tonnerre, qui ne se fait entendre qu'un certain temps après qu'on a vu l'éclair, bien que le bruit et l'éclair se soient produits simultanément dans la nue.

On appelle *vitesse du son* dans un milieu élastique qui le transmet, *l'espace qu'il y parcourt en une seconde.*

I. *Vitesse du son dans l'air. — Expériences de* 1822. — De nombreuses tentatives ont été faites pour déterminer la vitesse du son dans l'air atmosphérique. La dernière fut faite dans l'été de 1822, pendant la nuit, par les membres du Bureau des Longitudes. On avait choisi pour stations deux hauteurs situées, l'une à Villejuif, l'autre à Montlhéry, près Paris.

Méthode. — A chaque station, on tirait de dix en dix minutes un coup de canon. Les observateurs de Villejuif entendirent très distinctement les douze coups tirés à Montlhéry; mais ceux de Montlhéry n'entendirent que sept coups sur douze tirés à Villejuif, la direction du vent étant contraire. A chaque station, on notait, au moyen de chronomètres, le temps qui s'écoulait entre l'apparition de la lumière, au moment de l'explosion, et l'audition du son. Ce temps pouvait être considéré comme égal à celui qu'employait le son pour franchir la distance de deux stations, car celle-ci n'était que de 18 631^{m},52, et l'on verra, en optique, que la lumière parcourt cette distance en un temps inappréciable.

Résultats. — Valeur moyenne de la vitesse. — On constata ainsi que la durée moyenne de propagation entre les deux stations était de 54^{s},6; en divisant par ce nombre la distance de deux stations, on trouva que la vitesse du son est de 340^{m},19, à la température moyenne des expériences, laquelle était de 16^{0}.

Influence de la température. — La vitesse du son dans l'air décroît lorsque la température baisse : à 10^{0}, elle n'est que de 337 mètres; à zéro, de 333 mètres. Mais, pour une même température, elle est indépendante de la densité de l'air, et, par conséquent, de la pression atmosphérique.

Influence de la hauteur du son. — A température égale, la vitesse dans l'air est la même pour tous les sons, qu'ils soient forts ou faibles, graves ou aigus. Ce fait résulte d'autres expériences, exécutées par Biot, sur la propagation du son dans des tuyaux de conduite. Il constata que, lorsqu'on jouait de la flûte à l'extrémité d'un tuyau en fonte de 951 mètres de longueur, on percevait l'air à l'autre extrémité sans la moindre altération de rythme ni de mélodie : cela prouvait que les différents sons se propagent avec des vitesses égales.

Influence de la nature du gaz. — Enfin la vitesse du son varie d'un gaz à un autre, à température égale. Ainsi Dulong a trouvé pour la vitesse du son dans différents gaz, à la température de zéro, les nombres suivants [1] :

1. Ces nombres ont été calculés à l'aide des formules des *tuyaux sonores.*

Acide carbonique.	261 mètres.
Oxygène	317
Air.	333
Oxyde de carbone.	337
Hydrogène.	1269

336. **Formules pour calculer la vitesse du son dans les gaz.** — Newton le premier a donné pour calculer la vitesse du son dans les gaz, à la température de zéro, la formule $V = \sqrt{\frac{e}{d}}$, dans laquelle v représente la vitesse du son, c'est-à-dire l'espace qu'il parcourt en une seconde, e l'*élasticité* du gaz à zéro, et d sa densité aussi à zéro.

On conclut de cette formule que *la vitesse de propagation du son dans un gaz est directement proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité du gaz, et inversement proportionnelle à la racine carrée de sa densité.* Par conséquent, pour un même gaz, cette vitesse reste constante quelle que soit la pression ; car, l'élasticité augmentant, la densité augmente dans le même rapport, d'après la loi de Mariotte.

Soient g l'intensité de la pesanteur, H la hauteur du baromètre, et δ le poids spécifique du mercure à zéro, pour un gaz soumis à la pression atmosphérique ; l'élasticité e étant mesurée par le poids d'une colonne mercurielle de hauteur H et de section égale à 1, on peut poser $e = gH\delta$. La formule de Newton devient donc, pour la température de zéro, $V = \sqrt{\frac{gH\delta}{d}}$.

Or, lorsque la température d'un gaz monte de 0° à t degrés, son volume croît, et sa densité varie en raison inverse du volume; par conséquent, si l'on représente par 1 le volume du gaz à zéro, et par α l'accroissement que prend l'unité de volume en s'échauffant de 1°, le volume à t degrés sera $1 + \alpha t$. Par suite, la densité, qui est d à zéro, sera $\frac{d}{1 + \alpha t}$ à t degrés. La formule de Newton, pour une température t, doit donc s'écrire

$$V' = \sqrt{\frac{gH\delta}{d}(1 + \alpha t)} \quad \text{ou} \quad V' = \sqrt{\frac{gH\delta}{d}} \cdot \sqrt{1 + \alpha t} = V\sqrt{1 + \alpha t}$$

(V' étant la vitesse à t degrés, et V la vitesse à zéro).

Les valeurs de V, calculées par cette formule, ont toujours été plus petites que les valeurs mesurées par l'expérience. Laplace expliqua cette divergence par une circonstance dont Newton n'avait pas tenu compte : c'est le dégagement de chaleur qui s'effectue, par l'effet de la pression, dans les ondes condensées.

En admettant ce fait, Poisson et Biot ont trouvé que la formule de Newton doit être ramenée à la forme

$$V = \sqrt{\frac{gH\delta}{d}(1 + \alpha t)\frac{C}{C'}},$$

C étant la chaleur spécifique, à pression constante, du gaz dans lequel le son se propage, et C' sa chaleur spécifique à volume constant [1]. Toutefois cette formule n'est pas, dans tous les cas, rigoureusement d'accord avec l'expérience.

1. Voir la définition de ces coefficients dans le livre VIII, consacré à l'étude de la Chaleur.

337. **Vitesse du son dans les liquides et les solides.** — La vitesse du son dans les liquides est beaucoup plus grande que dans l'air. Colladon et Sturm ont trouvé, par des expériences faites en 1827 sur le lac de Genève, que la vitesse du son dans l'eau est de 1435 mètres à la température de 8°,1. C'est plus que *le quadruple* de la vitesse dans l'air.

Dans les solides, la vitesse du son est encore plus grande. Biot a trouvé que, dans la fonte, le son se propage 10 *fois* 1/2 *plus vite* que dans l'air. La vitesse du son dans les autres solides a été calculée par Chladni, Savart, Masson et Wertheim, qui l'ont déduite, soit des vibrations longitudinales ou transversales de ces corps, soit de leur coefficient d'élasticité. Chladni a trouvé que dans les différentes espèces de bois la vitesse est de 10 *à* 16 *fois plus grande* que dans l'air. Dans les métaux elle est plus variable : elle égale de 4 *à* 16 *fois* la vitesse dans l'air.

338. **Mode de propagation du son dans l'air : Idée synthétique du phénomène.** — On peut se faire une idée synthétique très nette du mécanisme de la propagation du son dans un milieu élastique, en observant un autre phénomène bien ordinaire, la chute d'une pierre dans une nappe d'eau tranquille. Considérons les diverses phases successives de ce phénomène. La pierre tombe, elle frappe l'eau et la déprime d'abord au lieu de la chute ; mais, presque immédiatement, l'eau se relève tout autour du centre de dépression, et il se forme un bourrelet circulaire, qui s'étend lentement en s'agrandissant à la surface de l'eau et qui perd en épaisseur à mesure qu'il gagne en étendue : c'est ce qu'on appelle une *onde condensée*. Pendant que cette onde se propage ainsi à la surface de la nappe d'eau, le liquide s'est relevé au centre et a formé, au lieu de la dépression initiale, une éminence de même volume. Cette petite montagne ne peut se produire qu'autant qu'il se creuse autour d'elle une petite vallée ; d'où il résulte un nouveau bourrelet circulaire qui est en *creux* au lieu d'être en *relief*, et qui se propage, comme le précédent, par cercles concentriques au centre d'ébranlement. De même que l'on a appelé *onde condensée* celle qui résultait d'une compression, on appelle *onde dilatée* cette dernière, qui résulte d'une sorte de dilatation, sur place, du milieu élastique. L'ensemble de ces deux ondes contraires constitue une *onde complète*.

Et il faut bien remarquer, dans l'une ou l'autre de ces ondes, que *ce n'est pas l'eau qui se déplace* en fuyant le centre, c'est *le mouvement d'oscillation* qui se propage seul dans les couches d'eau concentriques. En effet, on voit un corps léger, tel qu'un morceau de papier, posé en un point de la nappe d'eau, osciller

sur place et suivre le mouvement des ondes qui viennent le soulever ou l'enfoncer alternativement, et ne pas s'éloigner du centre en même temps que celles-ci.

Voilà ce qui se passe lorsqu'un seul choc a été produit au centre d'ébranlement : une seule *onde condensée* a pris naissance, suivie d'une seule *onde dilatée;* et le centre des ondes sera déjà redevenu tranquille, l'eau y sera déjà redevenue immobile comme un miroir, que le mouvement continuera encore longtemps à la circonférence, toujours constitué par des ondes, alternativement de sens contraire, qui s'étendent en s'affaiblissant de plus en plus. Mais si le premier choc a été suffisamment intense, ce qui est le cas ordinaire, l'eau du centre ne rentrera pas immédiatement en repos; elle accomplira une série d'oscillations isochrones, comme celles d'un pendule, et qui iront en s'affaiblissant. Toutes ces oscillations donnent naissance à des couples d'ondes, condensées et dilatées, que l'on voit courir les unes à la suite des autres sur la surface de l'eau.

Longueur d'onde. — Si l'on examine ces ondes avec attention, par exemple les ondes renflées, qui sont les plus apparentes, on remarque aisément qu'elles sont *équidistantes.* Et il doit en être ainsi, car la distance de deux ondes consécutives est précisément égale à l'espace que le mouvement a parcouru pendant la durée d'une oscillation complète du centre d'ébranlement. Si l'on appelle λ cette distance, T la durée d'une oscillation complète et V la vitesse de propagation dans l'eau, on doit avoir $\lambda = VT$: λ est constant, à la condition que V et T soient constants. C'est ce qu'on appelle une *longueur d'onde.*

Entre deux ondes renflées consécutives, et à égale distance de l'une et de l'autre, se trouve une onde déprimée, où les molécules liquides sont animées de vitesses contraires à celles que possèdent, au même instant, les molécules des ondes voisines. La distance comprise entre une onde renflée et une onde déprimée consécutive est égale à la moitié d'une longueur d'onde $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ et s'appelle une *demi-longueur d'onde.*

Remarque. — On voit, en outre que, sur un même rayon, à partir du centre d'ébranlement, deux points distants de $\frac{\lambda}{2}$ seront toujours animés de vitesses de sens contraire ; il en sera de même s'ils sont distants de $3\frac{\lambda}{2}$, $5\frac{\lambda}{2}\cdots$ et en général d'un *nombre impair* $(2n+1)$ de $\frac{\lambda}{2}$. Au contraire, deux points distants de

λ $\left(\text{ou } 2\frac{\lambda}{2}\right)$, de 2λ ou $\left(4\frac{\lambda}{2}\right)$... et en général d'un nombre pair de $\frac{\lambda}{2}$, seront animés de vitesses de même sens.

Ondes sonores. — On peut considérer ce phénomène si simple comme le type des mouvements vibratoires. Celui des corps sonores, qui constitue le son, se propage dans l'air, comme le précédent se propage dans l'eau; mais, comme les vibrations du corps sonore se transmettent tout autour de lui dans l'atmosphère ambiante, les *ondes sonores* sont sphériques, au lieu d'être circulaires comme les *ondes aqueuses*. De plus, la vibration n'est plus *transversale*, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon de l'onde, comme dans l'eau : elle est *longitudinale*, c'est-à-dire dirigée suivant le rayon sonore. Mais les caractères essentiels du mouvement que nous avons étudié, à savoir la *périodicité de la vibration* et la *constance de la vitesse de propagation*, se retrouvent dans l'air comme dans l'eau.

339. **Propagation du son dans l'air : Analyse du phénomène.** — 1° *Cas d'un tuyau sonore.* — Pour analyser plus facilement le phénomène de la propagation du son dans l'air ou dans les gaz, considérons le cas d'un milieu ꝏ azeux limité. Soit un tube ou tuyau MN prismatique (fig. 378) rempli d'air à

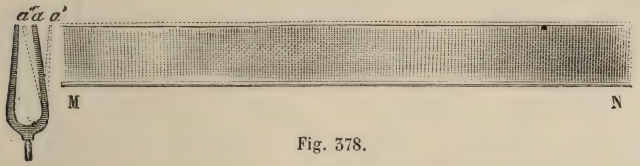


Fig. 378.

une pression et à une température constantes, et supposons un corps sonore, par exemple un diapason, qui vibre à l'orifice du tuyau. La branche a vibre comme un pendule entre les deux positions extrêmes a' et a'', et ses vibrations se propagent dans la colonne d'air du tuyau. La vitesse de la lame vibrante est alternativement croissante ou décroissante, suivant qu'elle se rapproche ou qu'elle s'éloigne de sa position initiale d'équilibre a. Analysons ce qui se passe dans la colonne d'air pendant la période T d'une vibration complète du diapason.

Il y a deux phases bien distinctes à considérer : celle de l'aller, entre la position a'' et la position a' de la branche, et celle du retour, entre la position finale a' et la position initiale a''. Pendant la première phase, la branche vibrante communique à l'air du tuyau une série d'impulsions, dont la vitesse, et par suite l'intensité, va d'abord en croissant (depuis a'' jusqu'à a), puis en décroissant (depuis a jusqu'à a'). Chacune de ces impulsions successives se propage à travers la colonne d'air, en vertu de l'élasticité de ce gaz, de la même manière que les impulsions se propageaient à travers l'eau dans l'expérience précédente (338). Au moment où la branche arrive en a', et communique sa dernière impulsion, la première impulsion s'est propagée à une dis-

tance égale à $\frac{1}{2}$ VT (V étant la vitesse de propagation du son) ; la région antérieure de la colonne d'air se trouve donc dans un état de condensation particulier sur une longueur égale à $\frac{1}{2}$ VT : c'est ce qu'on appelle l'*onde condensée*. Pendant la deuxième phase de la vibration, la lame vibrante, fuyant devant la couche d'air juxtaposée, lui communique, non plus une série d'impulsions, mais une série d'aspirations ou de dilatations, dont la vitesse va d'abord en croissant (entre les positions a' et a), puis en décroissant (entre a et a''). Pendant le même temps, la portion de la colonne d'air qui était précédemment le siège de l'*onde condensée*, est rentrée dans le repos, par suite de la propagation de celle-ci, et elle devient le siège d'une *onde dilatée*, par suite des dilatations qu'elle reçoit successivement pendant la durée $\frac{T}{2}$ de cette deuxième phase de la vibration. Donc, au bout du temps T, c'est-à-dire au bout de la première vibration complète, l'état de la colonne d'air est le suivant : la portion antérieure est le siège d'une onde dilatée, sur une longueur $\frac{1}{2}$VT, et la portion voisine, sur une longueur égale, est le siège de la première onde condensée, laquelle s'y est transportée ; de sorte que, sur une longueur $VT = \lambda$, la colonne d'air est le siège d'une onde sonore complète. Pendant les périodes suivantes, de nouvelles ondes prennent naissance dans la portion antérieure du tuyau, tandis que les ondes précédentes se prolongent dans toute sa longueur avec la vitesse constante V. Au bout d'un certain temps, la colonne d'air est partagée en tranches de longueurs $\frac{\lambda}{2}$, qui sont alternativement le siège d'ondes condensées et dilatées successives.

Représentation graphique de l'état permanent du tuyau sonore. — La figure 379 représente à l'œil, par une sorte de perspective, une image des condensations et dilatations successives dont la colonne d'air est le siège,

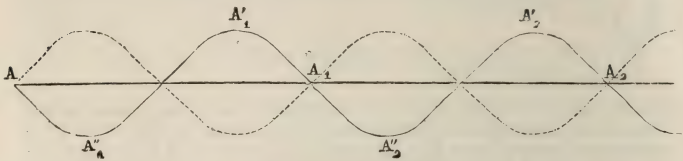


Fig. 379.

quand elle a acquis son état permanent. On peut en outre représenter géométriquement et mécaniquement cet état, en élevant sur l'axe même du tuyau une série de perpendiculaires proportionnelles à la vitesse de condensation ou de dilatation de la tranche d'air correspondante.

Ces perpendiculaires ont une longueur nulle aux points A, A_1, A_2... où la variation de densité est nulle ; elles ont une longueur maximum aux points A'_1, A'_2..., et A''_1, A''_2..., où cette variation est la plus grande. Les ordonnées correspondantes aux condensations sont toutes du même côté de l'axe horizontal, les ordonnées correspondantes aux dilatations sont toutes de l'autre côté. Cela constitue une courbe, en forme de sinusoïde, composée de boucles égales, alternativement positives et négatives. La longueur totale de deux boucles

consécutives est égale à λ, c'est-à-dire à une *longueur d'onae*, et celle d'une seule boucle est égale à $\frac{\lambda}{2}$. Enfin, chaque portion du tuyau étant successivement le siège d'ondes condensées et d'ondes dilatées, on a indiqué ce fait à l'aide d'une sinusoïde ponctuée qui est placée symétriquement à la sinusoïde pleine.

2° *Cas d'une atmosphère illimitée.* — On passe aisément du cas précédent à celui d'une atmosphère gazeuse illimitée. La propagation ne se faisant plus

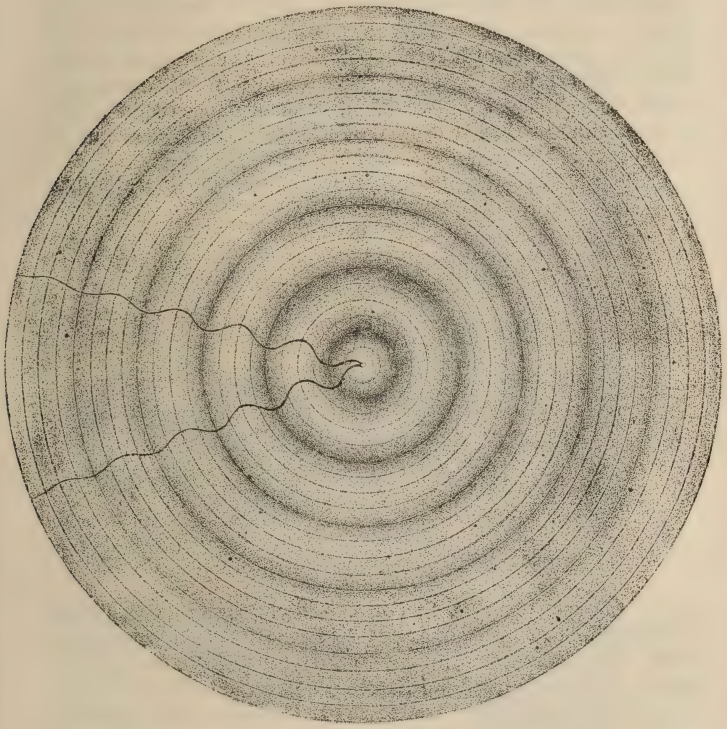


Fig. 380.

simplement dans un sens unique, mais dans tous les sens à la fois, les condensations et les dilatations successives se transmettent non plus à des tranches planes, mais à des surfaces sphériques, concentriques au corps sonore. Les ondes sonores deviennent des sphères; mais leur *longueur d'onde* et leur *vitesse de propagation* sont les mêmes que précédemment. La seule différence, c'est que l'intensité du mouvement vibratoire, se transmettant à une masse d air de plus en plus grande, diminuera rapidement à mesure que l'onde s'a-

grandira : d'où il résultera un affaiblissement rapide du son avec la distance au centre sonore. La figure 380 donne une idée assez nette de la distribution des ondes sonores dans ce cas. La série des ondes contraires est représentée par les teintes, alternativement claires et obscures; l'affaiblissement progressif de l'intensité du son est indiqué à la fois par la dégradation des teintes et par la diminution d'amplitude des deux courbes ondulées issues du centre.

340. **Réflexion du son.** — Tant que les ondes sonores ne sont point gênées dans leur développement, elles se propagent sous la forme de sphères concentriques; mais lorsqu'elles rencontrent un obstacle, elles suivent la loi générale des corps élastiques, c'est-à-dire qu'elles reviennent sur elles-mêmes, en formant de nouvelles ondes concentriques qui semblent émaner d'un second centre sonore, situé de l'autre côté de l'obstacle : on dit alors que les ondes sont *réfléchies*.

La figure 381 représente une suite d'ondes incidentes réfléchies

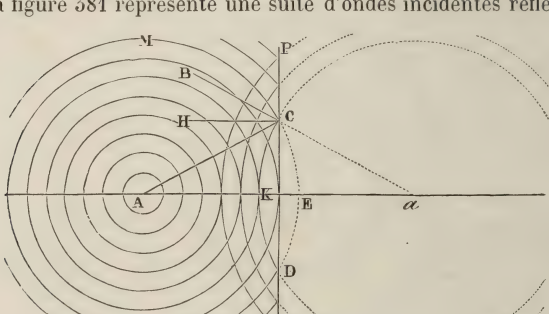


Fig. 381

sur un obstacle plan PQ. Si l'on considère, par exemple, l'onde incidente MCDN, émise du centre A, l'onde réfléchie correspondante est représentée par l'arc CKD, dont le point *a* est le *centre virtuel*. La droite AC, suivant laquelle se propage le son de A en C, est un *rayon sonore;* et si l'on mène par le point C une perpendiculaire CH à la surface réfléchissante, l'angle ACH que fait le rayon sonore avec cette perpendiculaire se nomme *angle d'incidence;* enfin, l'angle BCH, que fait le rayon sonore réfléchi BC avec la même perpendiculaire, est l'*angle de réflexion*.

La réflexion du son est soumise aux deux lois suivantes, que nous retrouverons les mêmes pour la chaleur et pour la lumière :

1° *Le rayon sonore incident et le rayon réfléchi sont dans un même plan, perpendiculaire à la surface réfléchissante.*

2° *L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.*

On verra plus loin comment ces deux lois se vérifient pour la chaleur au moyen de deux miroirs concaves placés en regard l'un de l'autre à plusieurs mètres de distance. On peut les vérifier de la même manière pour le son, en suspendant une montre au foyer de l'un des miroirs, et en plaçant l'oreille au foyer de

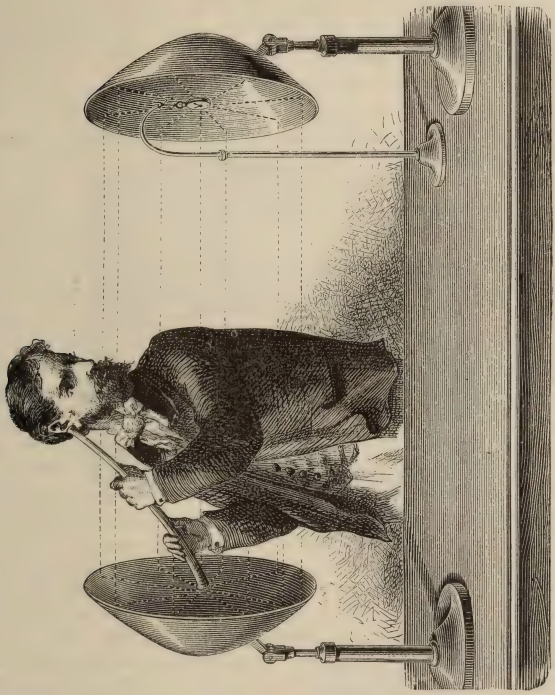


Fig. 382.

l'autre (fig. 382). Les tic-tacs de la montre, renvoyés par réflexion du premier miroir au foyer du second, sont entendus distinctement par un observateur qui place en ce point soit son oreille, soit l'orifice d'un petit tube acoustique.

341. **Échos et résonnances.** — D'après les lois de la réflexion, le son qui se propage d'abord à partir du point A (fig. 381) dans toutes les directions telles que AC, se propage, en outre, après sa

réflexion en PQ, suivant toutes les directions, telles que CB, émanées du point A. Il en résulte qu'un observateur placé en B entendra, outre le son parti du point A, un deuxième son qui lui semblera émis dans la direction CB.

On nomme *écho* [1] ce phénomène de la répétition d'un son dans l'air par l'effet de sa réflexion sur quelque obstacle.

Pour un son très bref, comme un choc, il peut y avoir écho lorsque la surface réfléchissante est distante seulement de 17 mètres. Cela résulte de ce fait physiologique qu'une sensation sonore persiste au moins un dixième de seconde. En effet, pendant cet

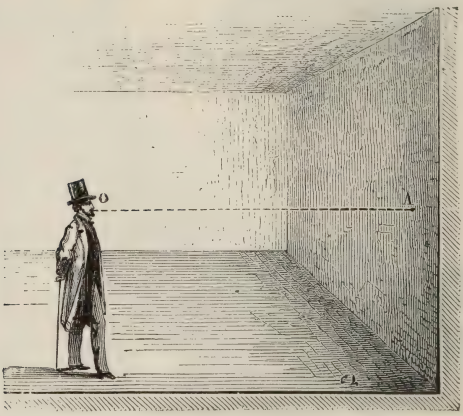


Fig. 383.

intervalle de temps le son parcourt environ 34 mètres; si donc un observateur est placé en O, à plus de 17 mètres d'un obstacle, tel qu'un mur A, servant de réflecteur au son (fig. 383), le son réfléchi parviendra à son oreille après que la sensation du son direct sera éteinte, et il pourra être perçu, sans aucune confusion, pourvu qu'il possède une intensité suffisante.

Pour les sons articulés il faut au moins une distance double, c'est-à-dire 34 mètres, pour que l'écho soit perçu nettement. Cela est une conséquence de ce fait, facile à constater, qu'on ne peut prononcer ou entendre bien distinctement plus de cinq syllabes par seconde. Or, la vitesse du son étant de 340 mètres par

1. Du grec ἠχώ, son.

seconde, il s'ensuit que dans un cinquième de seconde le son parcourt 68 mètres. Par conséquent, si l'obstacle réfléchissant est à une distance de 34 mètres, le son, tant pour aller jusqu'à l'obstacle que pour en revenir, aura 68 mètres à parcourir. Le temps écoulé entre le son articulé et le son réfléchi sera donc d'un cinquième de seconde; dès lors les deux sons ne se confondront pas, et le son réfléchi sera entendu distinctement.

Résonnances. — Lorsque la distance de la surface réfléchissante est moindre que 34 mètres pour les sons articulés et que 17 mètres pour les bruits isolés, le son direct et le son réfléchi tendant à se confondre, on ne peut les entendre séparément; mais le son se trouve renforcé et d'autant plus confus qu'une foule de réflexions partielles, émanées de divers points de la même salle, viendront s'ajouter au son principal : on dit alors qu'il y a *résonnance.* C'est ce qu'on observe dans les grands appartements. Les salles nues sont très retentissantes; au contraire, les tentures, les draperies, qui réfléchissent mal le son, rendent les appartements *sourds.*

Échos monosyllabiques et polysyllabiques. — D'après ce qui précède, si l'on parle à voix haute devant un réflecteur distant de 34 mètres, l'écho ne répétera que la dernière syllabe prononcée ; l'écho est donc *monosyllabique.* Si le réflecteur est distant de deux fois, trois fois 34 mètres, l'écho sera *dissyllabique*, *trissyllabique :* il répétera deux, trois syllabes successives.

Échos multiples. — On nomme *échos multiples* ceux qui répètent plusieurs fois le même son : c'est ce qui arrive lorsque deux obstacles placés l'un vis-à-vis de l'autre, deux murs parallèles par exemple, se renvoient successivement le son. Il existe des échos qui répètent ainsi jusqu'à vingt ou trente fois le même son. On cite particulièrement celui du château de Simonetta, près de Milan, qui répète *quarante fois* un mot prononcé entre les deux ailes parallèles de l'édifice.

Remarques. — 1° L'existence des échos est une conséquence et dès lors une preuve expérimentale de la réflexion du son. Ce n'est pas seulement sur des surfaces planes, comme les murs des édifices, qu'elle s'opère; dans plusieurs circonstances, la réflexion se produit sur des surfaces courbes, telles que des voûtes d'églises ou d'édifices, et y donne naissance à des échos très nets.

Ainsi, il arrive quelquefois que, lorsqu'on parle sous une arche d'un pont de pierre, la face tournée contre l'une des piles, la voix se reproduit près de l'autre pile avec assez d'intensité pour qu'on puisse entretenir une conversation à voix basse sans être entendu par les personnes placées dans l'espace intermédiaire.

La figure 384 représente une crypte d'église, à voûte elliptique, dans laquelle ce genre d'écho est à la fois indiqué et expliqué par la réflexion des rayons sonores, qui viennent de l'un des foyers de l'ellipse et sont renvoyés à l'autre

foyer. Le musée des Antiques au Louvre possède une salle de ce genre. Il existe également au rez-de-chaussée du Conservatoire des Arts et Métiers de Paris une salle carrée, à voûte elliptique, où l'on constate ce phénomène d'une manière remarquable, lorsqu'on se place aux deux foyers de l'ellipse.

Fig. 384.

2° *Réflexion atmosphérique du son.* — Du reste, le son ne se réfléchit pas seulement à la surface des corps solides : il se réfléchit aussi sur les nuages, à la rencontre d'une couche d'air de densité différente de celle qu'il vient de traverser, enfin sur les vésicules mêmes des brouillards. On observe, en effet, que, si l'air est brumeux, les sons subissent une foule de réflexions partielles et s'éteignent rapidement. C'est la nuit, lorsque l'air est calme et d'une densité uniforme, que les sons peuvent être entendus de plus loin.

342. **Réfraction du son.** — On verra plus loin qu'on entend par *réfraction* un changement de direction qu'éprouvent la lumière et la chaleur en passant d'un milieu dans un autre. Or Sondhauss a constaté que les ondes sonores se réfractent comme la chaleur et la lumière.

Lentille de Sondhauss. — On coupe sur un grand ballon de collodion deux segments égaux, et on les fixe sur les deux faces d'un anneau de tôle ayant 31 centimètres de diamètre (fig. 385), de manière à former une lentille biconvexe, creuse, dont l'épaisseur

au centre est d'environ 12 centimètres. Puis, remplissant d'acide carbonique la lentille ainsi formée, on place une montre sur la direction de l'axe, et on cherche ensuite, de l'autre côté de la lentille, le point où le bruit de la montre est entendu avec le plus d'intensité. On observe ainsi que, tant que l'oreille est éloignée de l'axe, le son est à peine perceptible; mais que, lorsqu'elle est sur

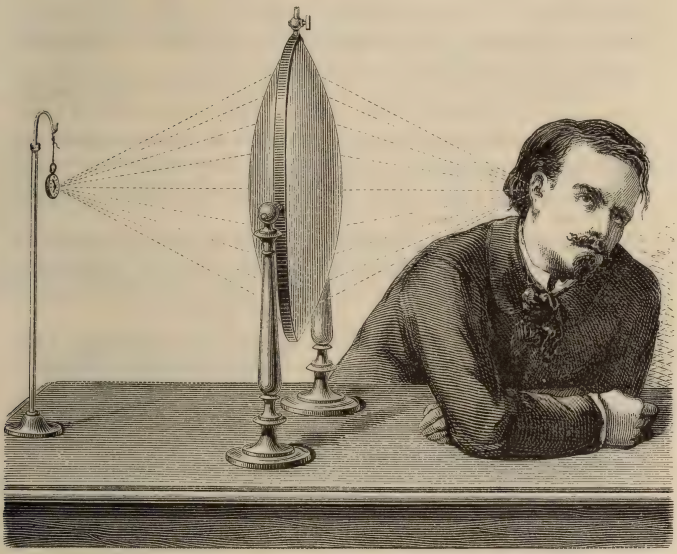


Fig. 385.

l'axe, à une distance convenable de la lentille, le son est entendu très distinctement : les ondes sonores, à leur sortie de la lentille, viennent donc concourir vers l'axe : ce qui montre non seulement qu'elles ont changé de direction, mais qu'elles se sont réfractées suivant les lois que nous verrons plus tard pour la lumière et la chaleur.

343. **Circonstances qui font varier l'intensité du son.** — Ce sont : la distance du corps sonore, l'amplitude des vibrations, la densité de l'air dans le lieu où le son se produit, la direction des courants d'air, et enfin le voisinage d'autres corps sonores.

1° *L'intensité du son varie en raison inverse du carré de la dis-*

tance du corps sonore. Cette loi est une conséquence théorique du mode de propagation du son dans un milieu indéfini (339, 2°). On a vu, en effet, que l'ébranlement moléculaire, produit par le corps sonore vibrant dans l'air, se propage sur des sphères concentriques, dont les surfaces varient proportionnellement au carré de leurs rayons. Par conséquent, sur une surface déterminée, telle que l'oreille d'un expérimentateur, la quantité de force vive qui sera transmise à diverses distances, variera en raison inverse des surfaces sphériques correspondantes et, par suite, *en raison inverse des carrés des distances au corps sonore.*

2° *L'intensité du son augmente avec l'amplitude des vibrations du corps sonore.* La relation qui existe entre l'intensité du son et l'amplitude des vibrations se constate aisément en faisant vibrer des cordes métalliques assez longues pour que leurs oscillations soient sensibles à l'œil : on vérifie alors que le son s'affaiblit lorsque l'amplitude des oscillations décroît.

3° *L'intensité du son dépend de la densité de l'air à l'endroit où il se produit.* Lorsqu'on place sous le récipient de la machine pneumatique une sonnerie mue par un mouvement d'horlogerie, l'intensité du son décroît à mesure qu'on raréfie l'air.

Dans l'hydrogène, qui est environ 14 fois moins dense que l'air, les sons ont une intensité beaucoup plus faible, quoique la pression soit la même. Dans l'acide carbonique, au contraire, dont la densité, par rapport à l'air, est de 1,529, les sons deviennent plus intenses. Sur les hautes montagnes, où l'air est très raréfié, il faut parler avec force pour se faire entendre, et l'explosion d'une arme à feu n'y produit qu'un faible bruit.

4° *L'intensité du son est modifiée par l'agitation de l'air et la direction des vents.* On constate que par un temps calme le son se propage toujours mieux que lorsqu'il fait du vent, et qu'en ce dernier cas le son est plus intense, à distance égale, dans la direction du vent que dans la direction contraire.

5° *Le son est renforcé par le voisinage d'un corps sonore.* Une corde d'instrument tendue à l'air libre et loin de tout corps sonore ne rend qu'un son faible; mais qu'elle soit tendue au-dessus d'une caisse sonore, comme dans la guitare, le violon ou la basse, elle rend un son plein et intense. Cela est dû à ce que la caisse et l'air qu'elle contient vibrent à l'unisson avec la corde. De là l'emploi des caisses sonores dans les instruments à cordes.

344. **Renforcement du son par les tuyaux.** — L'intensité du son ne varie plus en raison inverse du carré de la distance lorsque la transmission s'effectue dans des tuyaux, surtout si ceux-ci sont cylindriques et droits. Les ondes sonores ne se propageant plus

alors sous la forme de sphères concentriques croissantes, le son peut être porté à une distance considérable sans diminution bien sensible. Biot a constaté que, dans un tuyau de conduite des eaux de Paris, long de 951 mètres, la voix perd si peu de son intensité, que d'une extrémité à l'autre de ce tuyau on peut entretenir une conversation à voix basse. Toutefois l'affaiblissement du son devient sensible dans les tubes d'un grand diamètre, ou dans ceux dont les parois présentent des anfractuosités. C'est ce qu'on observe dans les souterrains et dans les longues galeries. On a fait de nombreuses applications pratiques de cette propriété des tubes et des tuyaux.

345. **Speaking-tubes.** — L'une des plus connues est l'emploi des *tubes acoustiques* ou *speaking-tubes*, pour converser à distance, dans les maisons privées, dans les usines, ou à bord des navires, soit d'une pièce à l'autre, soit d'un étage à l'autre. Ce sont de véritables *téléphones* acoustiques, mais à courte portée.

Ce sont ordinairement des tubes cylindriques, flexibles, en caoutchouc, qui se terminent par deux orifices, en os ou en ivoire, en forme d'embouchures évasées (fig. 386); un sifflet peut s'emboiter dans chacune des embouchures. On

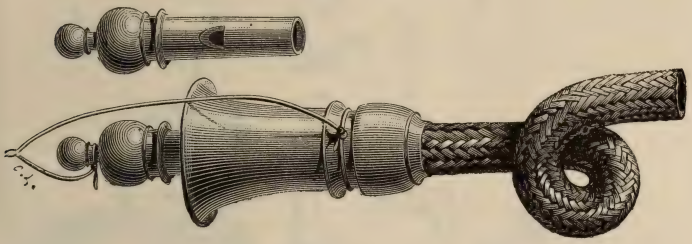


Fig. 386.

souffle d'abord dans le tube, pour prévenir, par un coup de sifflet, la personne avec qui l'on veut converser. Celle-ci siffle de la même manière, pour répondre qu'elle est à son poste, puis place l'embouchure à son oreille, pendant que l'interlocuteur parle à voix basse dans l'autre embouchure.

346. **Porte-voix.** — C'est un instrument fondé à la fois sur le renforcement et sur la facile transmission du son par les tuyaux.

Le porte-voix, ainsi que l'indique son nom, est destiné à transmettre la voix à distance. C'est un tube de fer-blanc ou de laiton (fig. 387), légèrement conique et très évasé à l'une de ses ouvertures, qu'on nomme *pavillon*. L'instrument s'embouche par l'autre extrémité; il porte la voix d'autant plus loin que ses dimensions sont plus grandes.

Les porte-voix en usage dans la marine ont jusqu'à 2 mètres de longueur, avec un pavillon dont le diamètre atteint $0^m,30$. Un bon porte-voix peut faire entendre des sons à 5 ou 6 kilomètres, surtout des sons non articulés. On explique, en général, les effets du porte-voix par une suite de réflexions succes-

sives des ondes sonores sur les parois du tube, réflexions en vertu desquelles les ondes tendent à se propager de plus en plus suivant une direction parallèle à l'axe de l'instrument.

On a objecté à cette théorie que les sons émis dans l'instrument ne sont pas renforcés seulement dans la direction de son axe, mais dans toutes les directions. On a dit encore que le pavillon est inutile pour obtenir le parallélisme

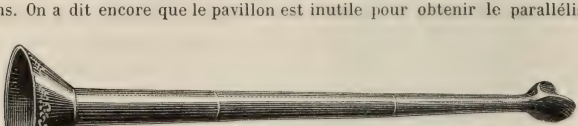


Fig. 387.

des rayons sonores, tandis qu'au contraire il exerce une influence considérable sur l'intensité des sons transmis. Enfin, lorsqu'on double d'une étoffe de laine l'intérieur du porte-voix, la force en est peu diminuée. Les effets de cet instrument seraient donc dus plutôt à un renforcement produit par la colonne d'air qui vibre dans le tube à l'unisson du son émis dans l'embouchure. Quant à l'effet du pavillon, on n'en a point donné jusqu'ici d'explication satisfaisante.

347. **Cornet acoustique.** — Le cornet acoustique sert aux personnes qui ont l'oreille *dure*. C'est un tube conique de métal, dont l'une des extrémités, ter-

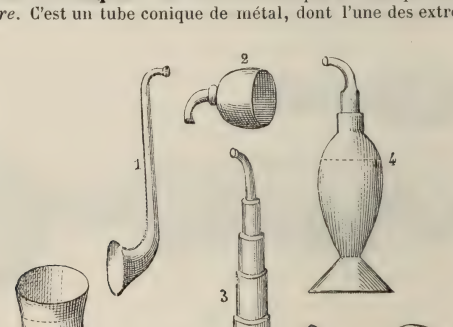
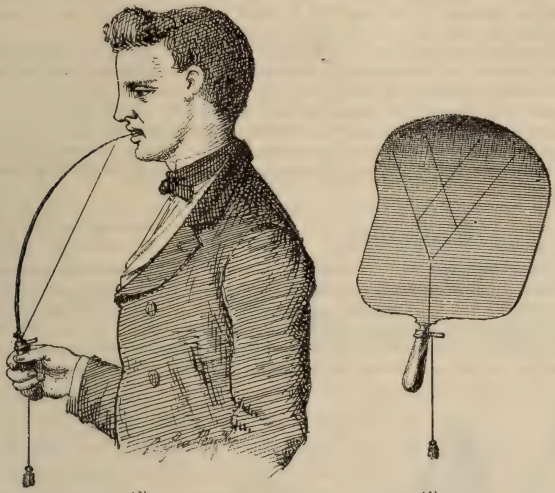


Fig. 388.

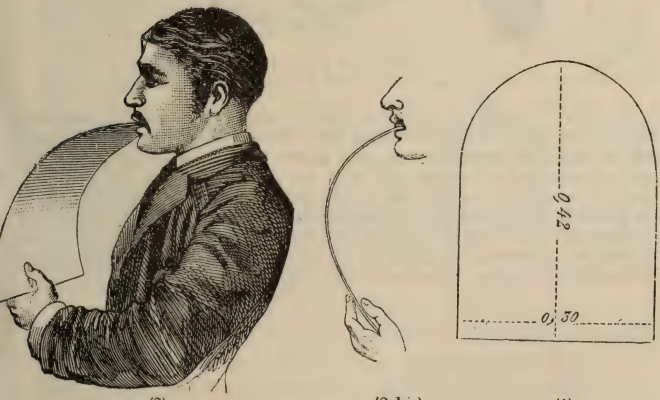
minée en pavillon, est destinée à recevoir le son, tandis que l'autre extrémité est introduite dans l'oreille. Le pavillon sert ici d'embouchure, c'est-à-dire qu'il reçoit les sons venant de la bouche de la personne qui parle. Ces sons se transmettent par une suite de réflexions dans l'intérieur du cornet, en sorte que les ondes qui eussent pris un grand développement se trouvent concentrées dans l'appareil auditif, et y produisent un effet beaucoup plus sensible que ne l'eussent fait des ondes divergentes. La figure 388 (1, 2, 3, 4, 5 et 6) montre une série de cornets de formes différentes.

348. **Audiphone.** — C'est un petit appareil destiné, comme le cornet acoustique, à faciliter, et même à *permettre* l'audition aux personnes plus ou moins



(2) (1)

Fig. 389.



(2) (2 *bis*) (1)

Fig. 390.

atteintes de surdité. Il est fondé sur la grande conductibilité des corps solides pour le son.

Le premier instrument de ce genre est dû à un Américain, M. R. G. Rhodes, de Chicago. C'est une sorte d'écran en caoutchouc durci, dont la lame est courbée à son extrémité (fig. 389, 1). La personne tient l'instrument par son manche et applique la courbure de la lame contre les dents de sa mâchoire supérieure (fig. 389, 2).

M. Colladon a simplifié cet instrument et l'a rendu, par suite, moins coûteux et plus pratique, en remplaçant le caoutchouc durci par du carton, de l'espèce connue dans le commerce sous le nom de *carton à satiner* ou *carton d'orties*. Une simple feuille, d'une épaisseur de 1 millimètre, taillée dans ce carton, sans manche ni autres accessoires, constitue l'audiphone (fig. 390, 1). On prend à la main le bord rectiligne et l'on appuie le bord convexe contre la mâchoire supérieure (fig. 390, 2 et 2 *bis*), de manière à donner à la feuille une courbure convenable.

Cet instrument permet, dit-on, la perception des sons musicaux et même de la parole articulée, non seulement à des personnes atteintes de surdité simple, mais encore à des sourds-muets.

349. **Stéthoscope.** — On nomme ainsi un petit instrument dont on se sert en médecine pour ausculter les malades. On en a imaginé plusieurs. Nous donnons ici celui qui est construit par Kœnig. C'est une espèce de cornet acoustique (fig. 388, 6) consistant en une capsule de cuivre fermée par une membrane de caoutchouc *c*, et divisée à l'intérieur en deux compartiments par une seconde membrane *a*, de manière qu'en insufflant, par un robinet latéral, de l'air

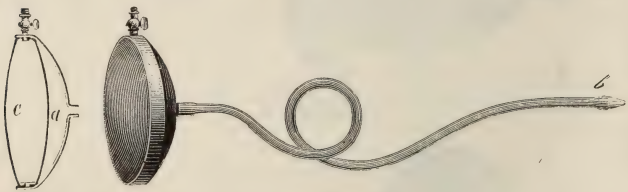


Fig. 391. Fig. 392.

entre les deux membranes, elles prennent la forme d'une lentille biconvexe, comme le montre, en coupe, la figure 391. Du centre de la capsule de cuivre part un tuyau de caoutchouc terminé par un bout de corne ou d'ivoire *b*. Le médecin introduit le bout du tube dans son oreille (fig. 392), tout en appliquant la membrane *c* sur la poitrine du malade : les battements du cœur et les bruits de la respiration se transmettent fidèlement à l'air renfermé dans la chambre *ca*, et de là à l'oreille par le tuyau de caoutchouc. On peut même s'ausculter soi-même. Si plusieurs tuyaux sont adaptés à l'appareil, autant d'observateurs peuvent ausculter simultanément le même sujet.

CHAPITRE II

HAUTEUR DU SON

MESURE DU NOMBRE DES VIBRATIONS.

350. **Qualités du son musical.** — Le *son* proprement dit, ou *son musical*, est le résultat de vibrations continues, rapides et isochrones, qui produisent sur l'organe de l'ouïe une sensation prolongée. On peut toujours le comparer à d'autres sons et trouver un autre son qui soit de même hauteur, ce qui ne peut se faire pour le bruit.

L'oreille distingue dans tout son musical trois qualités particulières : la *hauteur*, l'*intensité* et le *timbre*.

Hauteur. — La *hauteur* est la qualité qui résulte, pour l'organe de l'ouïe, du plus ou moins grand nombre de vibrations dans un temps donné. On nomme *sons graves* ceux qui résultent d'un petit nombre de vibrations, et *sons aigus* ceux qui résultent d'un grand nombre de vibrations.

Il n'y aurait donc de sons absolument graves ou aigus que ceux qui se trouveraient aux extrémités de l'échelle des sons perceptibles. Tous les sons intermédiaires ne sont graves ou aigus que d'une manière relative. Toutefois on dit un *son grave* ou un *son aigu*, comme on dit une *basse température* ou une *température élevée*, en comparant le son à ceux qu'on entend le plus ordinairement.

Nous avons défini la *hauteur* par sa cause physique; on peut la définir aussi par la sensation physiologique, et dire que c'est la qualité qui distingue entre eux les sons de même intensité, produits par un même instrument.

Intensité. — On a vu (343, 2°) que l'*intensité*, ou la *force* du son, dépend de l'amplitude des oscillations et non de leur nombre : un même son peut conserver le même degré de gravité ou d'acuité, et prendre une intensité plus ou moins grande, lorsqu'on fait varier l'amplitude des oscillations. C'est ce qui arrive pour une corde tendue, qu'on écarte plus ou moins de sa position d'équilibre.

Timbre. — Le *timbre* est la qualité par laquelle deux sons

provenant de deux instruments différents restent parfaitement distincts, tout en ayant même hauteur et même intensité. Le son du hautbois, par exemple, est très distinct de celui de la flûte; le son du cor, de celui du basson. De même la voix humaine présente un timbre bien différent, suivant les individus, l'âge ou le sexe.

On a longtemps ignoré la cause du timbre; ce n'est qu'en 1864 que M. Helmholtz a fait voir que le timbre particulier qui caractérise un son déterminé, est dû aux sons harmoniques (362) plus ou moins nombreux qui l'accompagnent toujours. Nous reviendrons sur ce sujet en faisant connaître les procédés d'analyse et de synthèse des sons (391).

351. **Méthodes diverses pour mesurer le nombre des vibrations.** — Il n'y a pas d'autre moyen de démontrer que la hauteur d'un son, c'est-à-dire le degré d'acuité ou de gravité d'un son, dépend du nombre plus ou moins grand des vibrations qui lui correspondent, que de mesurer le nombre de vibrations et de comparer les divers sons à ce point de vue. On y arrive par plusieurs méthodes, qui peuvent se contrôler l'une par l'autre. Ce sont :

1° La *méthode acoustique* ou *procédé de la sirène;*

2° La *méthode graphique* ou *procédé de Duhamel;*

3° La *méthode optique* ou *procédé de Lissajous;*

4° La *méthode des flammes manométriques* ou *procédé de Kœnig.* Ces dernières servent plutôt à comparer les sons entre eux qu'à en mesurer les nombres absolus de vibrations. Nous n'exposerons ici que les deux premières[1].

352. **Méthode acoustique. — Sirène de Cagniard de Latour.** — La *méthode acoustique* s'applique à l'aide d'un petit instrument, appelé *sirène.* Cagniard de Latour, qui en est l'inventeur, lui a donné le nom de sirène, parce qu'on peut lui faire rendre des sons, le *faire parler*, comme on dit, dans l'eau.

Description. — La figure 393 représente, en perspective, la sirène montée sur le *sommier* d'une *soufflerie* (354) et les figures 394 et 395 en donnent les détails de construction. A la partie inférieure de l'instrument, qui est tout en cuivre, est une caisse cylindrique O, recouverte d'un plateau fixe B. Sur ce plateau s'appuie une tige verticale T, à laquelle est fixé un disque A, qui peut tourner librement avec la tige; des trous circulaires équidistants sont pratiqués dans le plateau B, et dans le disque A se trouvent un nombre égal de trous de même grandeur et à la même dis-

1. Voir les autres méthodes dans Jamin et Bouty, *Cours de physique de l'École polytechnique*, t. III.

tance du centre que ceux du plateau. Ces trous ne sont point perpendiculaires aux surfaces du plateau et du disque ; mais, les uns étant tous inclinés d'un même angle et dans le même sens, les autres sont tous inclinés en sens contraire, de manière que, lorsque les trous du plateau et ceux du disque sont en regard, ils sont opposés l'un à l'autre, comme le représente la figure 394 en *m* et *n*. Il résulte de cette disposition que, lorsqu'un

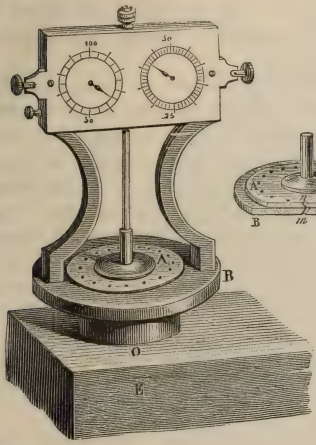


Fig. 393.

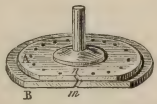


Fig. 394.

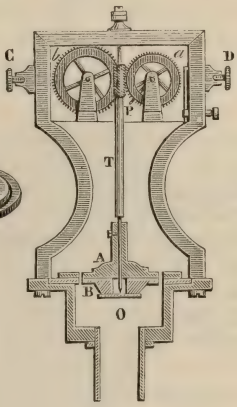


Fig. 395.

courant d'air rapide arrive de la soufflerie dans la caisse cylindrique et dans le trou *m*, il frappe obliquement les parois du trou *n*, et imprime au disque A un mouvement de rotation dans le sens A*n*.

Théorie. — Pour simplifier l'explication, supposons d'abord que, le disque mobile A portant 18 trous, le plateau fixe B ne soit percé que d'un seul. Considérons le cas où le trou inférieur coïncide avec l'un des trous supérieurs. Le vent de la soufflerie vient alors frapper obliquement celui-ci, le disque mobile se met à tourner, et le plein qui se trouve entre deux trous consécutifs vient fermer le vide du plateau inférieur. Mais, le disque continuant à tourner en vertu de sa vitesse acquise, deux trous se trouvent de nouveau en regard, d'où résulte une nouvelle impulsion, et ainsi de suite. De la sorte, pendant une révolution complète du disque, l'orifice inférieur est 18 fois ouvert et 18 fois fermé. Il en résulte un cou-

rant intermittent qui fait entrer l'air en vibration, et finit ainsi par produire un son, quand les impulsions successives sont suffisamment nombreuses. Si l'on suppose, comme cela existe réellement, que le plateau fixe B ait 18 trous comme le disque tournant, le phènomène vibratoire se produira exactement de la même façon, parce que les 18 trous seront successivement fermés et ouverts en même temps que le trou unique de tout à l'heure; les 18 trous vibreront donc à l'unisson; le son sera 18 *fois plus intense*, mais le nombre des vibrations *n'en sera pas augmenté*. Dans les deux cas, il est de 18 vibrations doubles par chaque révolution du disque A.

Usage : Application de la méthode acoustique. — Pour connaître le nombre de vibrations correspondant au son que rend l'appareil pendant son mouvement de rotation, il reste à compter les tours que fait le disque A pendant une seconde. Pour cela, la tige T porte une vis sans fin qui transmet le mouvement à une roue *a* garnie de 100 dents. Cette roue, qui avance d'une dent pour chaque révolution du disque, porte un taquet P, qui, à chaque tour, fait marcher d'une dent une seconde roue *b*, qu'on voit à gauche dans la figure 395. Les axes de ces roues font tourner deux aiguilles qui se meuvent sur des cadrans (fig. 393). Ces aiguilles indiquent, l'une le nombre des tours du disque A, l'autre les centaines de tours. Deux boutons D et C servent à engrener ou à désengrener à volonté la petite roue *a* avec la vis sans fin.

Comme le son s'élève à mesure que la vitesse du disque A s'accroît, il suffit de forcer le vent de la soufflerie pour faire rendre à l'appareil un son déterminé. On entretient alors la vitesse de ce courant d'air pendant un certain temps, 20 secondes par exemple; puis on lit les indications des deux cadrans. En multipliant ce nombre par 18 et divisant le produit par le nombre de secondes 20, le quotient indique le nombre de vibrations doubles par seconde correspondant au son donné. Soit n le nombre des unités de tour, et c celui des centaines : le nombre N cherché sera donné par la formule

$$N = \frac{18(n + 100\,c)}{20}.$$

Remarque. — On a constaté que la sirène, à vitesse égale, donne le même son sous l'eau que dans l'air; il en est de même dans tous les gaz : cela prouve que la hauteur d'un son déterminé ne dépend que *du nombre* des vibrations, et non *de la nature* du corps sonore.

353. **Sirène de Seebeck.** — On peut appliquer la même méthode à l'aide d'une autre *sirène*, construite par Seebeck. C'est un instrument plus compliqué que celui de Cagniard de Latour, mais qui permet de faire des expériences et des mesures beaucoup plus variées. Il est d'ailleurs fondé sur le même principe. Le son est produit par un courant d'air qui passe d'une manière discontinue par les trous d'un disque tournant. Ce disque est généralement en carton et porte sur sa circonférence plusieurs séries de trous plus ou moins nombreux. Il est animé d'un mouvement très régulier à l'aide d'un mécanisme d'horlo-

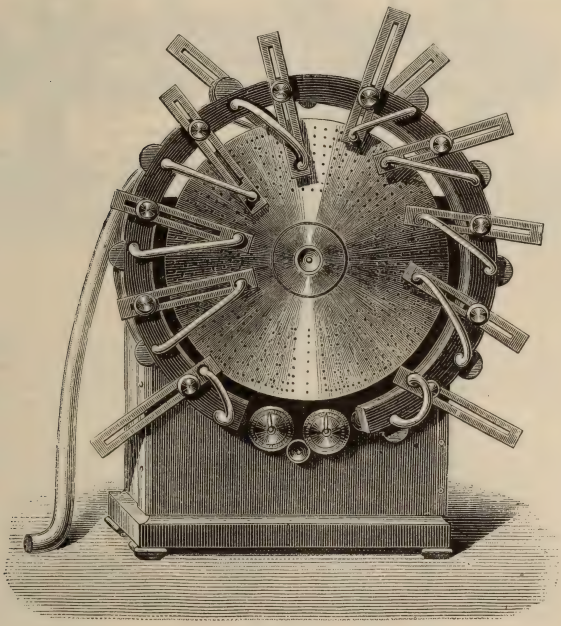


Fig. 396.

gerie contenu dans un socle en bois (fig. 396). Le système est porté sur un *sommier*, ou réservoir à vent, qui distribue le courant d'air, par l'intermédiaire d'un *porte-vent* en caoutchouc, à celle des séries de trous sur laquelle on veut expérimenter.

On peut d'ailleurs placer une série d'autres disques sur l'appareil, ce qui permet de varier les expériences.

354. **Soufflerie.** — L'appareil qui sert à faire *parler* la sirène, et en général toute espèce de tuyaux sonores, s'appelle une *soufflerie*. Il se compose d'un fort soufflet S, qui est placé entre les quatre pieds d'une table et qui fonctionne au moyen d'une pédale P (fig. 397). L'air refoulé par le soufflet se rend dans un réservoir de cuir R, très flexible, qui se gonfle à mesure que l'air y arrive

Comprimé par deux plaques de plomb qui chargent le réservoir, l'air passe ensuite par un tuyau A dans une boîte *mn*, placée sur la table, qu'on nomme le *sommier*. Cette boîte sert à la fois de support et de *distributeur de l'air* pour les tuyaux. Les trous dans lesquels s'engagent les embouchures des tuyaux sont fermés par des soupapes *s* (fig. 398) qui s'opposent au passage de l'air; mais devant chaque tuyau est une touche *a*, qui, lorsqu'on appuie dessus, fait ouvrir la soupape et laisse passer l'air. Au-dessous de la soupape est un ressort *r*, qui la relève automatiquement dès qu'on cesse d'appuyer sur la touche.

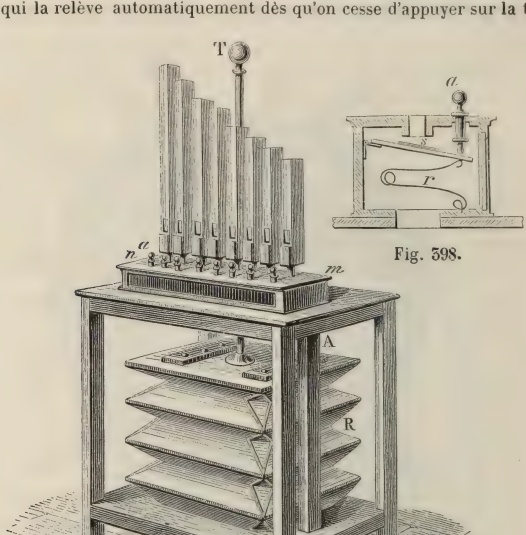


Fig. 398.

Fig. 397.

355. **Roue dentée de Savart.** — On peut encore appliquer la méthode acoustique à l'aide d'un autre instrument dû à Savart, la *roue dentée*. Le mécanisme en est encore plus simple que celui de la sirène. Les sons se produisent à l'aide d'une carte E (fig. 399) que l'on appuie fortement à la main contre les bords d'une roue métallique dentée, qui tourne plus ou moins vite, par l'intermédiaire d'une grande roue à manivelle. Il se produit *une vibration double* à chaque passage d'une dent : le nombre des vibrations qui se produisent en un temps donné dépend donc à la fois du nombre des dents de la roue et de sa vitesse de rotation ; il est mesuré automatiquement à l'aide d'un compteur spécial, analogue à celui de la sirène. Pour produire les *sons graves*, Savart substituait à la roue dentée une simple barre de fer, de 65 centimètres de longueur, qu'il faisait tourner entre deux lames de bois mince, distantes entre elles de

4 millimètres seulement. A chaque passage de la lame, il se produisait une espèce de bruit sec, dû au déplacement brusque de l'air ; pour une vitesse suffisante, tous ces chocs se confondaient en un son continu, très plein et plus ou moins grave. Au contraire, les sons de la roue dentée étaient plus ou moins aigus.

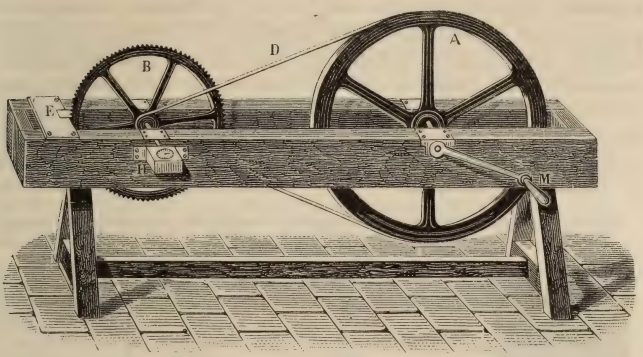


Fig. 399.

Dans l'un et l'autre cas, ces sons étaient de très mauvaise qualité : aussi l'instrument a-t-il été abandonné rapidement. Nous ne le citons que pour mémoire, et à cause des résultats intéressants que Savart en a déduits, relativement à la *limite de perceptibilité* des sons.

356. **Limite des sons perceptibles.** — On admettait avant Savart que l'ouïe cesse de percevoir les sons lorsque le nombre des vibrations doubles par seconde est inférieur à 16 pour les sons graves, et supérieur à 9000 pour les sons aigus. Mais les travaux de Savart ont démontré que ces limites sont trop resserrées, et que la faculté de percevoir les sons très graves ou très aigus dépend plutôt de leur intensité que de leur hauteur ; en sorte que, si les sons extrêmes ne sont pas entendus, c'est qu'ils n'ont pas été produits avec une intensité suffisante pour impressionner l'organe de l'ouïe.

A l'aide de sa *roue dentée*, Savart a pu reculer la limite des sons aigus jusqu'à 24 000 vibrations doubles par seconde et la limite des sons graves jusqu'à 8 vibrations doubles.

Despretz a fait des recherches sur le même sujet à l'aide d'une série de *diapasons* (368), accordés à l'octave les uns des autres. Il a trouvé 16 vibrations doubles pour limite des sons graves, et 36 850 pour limite des sons aigus[1].

1. Cela fait 73 700 vibrations simples, qui correspondent à $ré_{10}$ (ut_1 étant re-

357. **Méthode graphique. — Vibroscope de Duhamel.** — Avec l'un quelconque des instruments précédents, il est difficile de déterminer avec précision le nombre des vibrations correspondant à un son donné, parce qu'il faut les faire parler à l'*unisson* du son inconnu, opération qui demande une oreille exercée. La méthode graphique ne présente pas cette difficulté. Elle consiste, en effet, à tracer les vibrations mêmes du corps sonore sur une surface convenablement préparée. On n'a plus ensuite qu'à compter ces vibrations, qui sont inscrites sous la forme de sinuosités parfaitement visibles à l'œil nu. Le dispositif qui sert à produire cette inscription est dû, ainsi que la méthode elle-même, à Duhamel : on l'appelle *vibroscope*.

Description du vibroscope. — Cet appareil consiste en un cylindre A, de bois

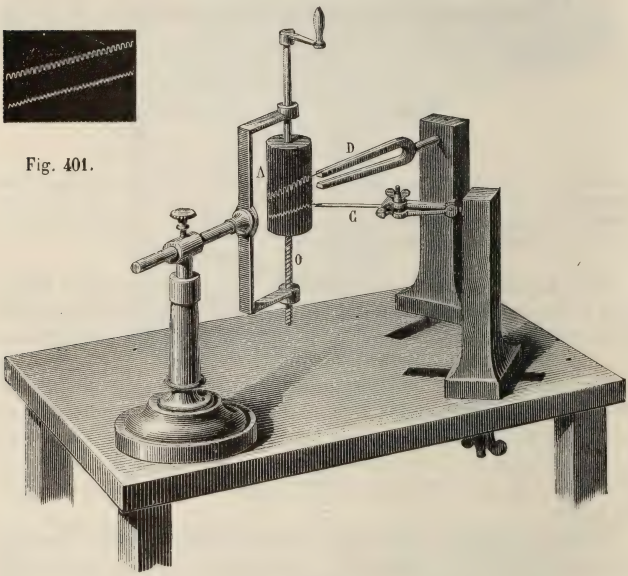


Fig. 401.

Fig. 400.

ou de métal, fixé à un axe vertical O (fig. 400). On fait tourner celui-ci à l'aide

présenté par 128 vibrations) (369). L'oreille était d'ailleurs péniblement affectée par la perception de ce son extrême, qui dépasse de beaucoup la limite des sons musicaux. D'après M. Helmholtz, les sons d'un bon emploi en musique sont compris entre 40 et 4000 vibrations doubles, dans une étendue de 7 octaves.

d'une manivelle, et, tout en tournant dans un sens ou dans l'autre, il prend un mouvement de haut en bas ou de bas en haut, au moyen d'un pas de vis tracé sur l'axe même et passant dans un écrou. Autour du cylindre est enroulée une feuille de papier sur laquelle on a déposé une couche légère et non adhérente de noir de fumée. C'est sur cette couche que s'inscrivent les vibrations.

Le corps sonore étant, par exemple, une lame élastique C, solidement encastrée par une de ses extrémités, on fixe à l'autre un style léger qui rase la surface du cylindre pendant sa rotation. Si celui-ci tourne sans que la lame vibre, le style trace en blanc sur le fond noir un trait hélicoïdal régulier ; mais si la lame vibre, le trait est ondulé, et autant de vibrations de la lame, autant d'ondulations. Il ne reste plus qu'à déterminer le temps pendant lequel se sont effectuées ces vibrations.

On peut y arriver de plusieurs manières. La plus simple consiste à comparer la courbe tracée par la lame vibrante à une autre courbe, qu'on trace parallèlement à la première à l'aide d'un diapason donnant par seconde un nombre de vibrations connu, 500 par exemple. Une des branches du diapason D étant, elle aussi, munie d'un style léger, on met celui-ci en contact avec le noir de fumée, puis on fait vibrer simultanément la lame et le diapason ; les deux styles tracent alors deux hélices ondulées, mais inégales. Or, en déroulant la feuille de papier (fig. 401), et en comparant les nombres d'oscillations qui se correspondent sur les deux courbes, il est facile d'en déduire le nombre de vibrations produites par seconde.

Exemple numérique. — Par exemple, supposons qu'à 150 vibrations du diapason en correspondent 165 de la lame ; chaque vibration du diapason durant, par hypothèse, $\frac{1}{500}$ de seconde, 150 vibrations correspondent à $\frac{150}{500}$ de seconde ; c'est donc en $\frac{150}{500}$ de seconde que la lame a fait 165 vibrations. Par suite, en $\frac{1}{500}$ de seconde elle en fait $\frac{165}{150}$, et en une seconde $\frac{165 \times 500}{150}$, ou 550.

358. **Phonautographe.** — Le vibroscope de Duhamel et les appareils enregistreurs analogues ne permettent d'inscrire que les mouvements vibratoires simples, tels que ceux d'un diapason, d'une verge métallique, etc. Un autre appareil enregistreur, le *phonautographe*[1], permet d'inscrire les vibrations compliquées des ondes sonores aériennes. Il se compose d'un large paraboloïde, en porcelaine, ou en faïence (ou en toute autre substance peu élastique), qui est coupé dans le plan de son foyer (fig. 402). On ferme cet orifice par une membrane élastique, munie d'un style sur sa face extérieure. Les ondes aériennes, provenant d'un corps sonore qu'on fait résonner à l'embouchure du paraboloïde, sont concentrées par les parois mêmes de celui-ci sur la membrane du plan focal. Celle-ci entre en vibration, et inscrit les mouvements complexes qu'elle reçoit sur un cylindre enregistreur, qui tourne uniformément, par un mouvement d'horlogerie, à la portée du style mobile. On obtient aussi des courbes plus ou moins compliquées, qui constituent une sorte d'*écriture acoustique* des sons émis par le corps sonore.

359. **Phonographe.** — Le *phonographe*, récemment inventé (en 1877) par M. Edison, peut être considéré comme un perfectionnement, très original et très important d'ailleurs, du phonautographe de Scott. C'est un appareil enregistreur qui inscrit les ondes aériennes, non plus sur papier noirci, mais sur une feuille métallique : celle-ci en conserve les empreintes, qui permettent, à leur tour, de reproduire à volonté les sons auxquels elles correspondent.

Description. — La figure 403 donne une vue perspective du phonographe d'Edison. Il se compose d'un cylindre de laiton A, monté sur un axe D, qui est muni d'un pas de vis sur la moitié de sa longueur. Sur le cylindre est tracée une rainure hélicoïdale de même pas que la vis D. Par suite, lorsqu'on fait

1. Inventé par un ouvrier mécanicien, appelé Scott.

tourner le cylindre au moyen de la manivelle M, à chaque tour la rainure avance d'une longueur égale à son pas. Sur la rainure est appliquée une feuille d'étain, ou de cuivre très mince, qui l'enveloppe. Enfin, en avant du cylindre

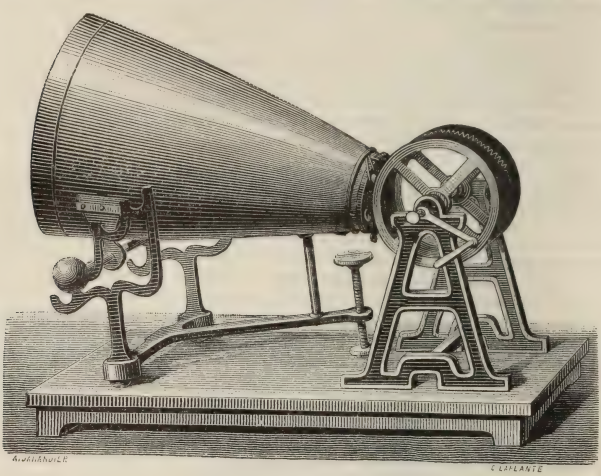


Fig. 402.

est une embouchure B, destinée à recueillir et à concentrer les ondes sonores (fig. 404) sur une plaque vibrante r; celle-ci s'appuie directement sur un tube de caoutchouc e, et ce dernier sur une lame élastique i, terminée par un poin-

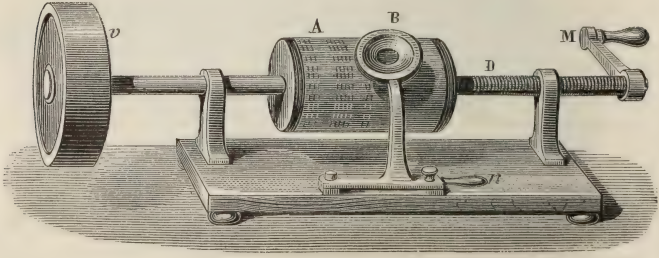


Fig. 403.

çon d'acier. Ce poinçon doit jouer le même rôle que le style du phonautographe; il rase la feuille d'étain, et il est ajusté de manière à correspondre à la rainure pendant sa rotation. (La plaque vibrante, qui remplace ici la membrane de Scott, est représentée en coupe, avec ses accessoires, dans la figure 404.)

Fonctionnement. — Pour faire fonctionner l'appareil, on parle à haute voix dans l'embouchure, le plus près possible de la plaque *r*, en ayant soin de tourner en même temps la manivelle M de gauche à droite. La plaque *r* vibrant alors à l'unisson de la voix, ses vibrations se transmettent à la lame *i* et au poinçon, qui trace, sur la feuille métallique, un gaufrage plus ou moins saillant, suivant l'intensité de la voix. Il reste maintenant à faire répéter par le phonographe les paroles qu'il a ainsi enregistrées.

A cet effet, à l'aide d'une poignée *n*, on fait tourner sur son pied et on amène en avant l'embouchure B; puis, faisant tourner la manivelle de droite à gauche, on ramène le cylindre à sa première position; y ramenant ensuite l'embouchure, et tournant, comme la première fois, de gauche à droite, le cylindre avance de nouveau, et c'est alors que l'appareil se met à répéter à haute voix les paroles qu'il a enregistrées. Dans la première partie de l'expérience, c'est la membrane vibrante qui a agi sur le poinçon, et celui-ci sur la feuille d'étain; maintenant il se produit un phénomène de *réversibilité :* c'est la feuille dont le gaufrage réagit sur le poinçon, et la lame *i* de ce dernier sur le caoutchouc et sur la lame *r*, laquelle reçoit ainsi exactement les mêmes vibrations que la première fois et reproduit les mêmes sons. On conçoit d'ailleurs qu'il y ait une perte plus ou moins grande de force vive, de sorte que les paroles répétées par l'instrument ont beaucoup perdu de leur intensité : le son est même grêle et désagréable.

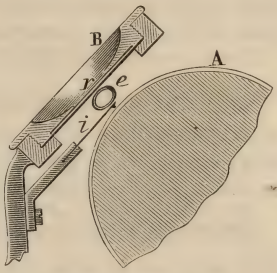


Fig. 404.

Remarque. — Dans ces expériences, il importe, surtout pour le chant, d'imprimer à la manivelle une vitesse de rotation uniforme, sinon le son fourni par l'instrument n'a plus la même hauteur que le son primitif. On obtient la régularité nécessaire à l'aide d'un mouvement d'horlogerie qui fait tourner le cylindre A par l'intermédiaire d'un volant *v*, dont on munit les phonographes actuellement construits.

CHAPITRE III

HAUTEUR DU SON

CLASSEMENT DES SONS MUSICAUX. — THÉORIE DE LA GAMME.

360. **Classement des sons. — Intervalles musicaux.** — Les méthodes précédentes permettent de caractériser chaque son musical, de le définir en quelque sorte par le nombre de vibrations qui lui correspond dans le corps sonore. Tel son correspond à

512 vibrations simples, tel autre à 860 vibrations simples : on reconnaît ces sons, par ce caractère numérique, à travers la diversité des timbres et d'intensité qui résulte de la diversité des corps sonores et des modes de production.

Ce caractère numérique des sons permet aussi de les comparer entre eux, et de prendre le *rapport* de deux sons comme on ferait de deux grandeurs géométriques quelconques. Le rapport de deux sons, ou plutôt des nombres de vibrations qui caractérisent ces sons, a reçu le nom particulier d'*intervalle*.

Si n et n' sont les nombres de vibrations de deux sons donnés, l'*intervalle* de ces deux sons est le quotient (ou rapport) $\frac{n'}{n}$. On prend pour numérateur le son le plus aigu, de sorte que n' est toujours *plus grand que* n, et que l'intervalle est toujours un nombre fractionnaire plus grand que l'unité.

Comme la fraction $\frac{n'}{n}$ ne change pas de valeur lorsqu'on en multiplie ou qu'on en divise les deux termes par un même nombre, on voit que l'intervalle de deux sons ne dépend pas *de leurs nombres absolus* de vibrations, mais *du rapport* de ces nombres.

Intervalles musicaux. — Les intervalles de deux sons pouvant être quelconques, ils sont en nombre indéfini. Certains intervalles ont une importance spéciale, parce qu'ils sont exclusivement employés en musique, et on les nomme à cause de cela *intervalles musicaux*. Ils sont définis par les rapports numériques suivants :

1°	$\frac{n'}{n} = \frac{1}{1}$. . .	On nomme cet intervalle :	*unisson*.
2°	$\frac{n'}{n} = \frac{9}{8}$. . .	—	*seconde*.
3°	$\frac{n'}{n} = \frac{5}{4}$. . .	—	*tierce*.
4°	$\frac{n'}{n} = \frac{4}{3}$. . .	—	*quarte*.
5°	$\frac{n'}{n} = \frac{3}{2}$. . .	—	*quinte*.
6°	$\frac{n'}{n} = \frac{5}{3}$. . .	—	*sixte*.
7°	$\frac{n'}{n} = \frac{15}{8}$. . .	—	*septième*.
8°	$\frac{n'}{n} = \frac{2}{1}$. . .	—	*octave*.

Ce sont là les *intervalles principaux*. On emploie encore en mu-

sique d'autres intervalles complémentaires, dérivés des précédents. Ce sont :

9° $\frac{n'}{n} = \frac{16}{15}$. . . On nomme cet intervalle : *seconde mineure*
(par opposition à l'intervalle. . .
. . . $\frac{9}{8}$. . . qu'on appelle quelquefois *seconde majeure*).

10° $\frac{n'}{n} = \frac{6}{5}$. . . On nomme cet intervalle : *tierce mineure*
(par opposition à l'intervalle. . .
. . . $\frac{5}{4}$. . . qu'on appelle quelquefois *tierce majeure*).

Toutes les fois que les nombres de vibrations de deux sons sont entre eux comme 2 est à 1, ou comme 3 est à 2, ou comme 4 est à 3, on dit, du plus aigu, qu'il donne l'octave, la quinte ou la quarte de l'autre son; et réciproquement, si l'on dit de deux sons qu'ils forment une quarte, une tierce majeure..., cela signifie que leurs nombres de vibrations sont entre eux comme 4 est à 3, ou comme 5 est à 3, et ainsi de suite.

361. **Accords : accords consonnants et dissonnants. — Accords parfaits.** — Lorsqu'on produit simultanément deux ou plusieurs sons, séparés par des intervalles musicaux, on produit un *accord*.

La sensation qui résulte de ce phénomène est tantôt plus ou moins agréable à l'oreille, et tantôt plus ou moins désagréable. Dans le premier cas, on dit que l'accord est *consonnant;* et dans le deuxième cas, qu'il est *dissonnant*.

Les accords, consonnants ou dissonnants, sont définis, d'après leur mode même de production, par les mêmes nombres que les intervalles musicaux, et ils sont désignés par les mêmes noms. Les accords les plus consonnants sont ceux d'*octave* $(\frac{2}{1})$, de *tierce majeure* $(\frac{5}{4})$ et de *quinte* $(\frac{3}{2})$. Les accords dissonnants sont ceux de *quarte* $(\frac{4}{3})$ de *sixième* $(\frac{5}{3})$, de *seconde* $(\frac{9}{8})$ et de *septième* $(\frac{15}{8})$.

En général, un accord est d'*autant plus consonnant* que les deux termes du rapport $\left(\frac{n'}{n}\right)$ qui le définit sont *plus petits*.

Accord parfait. — Le plus agréable de tous les accords est un accord plus complexe, formé par la production simultanée de trois sons dont les deux derniers sont séparés du premier (son fondamental) par les deux intervalles de *tierce majeure* et de *quinte*. Les nombres de vibrations successifs, en prenant le premier pour unité, sont donc représentés par les nombres fractionnaires

$$1, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{2},$$

ou bien, en chassant les dénominateurs, par les nombres entiers

$$4, \quad 5, \quad 6.$$

C'est ce qu'on appelle l'*accord parfait majeur*, par opposition à un autre accord analogue, qu'on obtient en substituant une tierce mineure à la tierce majeure qui forme le premier intervalle. L'*accord parfait mineur* est donc caractérisé par les nombres fractionnaires

$$1, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{3}{2},$$

ou bien par les nombres entiers

$$10, \quad 12, \quad 15.$$

362. **Harmoniques.** — On nomme *sons harmoniques*, ou simplement *harmoniques*, des sons dont les nombres de vibrations sont entre eux comme la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6....

La superposition de deux de ces sons donne un accord d'autant plus consonnant, qu'on les prend plus bas dans la série. En effet, le deuxième harmonique est l'octave du premier; le troisième (qui revient à $\frac{3}{2} \times 2$) en est la double quinte; le quatrième (qui peut s'écrire 2×2) en est la double octave; le cinquième (qui équivaut à $\frac{5}{4} \times 4$) en est la quadruple tierce. De plus, les deux premiers harmoniques donnent l'octave; le second et le troisième, la quinte; le troisième et le quatrième, la quarte; le quatrième et le cinquième, la tierce. Les harmoniques ne donnent donc que des accords, d'où leur vient leur nom. Toutefois ceci n'est exact que pour les premiers sons de la série; car plus on s'élève dans l'échelle musicale, plus l'accord tend à devenir dissonnant.

363. **Échelle musicale. — Gamme.** — On nomme *échelle musicale* une série de sons, employés en musique, séparés les uns des autres par des intervalles qui paraissent avoir leur origine dans la nature de notre organisation [1].

Les sons de l'échelle musicale se reproduisent périodiquement dans le même ordre, par séries de sept : chaque série s'appelle une *gamme*, et les sept sons ou *notes* de chaque gamme ont reçu les noms *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si* [2].

1. Telle est l'opinion la plus commune sur l'origine de la gamme. D'après M. Helmholtz, le système des gammes, des modes et de leur enchaînement harmonique ne repose pas sur des lois naturelles invariables, mais il est, au contraire, la conséquence de principes esthétiques qui ont varié avec le développement progressif de l'humanité, et qui varieront encore.

2. En Angleterre et en Allemagne, les sept notes sont représentées par les

En comparant entre eux, par l'une des méthodes indiquées plus haut, les nombres de vibrations des sept notes de la gamme, et en représentant par 1 celui du son le plus grave, l'*ut* fondamental, on trouve que les nombres relatifs de vibrations correspondant à ces notes sont représentés par les fractions ci-après :

[A]	Notes.	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*
	Nombres relatifs de vibrations .	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$

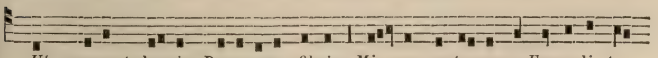
Là ne s'arrête pas l'échelle musicale : si l'on part de la note la plus grave qui puisse être utilisée en musique, cette première gamme est suivie d'une série de gammes semblables, dans lesquelles chaque note correspond à un nombre de vibrations double de celui de la note de même nom dans la gamme qui précède ; par conséquent, dans les gammes successives qui constituent l'échelle musicale, les notes sont toutes des multiples, par les puissances croissantes de 2, des notes de même nom dans la gamme fondamentale.

364. **Intervalles successifs des notes : Tons et demi-tons.** — Les fractions qui occupent la seconde ligne du tableau [A] ci-dessus ne représentent pas seulement les nombres de vibrations relatifs à celui de l'*ut* fondamental, mais les intervalles respectifs des six dernières notes par rapport à la première. Or, si l'on cherche les intervalles successifs entre ces notes, on trouve :

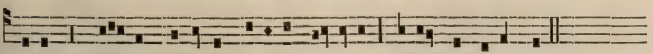
[B]	Notes.	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*
	Nombres relatifs de vibrations. . .	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
	Intervalles successifs.		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$.	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$.

On voit que les intervalles successifs entre les sept notes de la gamme se réduisent à trois, qui sont $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ et $\frac{16}{15}$. Le premier, qui

lettres C, D, E, F, G, A, B. Ce fut la coutume générale chez les anciens, et pendant le moyen âge jusqu'au onzième siècle. Un moine bénédictin, Guy d'Arezzo, remania alors l'échelle musicale, et prit pour noms des six premières notes les premières syllabes de six mots appartenant à l'hymne latine qu'on chantait dans les églises en l'honneur de saint Jean. La septième note, le *si*, ne fut ajoutée aux premières que plus tard, en 1784, par le musicien français Lemaire. Quant à la note *do*, elle s'est peu à peu substituée, pour l'usage du solfège, à la note *ut* qui manque de sonorité. Voici le fragment d'hymne (notée en plain-chant) à laquelle on a emprunté les noms des notes de la gamme.



Ut que-ant la-xis *Re*-sonare fibris *Mi*-ra gesto-rum *Fa*mu-li tu-



orum, *Sol*-ve pollu-ti *La*bi-i re-a-tum, Sancte Io-annes.

est le plus grand, a été appelé *ton majeur;* le second, *ton mineur*, et le troisième, qui est le plus petit, *demi-ton majeur*. Ainsi, toutes les fois que l'intervalle de deux sons est $\frac{9}{8}$ ou $\frac{10}{9}$, on dit qu'il y a entre eux un *ton;* et si l'intervalle est $\frac{16}{15}$, qu'il y a un *demi-ton*. On peut donc dire que les intervalles successifs de la gamme *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *ut* comprennent *deux tons*, *un demi-ton*, *trois tons* et *un demi-ton*.

L'intervalle entre le ton majeur et le ton mineur est $\frac{81}{80}$: on l'appelle *comma*. C'est le plus petit intervalle que l'on considère en musique ; il faut une oreille tellement exercée pour l'apprécier, qu'on a l'habitude de le négliger dans la pratique. C'est pourquoi l'on donne indifféremment le nom de *ton majeur* aux deux intervalles $\frac{9}{8}$ et $\frac{10}{9}$ qui ne diffèrent entre eux que d'un *comma*.

365. **Gamme naturelle. — Transposition musicale. — Dièses et bémols.** — Cette gamme majeure qui commence par la note *ut*, et qu'on appelle pour cela *gamme d'ut*, est la gamme fondamentale de l'échelle musicale : on l'appelle aussi *gamme naturelle* (nous verrons ci-dessous pourquoi).

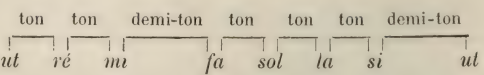
La note *ut*, qui en est le point de départ et qui sert à la désigner, en est dite la *note fondamentale*. On l'appelle encore la *tonique*, parce qu'elle donne le *ton* de la gamme : on dit, en effet, d'un morceau de musique qui est écrit avec les notes de cette gamme naturelle (ou de ses octaves aiguës ou graves), qu'il est *dans le ton d'ut majeur*[1]. La cinquième note, le *sol*, s'appelle la *dominante*, et la septième note, le *si*, est la *note sensible*.

Cette gamme naturelle étant insuffisante pour les besoins de la composition musicale, on a créé d'autres gammes majeures ayant pour toniques les différentes notes de la gamme fondamentale.

Dièses. — Essayons, par exemple, de créer une deuxième gamme majeure ayant pour tonique la quinte de la gamme fondamentale, c'est-à-dire la note *sol*. Les notes de cette nouvelle gamme seront :

sol la si ut ré mi fa sol.

Cette série de huit notes ne sera réellement une gamme, c'est-à-dire ne reproduira *la mélodie connue sous le nom de gamme*, qu'autant que les intervalles successifs des huit notes seront identiques à ceux de la gamme naturelle. Or ceux de la gamme naturelle sont :



1. Il est fâcheux qu'il n'y ait que ce seul mot de *ton* pour désigner les deux choses très différentes que nous avons définies ci-dessus.

et ceux de la nouvelle gamme

ton	ton	demi-ton	ton	ton	demi-ton	ton
sol	*la*	*si*	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*

Donc, dans cette dernière, le premier demi-ton est bien placé, c'est-à-dire entre la troisième et la quatrième note; mais le deuxième demi-ton est mal placé, puisqu'il est entre la sixième et la septième note, au lieu d'être entre la septième et la huitième. Pour reconstituer la mélodie, il suffira donc de *transposer* ce deuxième demi-ton. On y arrive en *diésant*, comme on dit, la septième note, le *fa*. Cet artifice consiste à multiplier par $\frac{25}{24}$ le nombre des vibrations de cette note, c'est-à-dire à substituer au *fa* primitif, dit *fa naturel*, une nouvelle note, dite *fa dièse* (qu'on écrit *fa* ♯), qui est séparée : 1° du *fa* naturel par l'intervalle $\frac{25}{24}$, 2° du *mi* précédent par un *ton*, et 3° du *sol* suivant par un *demi-ton*. On a alors la nouvelle série

[2] *sol la si ut ré mi fa* ♯ *sol*,

qui constitue une gamme majeure *en ton de sol* (avec *un dièse*) identique à la gamme naturelle en ton d'*ut*.

On passera de même à la gamme [3], ayant pour tonique la quinte ou dominante de la gamme [2], c'est-à-dire le *ré*, en diésant la note précédente *ut* (sous-dominante). On aura ainsi une troisième gamme majeure, identique à la gamme naturelle, mais *en ton de ré* (avec *deux dièses à la clef*).

[3] *ré mi fa* ♯ *sol la si ut* ♯ *ré*.

On obtiendra de même cinq autres gammes majeures, en appliquant cette règle de quinte en quinte successivement à toutes les notes de la gamme. Cette opération s'appelle *transposition*. La règle de transposition, pour les dièses, est la suivante :

Pour passer d'une gamme majeure quelconque à une autre gamme majeure, *ayant pour tonique la dominante* de la première, il suffit de prendre successivement toutes les notes de celle-ci, *mais en diésant la sous-dominante*.

Bémols. — Il y a une autre manière de transposer. Cherchons à former une nouvelle gamme, en prenant cette fois pour tonique la *sous-dominante fa* de la gamme naturelle.

La série des notes et des intervalles sera

ton	ton	ton	demi-ton	ton	ton	demi-ton
fa	*sol*	*la*	*si*	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*

Ici, c'est le dernier demi-ton qui reste en place, tandis que le premier est déplacé : il est reculé d'un rang vers la droite. Pour le ramener à sa place normale, c'est-à-dire entre la troisième et la quatrième note, on *bémolise* le *si :* artifice qui consiste à multiplier le nombre des vibrations de cette note par la fraction $\frac{24}{25}$. On substitue ainsi au *si* primitif, dit *si naturel*, une nouvelle note, dite *si bémol* (on l'écrit *si* ♭), qui est séparée : 1° du *si* naturel par l'intervalle $\frac{1}{\frac{25}{24}}$, 2° du *la* précédent par un *demi-ton*, et 3° de l'*ut* suivant par un *ton*. On a alors la nouvelle série

[2 *bis*] *fa sol la si*♭ *ut ré mi fa,*

qui constitue une nouvelle gamme majeure (dite *en fa majeur*, *avec un bémol à la clef*), identique à la gamme naturelle en *ut majeur*.

On passera, de la même manière, à la gamme suivante,

[3 *bis*] *si*♭ *ut ré mi*♭ *fa sol la si*♭,

qui a pour tonique la sous-dominante de la gamme [2 *bis*], en bémolisant le *mi*, c'est-à-dire la *note sensible* de celle-ci.

On créera de même cinq autres gammes majeures en appliquant successivement de quarte en quarte, à toutes les notes de la gamme naturelle, cette deuxième règle de transposition. On peut la formuler de la manière suivante :

Pour passer d'une gamme majeure quelconque à une autre gamme majeure, *ayant pour tonique la sous-dominante* de la première, il suffit de prendre toutes les notes de celle-ci, *mais en bémolisant la note sensible.*

366. **Gammes mineures. — Tons relatifs.** — Chacune des gammes précédentes est caractérisée par un *accord parfait majeur*, formé par la superposition de la tonique, de la tierce et de la quinte de la gamme. Pour la gamme d'*ut majeur*, c'est l'accord parfait fondamental *ut-mi-sol;* pour la gamme de *sol majeur*, c'est l'accord *sol-si-ré*$_1$ [1], et ainsi de suite.

De même qu'il y a un accord parfait mineur qui correspond à l'accord majeur, de même à une gamme majeure correspond une gamme mineure, ca-

1. Nous marquons ce *ré* d'un indice ($_1$) pour indiquer qu'il n'appartient plus à la gamme fondamentale, mais à la gamme suivante.

ractérisée par l'*accord parfait mineur*. Ainsi, l'accord parfait mineur correspondant à l'accord parfait majeur fondamental étant *la-ut*$_1$-*mi*$_1$, la gamme mineure correspondante à la gamme d'*ut majeur* a pour tonique le *la* de celle-ci. Elle est caractérisée par la place du premier demi-ton, qui est entre la deuxième et la troisième note, c'est-à-dire entre le *si* et l'*ut*. Quant au deuxième demi-ton, il reste placé entre la septième et la huitième note, ce qui exige que la sixième et la septième note soient *diésées*. On a donc la gamme suivante :

la *si* *ut*$_1$ *ré*$_1$ *mi*$_1$ *fa*$_1$♯ *sol*$_1$♯ *la*$_1$.

Elle est caractérisée par l'accord parfait *la-ut*$_1$-*mi*$_1$, qui est mineur, et l'on dit que ce ton de *la mineur* est *relatif* du ton d'*ut majeur*.

Le ton mineur *relatif de chacune des gammes majeures* précédentes se déterminera en leur appliquant successivement la même règle.

Remarque. — Les gammes mineures présentent toutes ce caractère particulier, que la *gamme descendante* n'est pas identique à la *gamme ascendante*, comme cela a lieu pour les gammes majeures. Ainsi, pour le ton de *la mineur*, tandis que la gamme ascendante est celle que nous avons définie plus haut,

la *si* *ut*$_1$ *ré*$_1$ *mi*$_1$ *fa*$_1$♯ *sol*$_1$♯ *la*$_1$,

la gamme descendante est

la$_1$ *sol*$_1$ *fa*$_1$ *mi*$_1$ *ré*$_1$ *ut*$_1$ *si* *la*,

c'est-à-dire que la sixième et la septième note ne sont plus diésées, et que toutes les notes redeviennent identiques à celles du ton majeur relatif[1].

Ordinairement on marque avec plus de précision ce retour des notes *fa*♯ et *sol*♯ à leurs valeurs naturelles, en les affectant d'un signe particulier ♮, appelé en musique *bécarre*. La gamme descendante s'écrit alors

la' *sol'*♮ *fa'*♮ *mi'* *ré'* *ut'* *si* *la*.

367. **Gamme tempérée. — Tempérament.** — Entre une note quelconque *diésée* et la note suivante *bémolisée*, l'intervalle est extrêmement petit, mais il n'est pas nul. On peut s'en convaincre en calculant, par exemple, les nombres de vibrations du *ré*♯ et du *mi*♭ de la gamme d'*ut majeur*. Si l'on prend pour unité le nombre de vibrations de l'*ut*, on a

$$ré\sharp = \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \qquad \text{et} \qquad mi\flat = \frac{5}{4} \times \frac{24}{25}.$$

L'intervalle de ces deux notes est donc

$$\frac{mi\flat}{ré\sharp} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{24}{25}}{\frac{9}{8} \times \frac{25}{24}} = \frac{2^7}{5^3} = \frac{128}{125}.$$

Il est facile de vérifier que cet intervalle est *plus grand* que le comma : il n'est donc pas négligeable. Une octave complète se compose donc, en réalité, des

1. Cette forme de la gamme mineure descendante tend à tomber en désuétude. On préfère maintenant descendre la gamme mineure exactement comme on la monte, et à écrire

la' *sol'*♯ *fa'*♯ *mi'* *ré'* *ut'* *si* *la*.

sept notes naturelles, *plus* des sept dièses, *plus* des sept bémols : en tout *vingt et une* notes.

Il est possible, au moins théoriquement, d'exécuter tous ces degrés successifs avec des instruments à son variable, tels que le violon, la basse ; mais, pour les instruments à sons fixes, tels que le piano et la harpe, la réalisation d'une octave complète ne serait pas pratique, à cause du nombre excessif de *touches* ou de *cordes* qu'il faudrait attribuer à l'instrument. On est donc convenu de confondre la note diésée avec la note bémolisée suivante, de manière à constituer une gamme complète mixte avec douze degrés ou intervalles successifs, également espacés.

La gamme, ainsi établie, s'appelle *gamme tempérée*. L'intervalle constitutif de cette gamme s'appelle *tempérament* ou *demi-ton moyen*. Puisqu'il y en a douze, entre l'*ut* fondamental et l'*ut* suivant, on voit que ce tempérament est égal à $\sqrt[12]{2}$ ($=1{,}059$). Il diffère légèrement du demi-ton majeur (1,066).

Voici la série des notes de la gamme tempérée, avec les intervalles correspondants :

ut	$=1$	*fa* ♯ ou *sol* ♭	$=1{,}409$
ut ♯ ou *ré* ♭	$=1{,}059$	*sol*	$=1{,}495$
ré	$=1{,}121$	*sol* ♯ ou *la* ♭	$=1{,}584$
ré ♯ ou *mi* ♭	$=1{,}187$	*la*	$=1{,}678$
mi	$=1{,}257$	*la* ♯ ou *si* ♭	$=1{,}780$
fa	$=1{,}331$	*si*	$=1{,}888$

Enfin l'*ut* suivant est 2, de manière que l'intervalle d'octave est rigoureusement conservé ; celui de tierce $\left(\frac{5}{4}=1{,}250\right)$ et celui de quinte $\left(\frac{3}{2}=1{,}500\right)$ n'éprouvent que des altérations négligeables.

368. **Diapason.** — Le *diapason* est un petit instrument à l'aide duquel on reproduit à volonté une note invariable : on s'en sert pour accorder les instruments de musique. Il consiste en une verge d'acier recourbée sur elle-même en forme de pincette (fig. 405). On le fait vibrer, soit en passant un archet sur ses bords, soit en écartant brusquement ses deux branches au moyen d'un cylindre de fer qu'on passe de force entre elles, comme le montre la figure. Les deux lames, ainsi écartées de leur position d'équilibre, y reviennent en vibrant, et produisent un son constant pour chaque diapason. On renforce le son par *résonnance*, en fixant l'instrument sur une caisse en bois blanc, ouverte à l'une de ses extrémités.

Diapason normal. — Le nombre des vibrations d'un diapason varie avec la longueur et l'épaisseur de ses deux branches. On peut donc construire des instruments rendant une note quelconque de la gamme : on n'a qu'à les régler à l'aide de la sirène, ou mieux par le procédé graphique de Duhamel. On appelle *diapason normal* celui qui rend le *la* d'une certaine gamme qu'on distingue des autres, dans l'échelle musicale, en affectant ses diverses notes de l'indice 3 : par conséquent le diapason normal donne le la_3.

La *normal.* — Le nombre des vibrations simples du diapason normal a d'abord été de 856 par seconde; mais comme, pour accorder leurs instruments, les musiciens faisaient rarement usage de cet appareil, il arriva que le ton allait toujours en s'élevant sur tous les grands théâtres d'Europe, et qu'en outre il n'était pas le même à Paris, à Vienne, à Milan, etc. Les constructeurs portèrent alors le nombre de vibrations du diapason à 880; enfin, en 1859, une Commission choisie à cet effet adopta un *diapason normal*, obligatoire pour tous les établissements musicaux de France. Ce diapason, dont un étalon est déposé au Conservatoire de musique de Paris, exécute 870 vibrations simples par seconde. Le la_3 a été défini du même coup : c'est ce qu'on appelle le *la normal.*

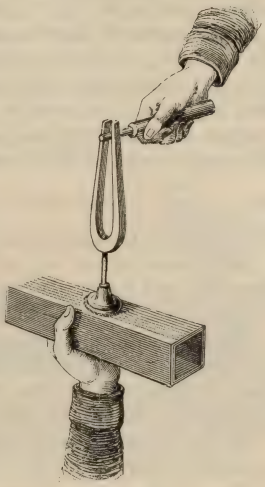


Fig. 405

369. **Notation des diverses gammes naturelles. — Nombres absolus de vibrations.** — Le nombre absolu de vibrations qui correspond à l'*ut* fondamental étant tout à fait arbitraire, on peut admettre une série indéterminée de gammes. Comme point de départ de l'échelle musicale on a choisi le son le plus grave de la basse, on en a fait l'*ut* de la première gamme, dont on est convenu[1] de distinguer les notes en les affectant de l'indice 1; on désigne alors les notes des gammes plus aiguës par les indices 2, 3..., et celles des gammes plus graves par les indices — 1, — 2.... On écrit donc ut_1, $ré_1$, ut_{-1}, $ré_{-1}$.... Par exemple, fa_2 est à l'octave aiguë de fa_1.

On n'a considéré jusqu'ici que les nombres de vibrations relatifs; mais il est facile de déduire tous les nombres absolus du nombre 870 de vibrations simples, ou de 435 vibrations doubles, qui a été adopté pour le la_3. En effet, l'intervalle du *la* à l'*ut* étant $\frac{5}{3}$, le nombre de vibrations de ut_3 sera donné par l'équation

$$\frac{la_3}{ut_3} = \frac{5}{3}, \quad \text{d'où} \quad ut_3 = \frac{3}{5} \times la_3.$$

Par conséquent $ut_3 = \frac{3}{5} \times 435 = 261$ vibrations doubles.

1. Cette convention fut proposée par le physicien Sauveur.

Connaissant la valeur absolue d'ut_3, on aura les autres notes $ré_3$, mi_3, fa_3..., en multipliant 261 par $\frac{9}{8}$, par $\frac{5}{4}$, par $\frac{4}{3}$.... Quant à ut_2, il égale $\frac{ut_3}{2} = 130\frac{1}{2}$ et $ut_1 = \frac{ut_2}{2} = 65\frac{1}{4}$.

La valeur anciennement adoptée pour ut_1 était 64; son accroissement résulte de l'élévation du diapason normal.

370. **Limites de l'échelle musicale.** — 1° *Limite instrumentale.* — En musique, on emploie des notes encore plus graves que l'ut_1 de Sauveur. On descend encore de deux octaves au-dessous de l'octave ($ut_1 - ut_2$). On note la première octave inférieure ut_{-1}... et l'octave la plus grave, ut_{-2}.... Leurs nombres de vibrations se déduisent aisément des précédents. On a (en vibrations simples) $ut_{-1} = \frac{261}{2} = 130{,}5$ et $ut_{-2} = \frac{130{,}5}{2} = 32{,}625$. Cette limite des sons graves est donnée par le plus grand tuyau des grandes orgues.

Les pianos actuels vont du la_{-2} à l'ut_6 : leur registre comprend donc un peu moins de sept octaves. La limite des sons aigus est donnée par la petite flûte : c'est le $ré_6$.

Nous avons dit précédemment (356) que, d'après M. Helmholtz, les sons d'un bon emploi en musique vont environ de 40 vibrations simples à 8000. Par conséquent l'échelle musicale proprement dite ne comprend que sept octaves [1].

2° *Limite vocale.* — L'échelle des voix humaines est encore plus restreinte. Elle va du fa_{-1}, note extrême du registre des basses-tailles, à l'ut_6, note extrême du registre des soprani.

CHAPITRE IV

VIBRATIONS DES CORDES.

371. **Cordes vibrantes. — Définitions.** — On nomme *cordes*, en acoustique, des corps filiformes, en métal ou en boyau, qui sont *élastiques par tension.*

On provoque dans les cordes deux sortes de vibrations : les unes *transversales*, qui se font dans une direction perpendiculaire aux cordes ; les autres *longitudinales*, qui se font dans le sens de

1. Le son de 73 700 vibrations simples, indiqué par Despretz comme la limite supérieure des sons perceptibles, affecte douloureusement l'oreille même la moins musicale.

leur longueur. On excite les premières, soit en frottant les cordes avec un archet, comme sur le violon, soit en les pinçant, comme on le fait sur la harpe et la guitare. Quant aux vibrations longitudinales, on les fait naître en frottant les cordes, dans le sens de leur longueur, avec un morceau d'étoffe saupoudré de colophane.

372. **Sonomètre.** — Le *sonomètre* est un appareil qui sert à étudier les vibrations transversales des cordes. On l'appelle aussi *monocorde,* parce que souvent il ne porte qu'une seule corde.

Il se compose d'une caisse sonore de bois mince, destinée à renforcer le son. Sur cette caisse sont deux chevalets fixes A et B (fig. 406), distants l'un de l'autre d'un mètre. D'un chevalet à l'autre s'étend une échelle divisée en millimètres, et à gauche

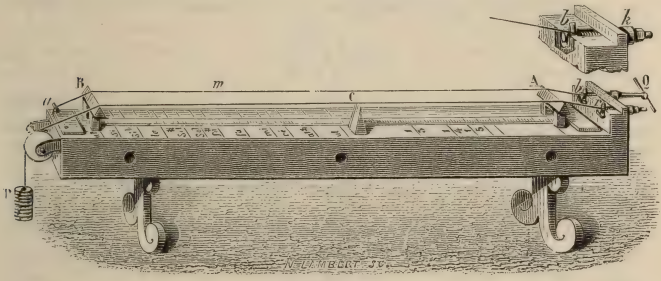


Fig. 406.

et à droite de cette échelle sont tracées sur la caisse deux séries de divisions, marquant, l'une la gamme vraie ou diatonique, l'autre la gamme *tempérée.* Sur les chevalets passent deux cordes : l'une, *m*, s'enrouie d'un bout sur un boulon de fer *a*, qui est fixe, et de l'autre bout sur un boulon *b*, qui est lié à une vis horizontale ; on le recule plus ou moins en faisant tourner un écrou *k*, dans lequel passe la vis, de manière à tendre la corde à volonté. La deuxième corde, fixée de la même manière à son extrémité *r*, passe sur une poulie par son autre extrémité. Là elle est tendue par des poids de plomb P, qu'on augmente jusqu'à ce qu'on lui ait donné la tension voulue. Enfin, un chevalet mobile C peut se déplacer sous la corde pour en faire varier la longueur.

La première corde *m* rend un son fixe qui est déterminé par une tension invariable ; c'est à ce son qu'on compare ensuite les sons successivement rendus par l'autre corde, à mesure qu'on en modifie la tension ou la longueur. Ou bien les deux cordes passent chacune sur une poulie, et alors elles sont tendues par des

poids qui sont égaux, ou qui sont entre eux dans un rapport donné.

373. **Lois des vibrations transversales.** — 1° *Énoncé.* — Le calcul et l'expérience font voir que les vibrations transversales des cordes sont soumises aux lois suivantes :

1° *La tension étant constante, le nombre des vibrations qu'exécute une corde, en une seconde, est en raison inverse de sa longueur.*

2° *Toutes choses égales d'ailleurs, le nombre des vibrations est en raison inverse du rayon de la corde.*

3° *Le nombre des vibrations d'une corde est directement proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend.*

4° *Toutes choses égales d'ailleurs, le nombre des vibrations d'une corde est inversement proportionnel à la racine carrée de sa densité.*

2° *Formule.* — Ces lois sont comprises dans la formule

$$[1] \qquad n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{P}{\pi\delta}},$$

dans laquelle n représente le nombre de vibrations simples par seconde, l la *longueur* de la corde, c'est-à-dire la partie vibrante comprise entre les deux chevalets A et B (fig. 406), r le rayon de la section de la corde, P le poids qui la tend, et enfin δ la densité de la corde, c'est-à-dire la masse sous l'unité de volume; quant à π, c'est le rapport de la circonférence au diamètre.

Dans cette formule, P doit être compté en kilogrammes, r et l en décimètres.

3° *Autre formule.* — On peut exprimer ces lois à l'aide d'une autre formule,

$$[2] \qquad n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi d}}.$$

Dans celle-ci, d représente le poids spécifique de la substance et les autres coefficients sont les mêmes que dans la précédente. En effet, Lagrange a trouvé la formule des vibrations transversales des cordes sous la forme

$$[3] \qquad n = \sqrt{\frac{gP}{lp}},$$

dans laquelle, n, P et l ayant la même signification que ci-dessus, g représente l'intensité de la pesanteur, et p le poids de la partie vibrante de la corde. Or, d'après la formule connue $P = VD$, on a $p = \pi r^2 ld$, d étant le poids spécifique de la corde et $\pi r^2 l$ son volume, puisqu'elle n'est autre chose qu'un cylindre de rayon r et de hauteur l; portant cette valeur de p dans la formule de Lagrange, on trouve

$$n = \sqrt{\frac{gP}{\pi r^2 l^2 d}} = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi d}}.$$

Tant que l'on ne considérera que des nombres relatifs de vibrations, il sera plus simple de faire usage de la formule [1]; mais si l'on veut calculer le nombre absolu de vibrations que fait la corde par seconde, on devra avoir recours à la formule [2], en ayant soin de compter g en décimètres.

4° *Application musicale.* — Ces lois trouvent leur application dans les instruments à cordes; c'est en faisant varier la longueur, le diamètre, la

tension et la nature de leurs cordes qu'on leur fait rendre les différentes notes de l'échelle musicale.

374. **Lois des vibrations transversales. — Vérifications.** — *Loi des longueurs.* — Pour vérifier cette loi, rappelons que les nombres relatifs de vibrations des notes de la gamme sont

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut.*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Cela posé, si l'on fait vibrer la corde du sonomètre d'abord dans son entière longueur, puis en lui donnant, à l'aide du chevalet mobile, des longueurs qui soient en raison inverse de ces rapports, c'est-à-dire 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{15}$ et $\frac{1}{2}$, on obtient successivement toutes les notes de la gamme : ce qui prouve la première loi.

Loi des diamètres. — On vérifie cette loi en tendant également sur le sonomètre deux cordes de même substance, dont les diamètres soient, par exemple, 3 et 2. Or, en les faisant vibrer, la deuxième donne la quinte de la première : ce qui fait voir qu'elle fait 3 vibrations pendant que la première en fait 2.

Loi des tensions. — Ayant placé sur le sonomètre deux cordes identiques, on les tend par des poids qui soient entre eux comme 4 et 9. Or la deuxième donne encore la quinte de la première; d'où l'on conclut que leurs nombres de vibrations sont entre eux comme 2 est à 3, c'est-à-dire comme les racines carrées des tensions. Si les deux poids étaient entre eux comme 16 et 25, on obtiendrait la tierce majeure, ou $\frac{5}{4}$.

Loi des densités. — On fixe sur le sonomètre deux cordes de même rayon, mais de densités différentes d et d'. Leur ayant donné la même tension, on promène sous la plus dense le chevalet mobile jusqu'à ce qu'elle soit à l'unisson avec l'autre corde. Soient alors l et l' les longueurs de ces deux cordes qui rendent la même note n, on trouve que le rapport $\frac{l}{l'}$ est égal à $\sqrt{\frac{d}{d'}}$. Or soit n' la note que rendrait la corde la plus dense si on lui donnait la même longueur l qu'à l'autre corde; il est facile de déterminer n' d'après la loi des longueurs ; on doit avoir $\frac{n'}{n} = \frac{l'}{l}$. Or l'expérience vient de donner $\frac{l'}{l} = \sqrt{\frac{d'}{d}}$; donc on a $\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{d}{d'}}$.

375. **Nœuds et lignes nodales. — Sons harmoniques des cordes.** — Lorsqu'un corps sonore vibre, non seulement il vibre dans son ensemble, mais il se divise généralement en un certain nombre de parties aliquotes, dont chacune est animée de vibrations qui lui sont propres. Entre ces portions vibrantes,

il existe des points ou des lignes *relativement fixes*. Ce sont ces points et ces lignes qu'on désigne sous les noms de *nœuds* et de *lignes nodales*. Les parties vibrantes comprises entre deux lignes nodales ou deux nœuds consécutifs se nomment *concamérations*. Le milieu d'une concamération s'appelle un *ventre de vibration :* c'est là que les vibrations atteignent leur maximum d'amplitude.

Les cordes vibrantes présentent des exemples curieux de nœuds et de ventres quand on ne fait vibrer qu'une partie aliquote de leur longueur, c'est-à-dire un tiers, un quart, un cinquième. Pour cela, on fixe la corde à ses deux bouts et l'on fait glisser dessous un petit chevalet, en l'arrêtant successivement au tiers, au quart, au cinquième de la corde. Le chevalet étant au tiers, comme le représente la figure (407, I), on fait vibrer la portion BD avec un archet

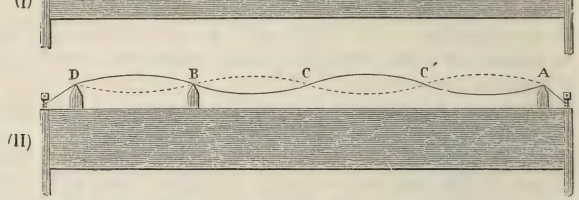


Fig. 407.

l'autre portion AB se subdivise alors spontanément en deux parties AC et CB, qui vibrent séparément, le point C demeurant sensiblement fixe. En effet, en plaçant de petits chevrons de papier, l'un en C, un autre entre B et C, un troisième entre C et A, celui qui est en C n'éprouve qu'un léger ébranlement, tandis que les deux autres sont projetés au loin. Il y a donc un nœud au premier point et des ventres aux deux autres. Si le chevalet B est au quart de la corde, il se produit entre A et B deux nœuds et trois ventres (fig. 407, II) ; s'il est au cinquième, il se forme entre les mêmes points trois nœuds et quatre ventres, et ainsi de suite.

Lorsqu'une corde un peu longue vibre dans son entier, une oreille exercée distingue, outre le son fondamental, les *harmoniques* 2, 3, 4, 5, c'est-à-dire l'octave aiguë du son fondamental, la quinte de l'octave, la double octave et la tierce majeure.

Le même phénomène se produit dans tous les corps vibrants, ainsi qu'on le verra bientôt dans les tuyaux sonores (380). La production de ces harmoniques est une conséquence directe de la subdivision spontanée du corps sonore en concamérations plus ou moins nombreuses.

376. **Vibrations longitudinales des cordes.** — On a déjà vu que, pour déterminer dans une corde tendue des vibrations longitudinales, on la frotte dans le sens de sa longueur avec un morceau de drap saupoudré de colophane. Les lois des vibrations longitudinales des cordes ont été trouvées par le calcul. Il y en a qui sont analogues aux lois des vibrations transversales, et qui sont résumées par une formule analogue à la formule précédente :

$$n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{qE}{\pi d}}.$$

Dans cette formule les coefficients n, r, l, g et d ont la même signification que dans la formule des vibrations transversales, et E représente le *coefficient d'élasticité* de la corde. On nomme ainsi le *poids par lequel il faudrait tendre la corde pour qu'elle s'allongeât d'une quantité égale à elle-même* (allongement qui ne peut jamais se réaliser, la rupture ayant lieu bien auparavant). Ce coefficient étant toujours un nombre considérable, il en résulte que la fraction $\frac{gE}{\pi d}$ est beaucoup plus grande (toutes choses égales d'ailleurs) que la fraction $\frac{gP}{\pi d}$ et que, par suite, les vibrations longitudinales d'une corde sont beaucoup plus rapides que ses vibrations transversales : les sons rendus par une corde qui vibre *longitudinalement* sont donc *beaucoup plus aigus* que les sons rendus quand elle vibre *transversalement*.

CHAPITRE V

VIBRATIONS DE L'AIR DANS LES TUYAUX SONORES.

377. **Tuyaux sonores : Définitions.** — Dans les divers appareils décrits jusqu'ici, le son résulte des vibrations des corps solides que nous avons appelés *corps sonores;* l'air n'en est que le véhicule. Pour les sons rendus par les instruments à vent, c'est la colonne d'air contenue dans leurs tuyaux qui seule est le corps sonore. Cela résulte de ce fait d'expérience que *la matière des tuyaux est sans influence sur le son des instruments à vent; il est le même pour des tuyaux de dimensions égales, mais de substances différentes* (*bois, cristal ou métal*) ; *le timbre seul est modifié.*

On nomme en général *tuyaux sonores* des tubes, à parois résistantes, dans lesquels on produit des sons en faisant vibrer la colonne d'air qui y est contenue.

Si l'on ne faisait que souffler dans les tuyaux, il n'y aurait pas de son, mais seulement un mouvement progressif continu de l'air. Pour qu'un son se produise, il faut, par un moyen quelconque, exciter dans l'air une succession rapide de condensations et de raréfactions qui se communiquent à toute la colonne d'air. De là la nécessité de donner au tuyau sonore une *embouchure*, c'est-à-dire une ouverture de forme convenable pour que l'air qu'on y insuffle n'y puisse entrer que par intermittences, et non d'une manière continue. D'après la disposition adoptée pour mettre ainsi l'air en vibration, les tuyaux sonores se divisent en deux catégories, les *tuyaux à bouche* et les *tuyaux à anche.*

378. **Tuyaux à bouche : Description** et **Jeu.** — Dans les tuyaux à bouche, toutes les parties de l'embouchure sont fixes. Ces tuyaux sont de bois ou de métal, prismatiques ou cylindriques, et toujours d'une grande longueur par rapport à leur section.

La figure 408, I, représente, en perspective, un tuyau à bouche et la figure 408, II, en montre une coupe longitudinale. Dans ce tuyau, la partie inférieure P*i*, par laquelle arrive l'air, est le *pied;* celui-ci sert à fixer le tuyau sur une soufflerie. A sa sortie du pied, l'air passe dans une fente étroite *i*, qu'on appelle

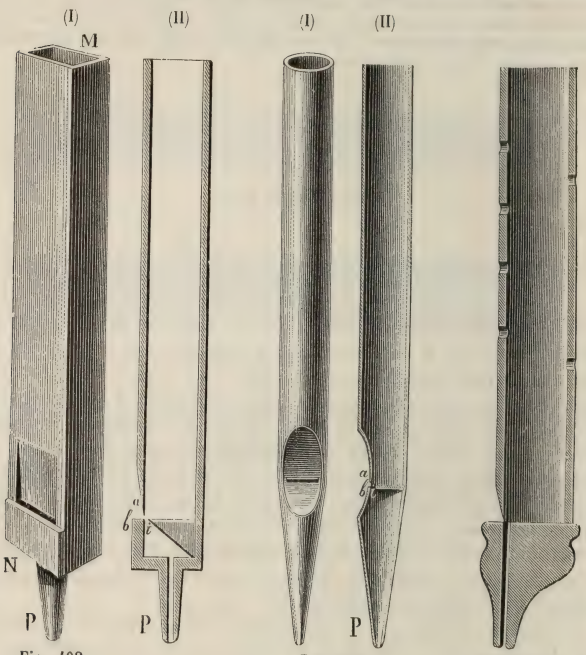


Fig. 408. Fig. 409. Fig. 410.

la *lumière*. En regard de celle-ci est pratiquée, dans la paroi opposée, une ouverture transversale qui est la *bouche;* son bord *a*, taillé en biseau, est la *lèvre supérieure*, et le bord *b* la *lèvre inférieure*.

Le courant d'air qui passe par la lumière se brise contre la lèvre supérieure, s'y comprime, et, par un effet d'élasticité, réagit sur le courant qui continue d'arriver et l'arrête; mais cet arrêt n'a lieu que pendant un temps très court, parce que, l'air s'échappant par la bouche, le courant qui vient du pied reprend aussitôt, et ainsi de suite, pendant toute la durée de l'insufflation. De là des pulsations qui se transmettent à l'air dans le tuyau et y font naître une suite de demi-ondes sonores, alternativement condensées et dilatées. Ces ondes sont d'autant plus rapides que la vitesse du courant est plus grande et que la lèvre

supérieure est plus rapprochée de la lumière. Pour que le son soit pur, il y a un certain rapport à établir entre les dimensions des lèvres, l'ouverture de la bouche et la grandeur de la lumière. Enfin, le tuyau doit avoir une grande longueur par rapport à sa section.

Dans la *flûte traversière*, l'embouchure consiste en une simple ouverture latérale circulaire. C'est par la disposition qu'on donne aux lèvres que le courant d'air vient se briser contre les bords de cette ouverture. Il en est de même pour la *flûte de Pan* et pour une clef forée avec laquelle on siffle.

La figure 409, I, représente, en perspective, l'embouchure d'un tuyau cylindrique fort en usage dans les jeux d'orgue et la figure 409, II, en montre une coupe longitudinale. Les mêmes lettres indiquent les mêmes pièces que dans la figure 408, II.

La figure 410 représente en coupe l'embouchure du sifflet et du flageolet, laquelle a beaucoup de rapport avec les précédentes.

379. **Tuyaux à anche : Description** et **Jeu.** — Dans ces tuyaux, la colonne d'air est ébranlée à l'aide de lames élastiques qu'on nomme *anches*, et qui sont de deux espèces, l'*anche battante* et l'*anche libre*.

Anche battante. — Ce petit appareil se compose d'une pièce de bois ou de métal *a* (fig. 411), qu'on nomme la *rigole*, et qui est creusée en forme de cuiller dans le sens de sa longueur. Elle est fixée à une espèce de bouchon K percé d'un trou qui fait communiquer la cavité de la rigole avec un long tuyau T. La rigole est recouverte d'une mince lame de laiton *l*, qu'on nomme la *languette*. Celle-ci, dans sa position ordinaire, est légèrement écartée des bords de la rigole; mais, étant très flexible, elle peut s'en rapprocher facilement et la fermer. Enfin, un fil de fer *br*, qu'on désigne sous le nom de *rasette*, s'applique par sa partie inférieure, qui est recourbée, sur la languette, et règle son écartement de la rigole. De plus, en enfonçant plus ou moins la rasette, on raccourcit ou l'on allonge la partie vibrante de la languette, ce qui permet d'augmenter ou de diminuer le nombre de ses vibrations.

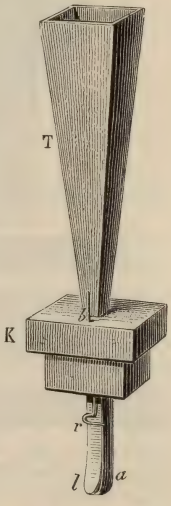


Fig. 411.

L'anche est adaptée au haut d'un tuyau rectangulaire KN, qui est le *porte-vent* (fig. 412). Ce tuyau est fixé sur le sommier d'une soufflerie. Dans les cours de physique, pour laisser voir les vibrations de la languette, les parois du porte-vent, dans la partie qui correspond à l'anche, sont de verre; c'est cette disposition qui est représentée dans la figure.

Lorsqu'on fait arriver l'air dans le porte-vent, il passe d'abord entre la languette et la rigole pour s'échapper par le tuyau T; puis, la vitesse du courant s'accélérant, la languette vient frapper les bords de la rigole, et, la fermant, empêche le courant de passer. Puis, en vertu de son élasticité, la languette revient sur elle-même, est entraînée de nouveau aussitôt que le courant passe, et ainsi de suite, en sorte que, l'air ne passant que par les intermittences du porte-vent dans le tuyau T, il se produit dans celui-ci la même série de pulsations que dans les tuyaux à bouche; d'où résulte un son d'autant plus élevé que le courant d'air est plus vif et les vibrations de la languette plus nombreuses.

Anche libre. — Grenié, en 1810, a inventé une espèce d'anche qu'on nomme *anche libre*, parce que la languette, au lieu de battre sur les bords de la ri-

gole, entre dans la rigole en rasant ses bords de manière à osciller du dedans au dehors. La rigole consiste ici en une petite caisse de bois *a* (fig. 413), dont la paroi antérieure est une plaque de laiton. Au milieu de celle-ci est une ouverture longitudinale dans l'intérieur de laquelle est la languette *l*, qui peut s'infléchir librement en avant et en arrière pour livrer passage au courant d'air, qu'elle arrête chaque fois qu'elle rase les bords de la fente. Une rasette *r* sert encore à régler la longueur de la partie vibrante de la languette. L'anche étant placée dans le tuyau KN (fig. 412), lorsqu'un courant d'air arrive dans celui-ci, la languette se trouve pressée, se courbe de dehors en dedans, et livre passage à l'air qui s'échappe par le tuyau T, puis elle revient sur elle-même en vertu de son élasticité : il se produit ainsi une suite d'oscillations qui font que la rigole est successivement ouverte et fermée, et que le courant d'air subit une série d'intermittences comme avec les anches battantes.

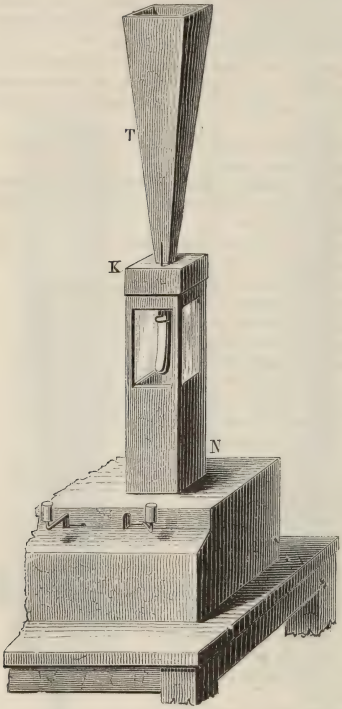


Fig. 412.

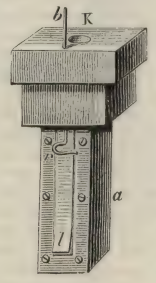


Fig. 413.

380. **Lois expérimentales des tuyaux sonores.** — Les lois qui déterminent les sons rendus par les tuyaux sonores ont été successivement découvertes par le P. Mersenne et par Daniel Bernoulli. Le premier a énoncé la loi des sons rendus par divers tuyaux de dimensions différentes, mais géométriquement semblables; le deuxième a énoncé les lois des sons harmoniques rendus par un même tuyau.

Loi du P. Mersenne (*Loi des tuyaux semblables*). — *Deux tuyaux*

semblables rendent des sons dont les nombres de vibrations sont en raison inverse des dimensions homologues.

Par exemple, si l'on fait parler successivement deux tuyaux semblables (fig. 414) dont les dimensions homologues sont dans

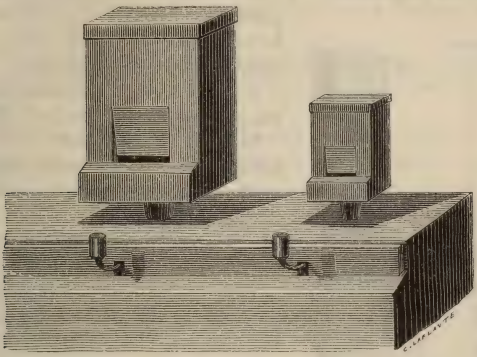


Fig. 414.

le rapport $\frac{1}{2}$, le plus petit rendra un son à l'octave aiguë du son rendu par le plus grand.

Lois de Bernoulli. — Daniel Bernoulli a reconnu le premier le fait suivant : *Un même tuyau peut rendre successivement des sons de plus en plus élevés à mesure qu'on accélère le courant d'air qui le fait parler.*

Pour le démontrer, on fait usage d'un long tube de verre fixé à l'une des embouchures décrites ci-dessus, qu'on a munie d'un robinet afin de régler le courant d'air (fig. 415). Ce tuyau étant fixé sur une soufflerie, en ménageant le vent, on lui fait d'abord rendre le son fondamental, c'est-à-dire le son le plus grave. Puis, on force le vent en ouvrant davantage le robinet et en pesant avec la main sur la tige T de la soufflerie (fig. 397) : on obtient alors des sons de plus en plus élevés, qu'on appelle les *sons harmoniques* ou les *harmoniques* du son fondamental. En opérant ainsi, soit avec des *tuyaux* ouverts par l'extrémité opposée à l'embouchure, soit avec des *tuyaux fermés*, on vérifie les lois suivantes.

Cas des tuyaux ouverts. — 1° *Loi des harmoniques. — Un même tuyau ouvert peut rendre une suite de sons harmoniques dont les nombres de vibrations sont entre eux comme la série des nombres naturels.*

Cela veut dire que, si l'on représente par 1 le son fondamental, les sons qui viennent après lui sont successivement 2, 3, 4, 5, 6, 7... : c'est la série complète des harmoniques du son fondamental.

2° *Loi des longueurs.* — Pour des tuyaux semblables, mais inégaux, *les nombres des vibrations des harmoniques de même ordre sont en raison inverse des longueurs.*

Cette loi n'est évidemment qu'un cas particulier de celle du P. Mersenne.

Cas des tuyaux fermés. — 1° *Loi des harmoniques. — Un même tuyau fermé peut rendre une suite de sons harmoniques dont les nombres de vibrations varient comme la série des nombres impairs.*

Cela veut dire que, si l'on représente par 1 le nombre des vibrations du son fondamental, ceux des autres sons rendus seront représentés par 3, 5, 7.... C'est uniquement la série des harmoniques d'ordre impair, et quelque effort qu'on fasse, on ne peut tirer du tuyau les autres harmoniques.

2° *Loi des longueurs.* — Il y a une première loi qu'on énonce de la même manière que celle des tuyaux ouverts. Il y en a une deuxième qui permet de comparer les sons rendus par un tuyau fermé et par un tuyau ouvert de même longueur. On peut l'énoncer de la manière suivante : *Le son fondamental rendu par un tuyau fermé est le même que le son fondamental rendu par un tuyau ouvert de longueur double.*

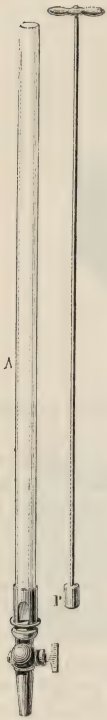


Fig. 415.

Fig. 416.

On vérifie cette dernière loi au moyen d'un tuyau ouvert aux deux bouts, muni en son milieu d'un diaphragme à coulisse, percé d'une ouverture carrée égale à la section du tuyau (fig. 416). Quand le diaphragme est enfoncé, le tuyau est ouvert dans toute sa longueur ; mais il est fermé en son milieu, lorsque le diaphragme est dans la position représentée par le dessin. Dans ce cas, on a le son fondamental d'un

tuyau fermé de longueur VN. Puis, lorsque le diaphragme est rentré, on a le son fondamental d'un tuyau ouvert de longueur double VV'. Or, dans les deux cas, le son est le même.

3° *Corollaires.* — On déduit de cette dernière loi les corollaires suivants, qui auraient pu lui servir d'énoncé :

I. *Le son fondamental* d'un tuyau fermé est à *l'octave grave* d'un tuyau ouvert *de même longueur.*

II. *Pour un harmonique de même rang*, le nombre des vibrations d'un tuyau fermé est *moitié* de celui d'un *tuyau ouvert de même longueur.*

381. **Nœuds et ventres de vibration.** — *Définitions.* — Les lois expérimentales des tuyaux sonores peuvent s'expliquer en quelque sorte expérimentalement, au moyen d'un autre fait expérimental : l'existence des *nœuds* et des *ventres de vibration.* L'expérience prouve que, lorsqu'un tuyau *parle*, il existe dans la colonne d'air vibrante, de distance en distance, des tranches fixes qui sont des *nœuds*, et qu'entre deux nœuds consécutifs il se rencontre toujours une section où le mouvement vibratoire de l'air atteint un maximum : c'est un *ventre.* De plus, le caractère *expérimental* des nœuds, c'est que l'air y subit des *variations continuelles* de pression et de densité, tandis que le caractère des ventres, c'est que l'air y vibre constamment *sans changer* de pression ni de densité.

Démonstration expérimentale. — Plusieurs expériences servent à constater l'existence des nœuds et des ventres de vibration dans les tuyaux sonores, ainsi qu'à en déterminer le caractère mécanique.

1° On colle une membrane de baudruche sur un anneau de carton supporté par trois fils comme un plateau de balance; puis, ayant répandu du sable sur la baudruche, on descend le tout lentement dans un tuyau pendant qu'il parle (fig. 417). Or, de distance en distance, on observe que les grains de sable ne reçoivent aucun mouvement de la baudruche et restent immobiles : c'est là que sont les nœuds, tandis que, dans les positions intermédiaires, les grains de sable sont projetés plus ou moins vivement par les vibrations que la membrane reçoit de l'air.

2° On perce dans les parois d'un tuyau sonore des trous qu'on peut ouvrir ou fermer à volonté à l'aide d'obturateurs mobiles sur deux tourillons (fig. 418) La densité de l'air, comme on l'a dit ci-dessus, étant constante et la même qu'à l'extérieur dans les parties correspondantes aux ventres, lorsqu'on ouvre un trou en regard de ceux-ci, le son n'éprouve aucune modification. Au contraire, en regard des nœuds, où la densité de l'air est variable, dès qu'un trou est ouvert, le son est complètement changé : ce qui résulte de ce que la tranche d'air intérieure, se mettant à la pression atmosphérique, prend une densité constante, et que par suite il se forme un ventre là où il y avait un nœud.

3° Si l'on enfonce lentement dans le tuyau A un piston P fixé à une longue tige (fig. 415), le son monte d'abord; mais, à mesure que le piston descend, on rencontre une ou plusieurs positions où le tuyau rend exactement le même

son qu'avant l'introduction du piston. Or, la couche d'air en contact avec celui-ci étant alors nécessairement immobile, il fallait qu'elle le fût avant, puisqu'on entend le même son. Donc toutes les positions du piston où se reproduit le son primitif sont des nœuds. Si l'on arrête le piston entre deux nœuds, le son est changé, ce qui prouve que la tranche d'air, maintenant immobile, ne l'était pas primitivement.

4° *Flammes manométriques. — Expériences de Kœnig.* — Sur l'une des parois d'un tuyau rectangulaire est une chambre P, dans laquelle arrive du

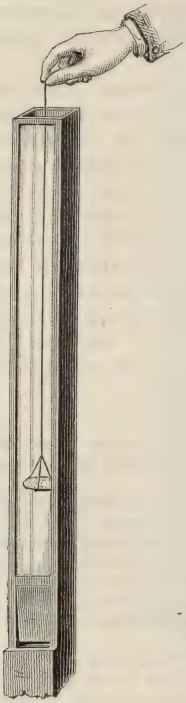


Fig. 417.

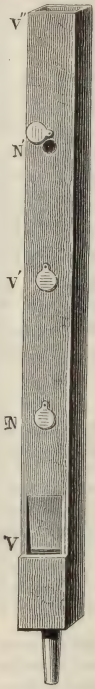


Fig 418.

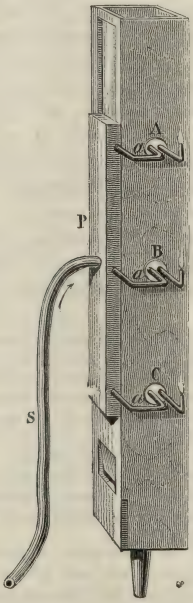


Fig. 419.

gaz d'éclairage par un tuyau de caoutchouc S (fig. 419). De cette chambre partent trois tubes de caoutchouc *a, a, a,* qui conduisent le gaz à autant de capsules fixées dans la paroi antérieure du tuyau, et sur chacune desquelles est appliqué un bec de gaz. Les trois becs étant allumés, si l'on fait rendre d'abord au tuyau le son fondamental, les deux becs A et C brûlent avec calme, tandis que le bec B s'éteint. Or on va voir ci-après (fig. 425) qu'en B il y a un nœud, c'est-à-dire une tranche subissant constamment des variations de pression et

de densité; ce sont ces variations qui font vibrer la membrane de la capsule B et éteignent le bec en le soufflant [1].

Si l'on recommence l'expérience en accélérant le courant d'air, de manière à obtenir le son 2, ce n'est plus le bec B qui s'éteint, mais les deux becs A et C. Cela veut dire qu'en B il y a un ventre, et en A et C des nœuds, comme le montre la figure 424.

Remarque générale. — Dans toutes ces expériences, on constate que, dans un même tuyau, ouvert ou fermé, quel que soit le nombre des nœuds, ils sont toujours également distants entre eux pour un même harmonique rendu et qu'au milieu de la distance de deux nœuds consécutifs il y a toujours un ventre.

382. **Disposition des nœuds et des ventres.** — 1° *Tuyaux fermés* ou *Bourdons.* — Dans ces tuyaux, le fond opposé à l'embouchure est toujours *un nœud*, puisque la couche d'air en contact avec lui est nécessairement immobile et ne peut subir que des variations de densité. A la bouche, au contraire

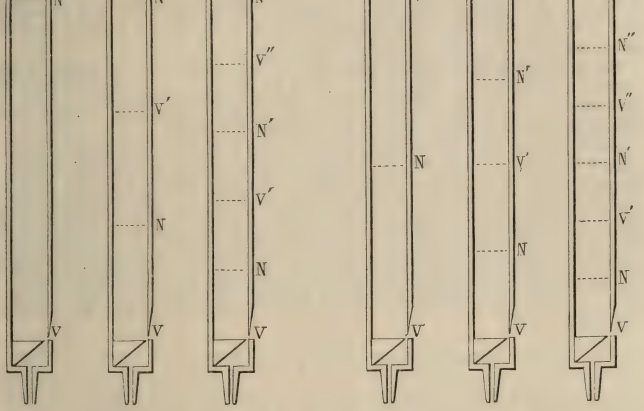


Fig. 420. Fig. 421. Fig. 422. Fig. 423. Fig. 424. Fig. 425.

où l'air conserve une densité constante, celle de l'atmosphère, et où le mouvement vibratoire est maximum, se trouve toujours *un ventre*. Dans tout tuyau fermé il y a donc, au minimum, un nœud N et un ventre V (fig. 420) : c'est alors que le tuyau rend *le son fondamental* et que sa longueur totale est égale *à la demi-onde* (*condensée ou raréfiée*), ou, *au quart de la longueur d'onde complète* (du son fondamental).

Si l'on force le vent, la bouche restant toujours un ventre et le fond un nœud, la colonne d'air se subdivise en trois parties égales VN, NV', V'N' (fig. 421), et il se produit un nœud et un ventre intermédiaires. Or la distance VN, entre un nœud et un ventre consécutifs, étant toujours le quart de la longueur d'onde, celle-ci est devenue trois fois plus petite, et par suite le nombre des vibrations trois fois plus grand, puisque le nombre des

1. C'est à cause des variations de pression que ces flammes subissent dans l'appareil de Kœnig, qu'on les appelle *flammes manométriques*.

vibrations est en raison inverse de la longueur d'onde. Donc, si l'on représente par 1 le son fondamental, on a actuellement le son harmonique 3.

Pour le son harmonique qui vient après celui-ci, il y a deux nœuds et deux ventres entre le fond et la bouche (fig. 422), et la distance VN étant alors cinq fois moindre, on a le son 5, et ainsi de suite. Cela explique pourquoi les tuyaux fermés rendent successivement les sons 1, 3, 5, 7.... (380).

2° *Tuyaux ouverts.* — Dans ces tuyaux, les tranches d'air qui se trouvent à la bouche et à l'extrémité opposée, conservant nécessairement une densité constante (celle de l'air atmosphérique), il y a toujours *un ventre* à chaque extrémité et au moins *un nœud* entre les deux ventres extrêmes (fig. 423). Dans ce cas le tuyau rend le *son fondamental*, dont la longueur d'onde complète (qui est toujours quatre fois la distance d'un nœud à un ventre) *est double de la longueur du tuyau.*

Si l'on force le vent, il se produit deux nœuds et un ventre intermédiaire (fig. 424), et la longueur d'onde étant ainsi deux fois moindre, on a le son 2. Puis, la colonne d'air se subdivisant en trois nœuds et deux ventres intermédiaires (fig. 425), la longueur d'onde est trois fois moindre, d'où résulte le son 3, et ainsi de suite. Cela explique pourquoi les tuyaux ouverts rendent successivement tous les sons 1, 2, 3, 4, 5....

383. **Formules des tuyaux sonores.** — Cette disposition des nœuds et des ventres, dans les tuyaux qui parlent, étant établie par l'expérience, on peut en déduire, non seulement l'explication des lois expérimentales des tuyaux, mais encore des formules générales qui les comprennent toutes.

Nous avons vu que la colonne d'air qui vibre dans un tuyau fermé est toujours partagée par des nœuds et des ventres de vibration en un nombre impair de parties égales entre elles qu'on appelle quelquefois *concamérations.* La concamération est égale au quart de la longueur d'onde complète définie, comme nous l'avons fait précédemment (339). Dans un tuyau ouvert, la colonne d'air vibrante se subdivise en un nombre pair de concamérations. Si donc on représente la longueur du tuyau par L, par λ la longueur de l'onde complète, et par p un nombre entier quelconque, en sorte que $2p$ soit un nombre pair et $2p+1$ un nombre impair, on peut traduire les faits précédents par les relations suivantes :

[1] pour les tuyaux fermés $\quad L = (2p+1)\frac{\lambda}{4}$,

[2] et pour les tuyaux ouverts $\quad L = 2p \times \frac{\lambda}{4}$, ou $L = p \times \frac{\lambda}{2}$.

On a vu que la longueur d'onde λ est liée à la durée de la vibration T et à la vitesse du son (dans le gaz qui vibre) par l'équation de définition $\lambda = VT$. En appelant n le nombre de vibrations par seconde qui caractérise le son, on a évidemment

$$n = \frac{1}{T}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{V}{n}.$$

En remplaçant dans les formules [1] et [2] λ par sa valeur $\frac{V}{n}$, il vient

$$L = (2p+1)\frac{V}{4n} \quad \text{et} \quad L = p\frac{V}{2n}.$$

D'où l'on déduit les relations définitives :

[1 *bis*] pour les tuyaux fermés $\quad n = \frac{(2p+1)V}{4L}$,

[2 *bis*] pour les tuyaux ouverts $\quad n = \frac{pV}{2L}$.

Il serait facile de déduire de ces deux formules toutes les lois de Mersenne et de Bernoulli, énoncées précédemment.

Remarque. — Reste à expliquer la production des ventres et des nœuds de vibration. On ne peut le faire rigoureusement qu'en faisant intervenir le *principe des interférences.* C'est de ce principe qu'on peut déduire une théorie complète des tuyaux sonores.

384. **Interférences sonores. — Principe des interférences.** — Reprenons l'expérience simple qui nous a permis de nous faire une idée nette de la propagation du son dans l'air. Supposons que, au lieu de faire tomber une seule pierre en un point d'une nappe d'eau tranquille, nous en fassions tomber deux en deux points peu éloignés. Chacune d'elles donnera naissance à un système d'ondes circulaires, qui se propagera séparément à la surface de l'eau, comme nous l'avons indiqué précédemment; et ces deux systèmes d'ondes, se rencontrant nécessairement sur leur parcours, produiront par cet entrecroisement des combinaisons de mouvements aussi faciles à observer qu'à expliquer. Chaque point de croisement recevra simultanément deux mouvements, l'un qui est apporté par le premier système d'ondes et l'autre par le second système. Si ces deux mouvements sont de même sens, *ils s'ajoutent;* mais s'ils sont de sens contraire, *ils se retranchent*, et même *ils se détruisent mutuellement*, quand ils sont égaux.

Dans le cas particulier où les deux pierres sont tombées, en O et O′ (fig. 426), en même temps et de la même hauteur, c'est-à-dire où les deux mouvements vibratoires ont commencé au même instant et avec la même amplitude, le point I_0, qui est au milieu de la distance des centres, reçoit toujours de chacun d'eux des mouvements de même sens, et son mouvement vibratoire *sera maximum*; il en sera de même de tous les points de la perpendiculaire $H_0 I_0 K_0$, élevée sur le milieu de la ligne des centres. Mais, à droite et à gauche de cette ligne centrale, on trouvera d'autres points qui seront plus éloignés de l'un des centres de vibration que de l'autre : si la différence de ces distances ou, comme on dit, la *différence de marche*, est *d'un nombre impair* de demi-longueurs d'onde, le mouvement y sera détruit, parce que les ondes circulaires s'y rencontreront toujours avec des vitesses égales et contraires : *l'eau y restera donc en repos;* si la *différence de marche* est *d'un nombre pair* de demi-longueurs d'onde, les ondes circulaires s'y rencontreront, comme sur la ligne centrale, avec des vitesses égales et de même sens, et leurs mouvements s'ajouteront : l'eau y prendra *un mouvement maximum.* Tous les points des deux courbes $H_1 I_1 K_1$, situés de part et d'autre de la ligne centrale, sont dans le premier cas : ils restent perpétuellement en repos, au milieu de l'agitation qui les environne; tous les points des deux courbes $H_2 I_2 K_2$ sont perpétuellement en état d'agitation maximum, comme ceux de la ligne centrale $H_0 I_0 K_0$.

Franges. — Ces lignes, et les autres lignes analogues, obtenues par les intersections successives des différentes ondes circulaires, sont appelées des *franges.* Les cercles noirs de la figure 426 représentent les ondes renflées, et les cercles ponctués représentent les ondes déprimées. Partout où deux cercles de même espèce se coupent, il y a maximum de mouvement : le lieu des points où ce maximum a lieu constitue les *franges de mouvement;* elles sont représentées par des lignes ponctuées $H_0 K_0$, $H_2 K_2$.... Partout où deux cercles d'espèce contraire se coupent, il y a destruction de mouvement : le lieu des points où cette destruction a lieu constitue les *franges de repos;* elles sont représentées par des lignes pleines $H_1 K_1$, $H_3 K_3$. On démontre que les unes et les autres sont des *hyperboles* ayant pour foyers communs les deux centres d'ébranlement O et O′ et pour axes la ligne OO′, puis la frange centrale $H_0 K_0$.

Partout où il y a addition de mouvement ou soustraction de mouvement, on dit en général qu'il y a *interférence* de mouvements. Cette expression s'applique plus particulièrement au cas où, par suite de la soustraction des mou-

vements, il y a *destruction complète* du mouvement ou repos absolu, et le *principe des interférences* consiste en cette proposition curieuse, — conséquence directe de l'analyse précédente, — c'est que *du mouvement ajouté à du mouvement produit du repos.*

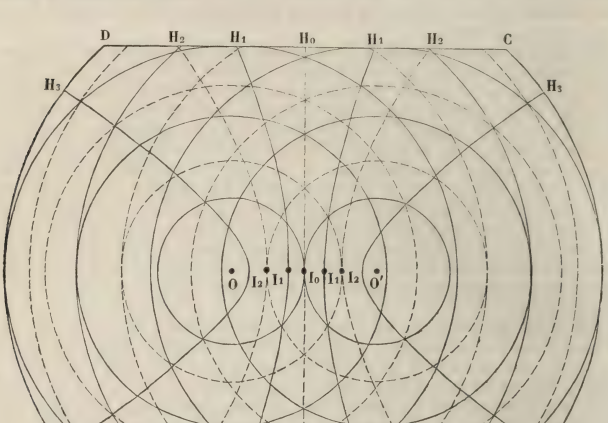


Fig. 426.

385. **Application du principe des interférences aux ondes sonores. — Théorie des tuyaux sonores.** — Si nous passons maintenant du cas des ondes aqueuses circulaires à celui des ondes sonores aériennes, nous verrons les mêmes phénomènes se reproduire dans l'espace, au lieu d'être confinés dans un plan. Deux corps sonores, mis en vibration au même instant, avec la même intensité et avec la même vitesse (c'est-à-dire *à l'unisson*), donnent naissance à deux systèmes d'ondes sphériques, qui se propagent dans l'air de la même manière que les ondes planes précédentes se propageaient à la surface de l'eau. Ces ondes aériennes sont alternativement condensées et dilatées, de telle sorte que, si l'on représente graphiquement l'état vibratoire de l'air à un instant donné, sur un rayon Ox émané de l'un des centres de vibration, on aura la courbe sinueuse *aaaa* de la figure 427, I. Au bout d'un temps $\frac{T}{2}$, égal à la durée d'une vibration simple, l'état vibratoire sur le même rayon sera exactement inverse : il est figuré par la ligne ponctuée *bbbb* de la figure 427, II. Il en sera de même pour les ondes aériennes émanées de l'autre centre de vibration. Ces ondes aériennes *interféreront* nécessairement de la même manière que les ondes aqueuses. Partout où deux ondes condensées ou deux ondes dilatées se rencontreront, il y aura maximum de mouvement : ainsi les mouvements concordants *aaa* (fig. 427, I) et *a'a'a'* (fig. 427, II) donneront le mouvement résultant maximum AAAA (fig. 427, IV). Partout où deux ondes d'espèce

contraire se rencontreront, il y aura, au contraire, destruction de mouvement : ainsi les mouvements discordants *aaa* (fig. 427, I) et *bbb* (fig. 427, II) donneront le mouvement nul, figuré par la droite 0_1x_1 (fig. 427, IV) [1]. On pourra donc énoncer cette curieuse proposition, qui constitue l'application du principe des interférences aux ondes sonores, que *du son ajouté à du son produit du silence.*

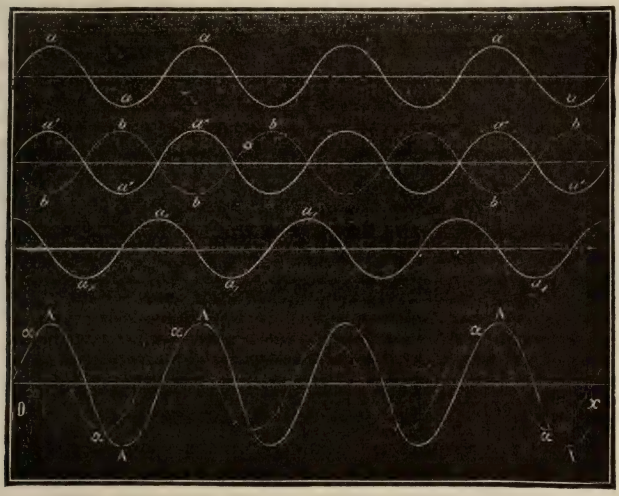


Fig. 427.

Le lieu de l'espace où le mouvement, et par suite le son, est détruit, constitue la *frange silencieuse;* le lieu où le mouvement, et par suite le son, est renforcé, constitue la *frange sonore.* Ici les franges ne sont plus des lignes. La frange centrale est *un plan perpendiculaire* à la ligne des centres sonores, et les franges latérales sont des *hyperboloïdes de révolution*, ayant pour courbes méridiennes des hyperboles analogues à celles qui sont représentées dans la figure 426.

386. **Théorie des tuyaux sonores.** — On a pu vérifier expérimentalement le principe des interférences sonores à l'aide de quelques expériences de cours (Wheatstone, Helmholtz) ; mais la véritable vérification du principe résulte de l'application qu'on peut en faire à la théorie des tuyaux sonores, et à l'explication de certains phénomènes, tels que les *battements* et les *sons résultants.*

1. La courbe *αααα* (fig. 427, IV) représente un cas intermédiaire d'interférence : c'est le mouvement résultant de deux mouvements *aaa* et $a_1a_1a_1$, dont la différence de phase n'est pas un nombre exact de demi-longueurs d'onde.

Existence des nœuds et des ventres de vibration. — Deux espèces d'ondes sonores se propagent dans l'intérieur d'un tuyau sonore qui parle : 1° les ondes *directes*, qui proviennent du son produit à l'embouchure du tuyau; 2° les ondes *réfléchies*, qui proviennent de la réflexion du son, soit sur le fonds solide des tuyaux fermés, soit sur la masse d'air illimitée qui se trouve à l'orifice des tuyaux ouverts. Dans le premier cas, la réflexion des ondes se fait avec un changement de signe dans leur vitesse de vibration ; elle se fait sans changement de signe dans le second cas. Ce système d'ondes réfléchies peut être considéré comme provenant d'un corps sonore fictif identique au corps sonore réel (au même titre que l'image d'un point lumineux est identique à ce point); il peut donc *interférer* avec le système des ondes directes. Il y a donc production de franges silencieuses, qui sont les nœuds, et de franges sonores, qui sont les ventres, et ces franges sont des plans perpendiculaires à l'axe du tuyau.

Quant aux variations de densité et de pression qui caractérisent les nœuds, elles résultent des condensations et des raréfactions successives des ondes, en vertu desquelles les tranches d'air s'approchent et s'éloignent alternativement des nœuds. A l'instant où les ondes marchent les unes vers les autres (fig. 428, I),

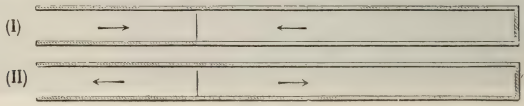


Fig. 428.

il y a condensation; dans l'instant suivant les ondes s'éloignent (fig. 428, II), et il y a dilatation; mais dans les deux cas, les vitesses étant égales et de signes contraires, la tranche de séparation, ou le nœud, est toujours immobile.

Formules des tuyaux. — Non seulement le principe des interférences explique l'existence des nœuds et des ventres de vibration, mais il permet d'en déterminer géométriquement la situation dans la longueur du tuyau. Il n'y a qu'à faire intervenir une condition supplémentaire : c'est que la longueur du tuyau doit être telle, que le plan de l'embouchure du tuyau soit, dans tous les cas, un ventre de vibration. C'est ainsi qu'on trouve les formules (383) qui comprennent toutes les lois des tuyaux.

387. **Battements.** — Le principe des interférences s'applique aussi à l'explication du phénomène des *battements*, découvert par le physicien Sauveur.

Quand deux sons, qui diffèrent très peu de hauteur, sont produits simultanément, on perçoit, outre l'impression désagréable qui résulte de leur dissonnance, des *renforcements* et des *affaiblissements périodiques* très nets. C'est surtout aux renforcements, aux coups de force, qu'on donne le nom de *battements;* mais les affaiblissements sont dus à la même cause, et font partie en quelque sorte du même phénomène.

On a découvert par l'expérience que le nombre de ces battements dépend à la fois de l'intervalle des deux sons et de leur hauteur absolue : *il est égal à la différence des nombres de vibrations* des deux sons. Par exemple, si l'on pro-

duit simultanément la note ut_1 (28 vibrations simples) et une note peu inférieure à l'ut_1 ♯ (faisant 133 vibrations), on aura 5 battements par seconde. Si l'on produisait les mêmes notes à l'octave aiguë, on aurait 10 battements.

Les battements sont dus à l'interférence de deux ondes, de périodes peu différentes mais inégales, correspondant à des sons très voisins. Supposons, par exemple, que l'un d'eux effectue 8 vibrations simples tandis que l'autre en effectue 9. L'état vibratoire de l'air, sur le chemin commun aux deux ondes, pourra être représenté par les deux courbes de la figure 429. Il se produit ici un phénomène analogue à celui de la méthode des coïncidences de Borda : seulement le phénomène actuel est sensible à l'ouïe, au lieu d'être sensible à la vue, comme celui des deux pendules. A l'instant où les mouvements des deux ondes sonores sont exactement opposés, leurs effets se détruisent à peu

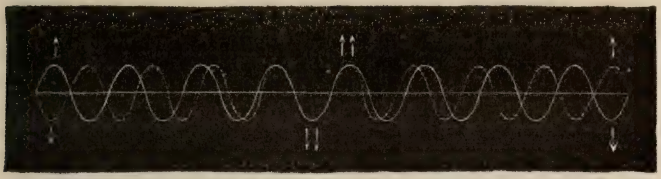


Fig. 429.

de chose près, et il y a un affaiblissement correspondant dans l'intensité totale des deux sons. A partir de cet instant, on voit que les deux ondes se séparent peu à peu; l'une d'elles, celle qui provient du son le plus élevé, prend de l'avance sur l'autre, jusqu'à ce qu'elle se trouve exactement dans la même phase que celle-ci : ce qui arrive lorsque le son correspondant a fait 4 vibrations et demie tandis que l'autre en a fait 4 : à ce moment, il y a *coïncidence* des deux ondes, les effets s'ajoutent et l'intensité totale des deux sons subit un renforcement : il y a un *battement*. Enfin, à partir de cet instant les ondes se séparent de nouveau de plus en plus, jusqu'à se retrouver chacune dans une phase exactement opposée, ce qui a lieu au bout de 4 1/2 vibrations complètes du son le plus aigu et de 4 vibrations du son le moins aigu.

Ces deux états successifs, d'*opposition* et de *coïncidence* des ondes, sont marqués sur la figure 429 par des couples de flèches, tantôt opposées, tantôt juxtaposées, aux points correspondants.

388. **Sons résultants.** — Un autre phénomène qu'on peut expliquer et prévoir par le principe des interférences, c'est celui des *sons résultants*, signalé pour la première fois par le musicien Tartini.

Lorsqu'on produit simultanément deux sons, de hauteur notablement différente, et *de grande intensité*, on entend un son particulier qui diffère à la fois de chacun des sons primaires et de leurs harmoniques. C'est ce qu'on appelle le *son résultant*.

Tantôt ce son a un nombre de vibrations *égal à la différence* des nombres de vibrations des sons primaires, tantôt il a un nombre de vibrations *égal à leur somme*. Dans le premier cas, le son résultant est dit *différentiel;* dans le second cas, il est dit *additionnel*. Théoriquement, il est possible d'entendre les deux sons résultants à la fois.

Ainsi deux notes à l'octave l'une de l'autre peuvent produire un son résultant *différentiel* qui est à l'unisson de la note la plus grave ($2 - 1 = 1$) et un son résultant *additionnel* qui est à la quinte de la note la plus aiguë ($2 + 1 = 3$).

CHAPITRE VI

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SONS. — TIMBRE. — PERCEPTION DES SONS.

389. **Analyse des sons. — Méthode de M. Helmholtz : Résonnance et Résonnateurs.**— C'est M. Helmholtz qui a démontré le premier, en 1863, que la plupart des sons que l'on regardait comme simples, sont composés. Sa méthode est fondée sur la *résonnance*, c'est-à-dire sur la propriété qu'ont les caisses sonores, quand elles sont de dimensions convenables, de vibrer spontanément à l'unisson d'un son donné, et de le renforcer. Les caisses de résonnance employées par M. Helmholtz sont des globes creux, de laiton, dont les dimensions varient de manière qu'ils puissent renforcer toutes les notes de la gamme : c'est ce qu'il a appelé des *résonnateurs*.

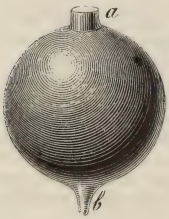


Fig. 430.

Chaque résonnateur est percé, aux deux extrémités d'un même diamètre, de deux trous circulaires (fig. 430) ; à l'un est fixée une tubulure cylindrique *a*, à l'autre une tubulure conique *b*. La hauteur du son avec lequel s'accorde un résonnateur dépend de ses dimensions et de la grandeur de l'ouverture *a*. L'opérateur reçoit le son extérieur par l'orifice *a* tandis qu'il introduit le cône *b* dans l'une de ses oreilles, et qu'il a soin de boucher l'autre. En expérimentant ainsi, l'oreille est sourde pour tout autre son que celui du résonnateur, tandis que ce son est perçu distinctement dès qu'il est produit, quoique faible et mélangé avec d'autres harmoniques. De là un procédé très sensible pour reconnaître un son parmi un grand nombre d'autres.

C'est avec des résonnateurs diversement accordés que Helmholtz a décomposé les sons des différents instruments de musique et de la voix humaine et même certains bruits.

390. **Résonnateurs** et **Appareil analyseur de Kœnig.**— Le résonnateur de M. Helmholtz a été perfectionné par M. Kœnig, ainsi que la méthode d'analyse des sons. Le résonnateur de Kœnig est cylindrique et muni d'un tirage, comme une lunette; l'extrémité qui reçoit le son peut se tirer plus ou moins, de manière à faire varier à volonté le volume du gaz vibrant (fig. 431). Le son de-

venant alors de plus en plus grave, un même résonnateur peut servir à renforcer successivement plusieurs notes. Sur l'extrémité conique s'applique un tuyau de caoutchouc qui sert à conduire les vibrations de l'air du résonnateur à des flammes manométriques.

L'application successive à l'oreille de résonnateurs différents était une opération lente et pénible dans la méthode de M. Helmholtz. C'est pourquoi Kœnig a imaginé un appareil dans lequel une série de résonnateurs agissent sur des flammes manométriques : les sons deviennent alors *visibles* et ils peuvent être montrés à un nombreux auditoire.

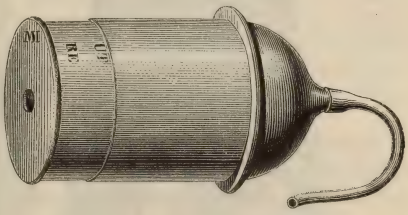


Fig. 431.

Cet appareil consiste en un châssis de fonte XY (fig. 432), sur lequel sont fixés, en deux séries parallèles, quatorze résonnateurs accordés pour donner toutes les notes de fa_1 à ut_3, c'est-à-dire quatre octaves et demie : les notes les plus élevées sont les harmoniques supérieurs des premières. A droite des résonnateurs est une chambre C, qui reçoit le gaz d'éclairage par un tuyau de caoutchouc D, et sur laquelle sont montés huit becs munis chacun d'une capsule manométrique (381, 4°). Chaque bec est en communication avec la chambre C par un tuyau de caoutchouc spécial, tandis que derrière l'appareil d'autres tuyaux relient chaque bec à l'un des résonnateurs. Enfin, à droite des becs est un système de miroirs tournants AB qui permet de manifester la dentelure des flammes vibrantes.

Supposons, par exemple, que le plus grand résonnateur à gauche soit accordé pour renforcer le son 1 et les sept autres avec les harmoniques de ce son, et que tous les huit soient en communication chacun avec un bec de gaz. Qu'on produise alors le son 1 devant l'appareil : si ce son est simple, le résonnateur inférieur parle seul, et la flamme correspondante est seule dentelée ; mais si le son fondamental est accompagné d'un ou de plusieurs de ses harmoniques, les résonnateurs consonnants parlent en même temps, ce qu'on reconnaît aux dentelures de leurs flammes. Le son produit se trouve donc ainsi analysé.

391. **Résultats généraux. — Cause du timbre.** — A l'aide de ces appareils, M. Helmholtz a d'abord démontré l'existence de

sons simples, et puis analysé la composition des *sons composés*.

1° Les sons simples sont ceux qui résultent d'une seule espèce de vibrations, sans aucun mélange de sons harmoniques ni de sons accessoires. Un diapason, qu'on fait vibrer à l'orifice d'un

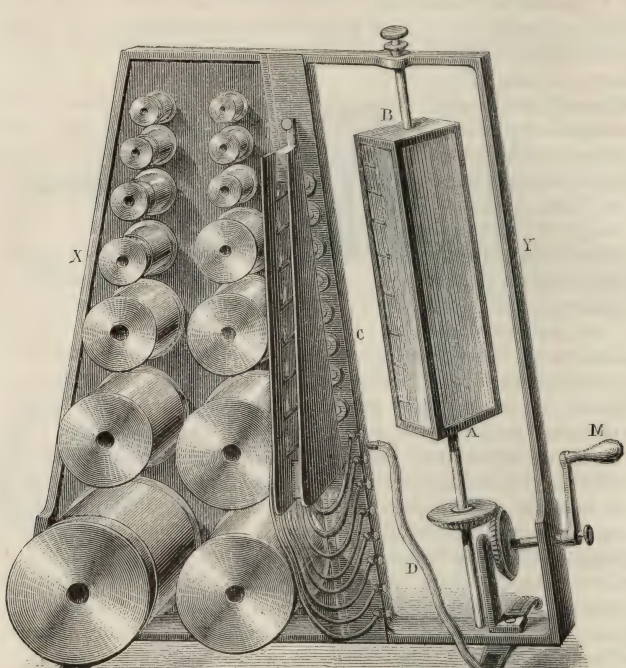


Fig. 452.

tuyau sonore, rend un son simple. Une flûte, la voix humaine prononçant la syllabe *ou*, rendent des sons *presque* simples, parce que les harmoniques accompagnant le son fondamental ont une faible intensité. Le caractère physique des sons *simples*, c'est que, s'ils diffèrent entre eux par la hauteur et par l'intensité, ils *ne se*

distinguent pas sensiblement par leur *timbre;* seuls les sons *composés* ont des *timbres nettement distincts.*

2° Parmi les sons composés, M. Helmholtz a établi deux catégories bien distinctes. Les uns ne sont pas formés par la superposition d'harmoniques véritables : leur son fondamental est accompagné de sons partiels, non harmoniques, qui sont plus ou moins persistants, plus ou moins réguliers ; tels sont ceux qu'on tire des plaques métalliques, des cloches de verre ou de métal. Les sons composés de cette catégorie *sont dépourvus du caractère musical.* Ceux au contraire qui sont constitués par un son fondamental, accompagné d'harmoniques proprement dits, possèdent à un haut degré le *caractère musical.* Tels sont ceux que rendent les divers instruments de musique.

3° Pour les sons musicaux proprement dits, M. Helmholtz a démontré que les différences de timbre sont dues non seulement à la multiplicité plus ou moins grande des harmoniques supérieurs, mais à leur degré d'intensité plus ou moins élevé.

4° *Timbres des voyelles.* — En appliquant sa méthode d'analyse aux sons émis par la voix humaine, il a constaté dans ceux-ci l'existence des harmoniques : ce sont donc des sons musicaux. Les 6 ou 8 premiers harmoniques sont nettement perceptibles dans chacune des *voyelles* émises par la bouche humaine : mais ces divers harmoniques prennent des degrés d'intensité divers suivant la forme qu'affecte la cavité buccale en les prononçant ; or cette forme est déterminée par la voyelle qu'on veut prononcer. Ainsi la différence d'intonation des diverses voyelles tient à ce qu'elles ont chacune un timbre spécial, et ce timbre est déterminé par la prédominance de tel ou tel harmonique, de hauteur définie.

Par exemple, la voyelle *a* est caractérisée par la prédominance de la note $si_4\flat$. Quand on prononce la voyelle *a*, à une hauteur quelconque, c'est le *si* ♭ qui est le son dominant parmi les harmoniques rendus, dans cette émission, par la cavité buccale.

Le son caractéristique de la voyelle *o*, c'est le $si_3\flat$; celui de la diphthongue *ou* est le fa_2.

Quelques autres voyelles ou diphthongues sont caractérisées par deux harmoniques prédominants, l'un aigu, l'autre grave. Ainsi, pour la voyelle *e*, ce sont le fa_3 et le $si_5\flat$, simultanés ; pour *i*, ce sont fa_2 et $ré_6$; pour *u*, fa_2 et sol_5 ; pour la diphthongue *ai*, ce sont $ré_4$ et sol_5 et pour *eu*, fa_3 et ut_5 [1].

1. Ces indications ne sont exactes qu'autant qu'on suppose ces voyelles prononcées par un Allemand du Nord, comme dans les expériences de M. Helmholtz.

392. **Synthèse des sons.** — Helmholtz ne s'est pas borné à décomposer les sons, il a vérifié les résultats de son analyse par la synthèse, c'est-à-dire qu'il a reproduit un son donné, par la superposition des sons simples qu'il y avait découverts à l'aide de l'appareil analyseur. Il s'est servi, pour opérer cette synthèse, d'un autre appareil, très ingénieux, mais assez compliqué, et dont la description ne peut trouver place dans un traité élémentaire.

PERCEPTION DES SONS.

393. **Description de l'oreille.** — La perception des sons est faite par le sens de l'*ouïe*, au moyen d'un organe spécial appelé *oreille*. L'oreille est représentée dans son ensemble par la figure 433, et dans ses détails par les figures 434 et 435.

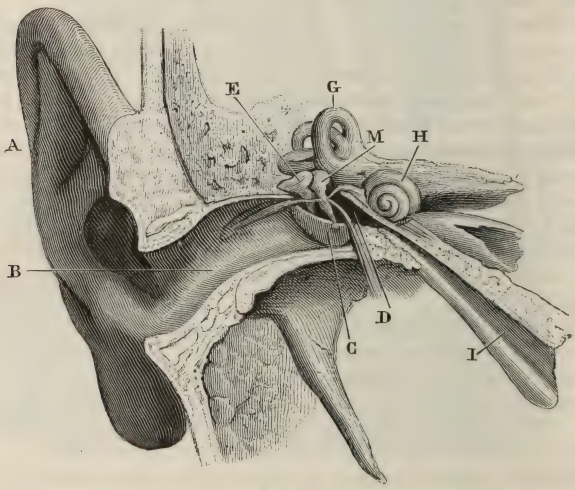


Fig. 433.

On peut y distinguer trois régions : l'*oreille externe*, l'*oreille moyenne* et l'*oreille interne*.

Oreille externe. — Elle se compose de trois parties :

1° Le *pavillon* A, membrane cartilagineuse, externe : c'est ce qu'on appelle oreille dans le langage ordinaire ;

2° et 3° Le *conduit auditif* B, qui part de la *conque*, ou fond évasé du pavillon, pour se terminer à l'*oreille moyenne* par la *membrane du tympan* C.

Oreille moyenne. — Elle est constituée par la *caisse du tympan* et ses accessoires.

Le tympan C est une membrane mince et délicate, qui est tendue obliquement sur l'axe du conduit auditif. Elle forme l'un des fonds d'une espèce de tambour sonore, appelé *caisse du tympan*, dont l'autre fond est une membrane élastique.

Cette caisse est munie de quatre ouvertures : la première est à sa partie supérieure; la deuxième, au bas du tympan, sert d'orifice à un canal, appelé *trompe d'Eustache*, qui fait communiquer

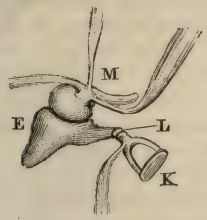


Fig. 434.

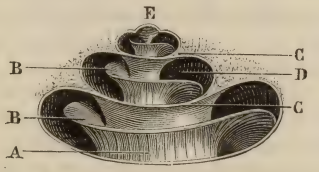


Fig. 435.

l'oreille moyenne avec l'air extérieur, par l'intermédiaire des *fosses nasales*. Les deux autres sont pratiquées dans la membrane qui est vis-à-vis du tympan et sont appelées, à cause de leurs formes respectives, l'une *fenêtre ronde* et l'autre *fenêtre ovale*. Les deux fonds du tambour sont reliés par une suite de petits os, la *chaîne des osselets* (fig. 434). L'un, le *marteau* M, s'appuie d'une part sur le tympan et de l'autre sur l'*enclume* E; puis viennent l'*os lenticulaire* L et l'*étrier* K dont la base est unie à la membrane de la *fenêtre ovale*. Deux petits muscles servent à mouvoir le marteau et l'étrier et à les appuyer plus ou moins sur les membranes voisines.

Oreille interne. — C'est la partie essentielle de l'organe, et elle est protégée par les parties les plus dures de l'os temporal, appelées *rocher*. Elle est composée de trois cavités : à la partie inférieure, le *limaçon* H (que la figure 435 représente en coupe); au milieu, le *vestibule*, et en haut les canaux *semi-circulaires* G. Leur ensemble constitue le *labyrinthe*, qui est tapissé intérieurement d'une membrane que baigne un liquide gélatineux. C'est dans ce liquide que viennent plonger les innombrables terminaisons du nerf

acoustique. M. de Corti a démontré qu'il y en avait environ trois mille; on les appelle *fibres de Corti*.

394. **Mécanisme de l'audition.** — Le pavillon recueille les ondes sonores venues de l'extérieur, les rassemble, les réfléchit et les dirige dans le conduit auditif.

Le conduit auditif externe transmet les ondes, en les renforçant, à la membrane du tympan. Celle-ci se met à vibrer et ses vibrations sont transmises par la chaîne des osselets jusqu'à l'oreille interne. Non seulement les osselets transmettent les vibrations plus fidèlement que ne le ferait un corps gazeux, mais ils règlent, en quelque sorte, la sensibilité des membranes de la caisse sonore en les tendant plus ou moins, suivant l'intensité ou l'acuité des sons extérieurs. Enfin la perception définitive du son se fait par l'intermédiaire des trois mille filets du nerf acoustique. M. Helmholtz admet que chaque fibre, accordée comme un petit résonnateur pour une note particulière, ne vibre qu'à l'unisson de cette note, et est sourde par toutes les autres. Chaque son simple ne fait donc vibrer qu'une seule fibre, tandis que les sons composés en font vibrer plusieurs. C'est par suite de cette perception propre des sons simples par chacune des fibres de Corti que l'oreille distingue un son entre plusieurs autres et perçoit, dans leur ensemble, les sons les plus complexes et les plus riches en harmoniques.

Remarque. — Les divers organes qui constituent l'oreille sont utiles à divers degrés pour rendre la sensation plus complète et le sens de l'ouïe plus délicat; mais il n'y en a qu'un parmi eux qui soit indispensable : c'est l'*oreille interne* et même le *vestibule*. Ainsi la perte ou la déchirure du *tympan* et la suppression des *osselets* n'entraînent pas la surdité complète.

Chez les crustacés et chez les céphalopodes [1], le sens de l'ouïe n'a pas d'autre organe que le *vestibule*. Les autres parties de l'oreille interne n'apparaissent successivement que chez les êtres de plus en plus élevés dans l'échelle animale, et on ne les trouve au complet que chez l'homme.

1. Chez les autres mollusques, il n'y a pas de sens auditif. On ne connaît pas non plus d'organe auditif chez les *insectes*; mais on sait que la fonction existe.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I

MATIÈRE, MOUVEMENT ET FORCES

Ch. I. — *Notions préliminaires.* 1
Matière, corps, propriétés des corps. 1
Substances simples, substances composées. 1
Phénomènes. 2
Phénomènes physiques, phénomènes chimiques 2
Objet de la physique. 3
Méthode physique ou méthode expérimentale 3
Lois physiques, théories physiques. 4
Ch. II. — *Propriétés générales de la matière.* 5
États physiques des corps 5
Classification des propriétés de la matière.. 6
Inertie 7
Étendue, impénétrabilité 7
Compressibilité 8
Divisibilité. 9
Atomes.. 9
Molécules.. 10
Pores moléculaires. 11
Porosité, pores sensibles, perméabilité.. 12
Éther.. 12
Mouvements moléculaires de la matière 13
Constitution de la matière 14
Anciens fluides impondérables. — Anciens agents physiques. — Physique nouvelle. 15
Divisions de la physique. 16
Ch. III. — Mécanique. — *Notions de cinématique.* 17
Divisions de la mécanique 17
Définitions préliminaires. 18
Mouvement uniforme. 18
Mouvement varié. 20
Mouvement rectiligne uniformément varié. 23
Accélération dans un mouvement varié quelconque, mais rectiligne. 25
Mouvement absolu, mouvement relatif. — Mouvement apparent. 26
Composition des mouvements. . . 27
Principe du mouvement relatif. . 27
Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes 28
Composition de plusieurs mouvements rectilignes et uniformes. 28
Règles du polygone des vitesses et du parallélépipède des vitesses . 29
Décomposition d'un mouvement rectiligne uniforme. 30
Composition des mouvements rectilignes uniformément variés, sans vitesses initiales. 31
Composition de deux mouvements rectilignes, l'un uniforme et l'autre uniformément accéléré, sans vitesse initiale 32
Accélération dans un mouvement varié curviligne 34
Mouvement circulaire uniforme. . 36
Ch. IV. — Mécanique. — *Notions de statique* 37
Forces. 37
Équilibre. — Statique 38
Mesure des forces. — Dynamomètre. 38
Représentation des forces. 39
Composition et décomposition des forces. 39

Résultante et composantes. . . . 39
Composition des forces concourantes 40
Composition et décomposition des forces parallèles. 43
Théorème général des moments.. 45
Expression analytique des moments d'une force par rapport à trois axes rectangulaires. 46
Composition des couples. 47
Équilibre des forces appliquées à un point matériel. 48
Équilibre des couples appliqués à un corps solide libre. 48
Équilibre des forces appliquées à un corps solide libre. 49
Équilibre des forces appliquées à un corps solide gêné. 50
Équilibre d'un système quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide libre. 51
Détermination du centre des forces parallèles.. 51

Ch. V. — Mécanique. — *Notions de dynamique*. 52

Définitions. 52
Principe de l'inertie. 53
Principe du mouvement relatif. . 54
Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. 54
Théorèmes fondamentaux.. . . . 54
Masse.. 56
Expression d'une force quelconque.. 57
Quantité de mouvement. — Impulsion.. 57
Proportionnalité des forces aux quantités de mouvement. . . . 58
Travail et force vive.. 59
Travail mécanique d'une force constante en grandeur et en direction. 59
Travail d'une force variable en grandeur et en direction.. . . . 61
Force vive, puissance vive. — Moments d'inertie.. 62
Théorème du travail ou des forces vives.. 64
Transformation du travail en force vive et de la force vive en travail. 65
Énergie actuelle, énergie potentielle. — Énergie totale. 66
Principe de la conservation de l'énergie. 67
Unités métriques d'énergie. . . . 68
Transmission du travail dans les machines.. 69

LIVRE II

PESANTEUR

MOUVEMENT ET ÉQUILIBRE DES CORPS PESANTS

Ch. I. — *Direction et nature de la pesanteur*.. 73

Définition de la pesanteur. 73
Direction de la pesanteur. — Fil à plomb. 73
Verticale. — Définitions accessoires 76
Nature de la pesanteur. — Définition du poids et du centre de gravité des corps. 78

Ch. II. — *Lois de la chute des corps*. 79

Énoncé des lois. 79
Vérification expérimentale des lois. 80
Plan incliné. 82
Machine d'Atwood. 84
Autre usage de la machine d'Atwood.. 89
Appareil de Morin. 90
Conclusions.. 94

Ch. III. — Applications des lois de la chute des corps. — *Centres de gravité. — Équilibre des corps solides pesants. — Mouvement des projectiles dans le vide. — Propriétés mécaniques du plan incliné. — Mouvement pendulaire ou oscillatoire. — Mouvement vibratoire*. . . . 96

Centre de gravité des corps homogènes.. 96
Centre de gravité des solides géométriques 97
Centres de gravité des surfaces et des lignes. 100

Équilibre des solides pesants. . . 101
Détermination empirique du centre de gravité des corps solides. 103
Mouvement des projectiles dans le vide. 104
Propriétés mécaniques du plan incliné. 113
Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe. 116
Mouvement pendulaire. 118
Autre définition du mouvement pendulaire de petite amplitude. 123
Mouvement vibratoire. 124

Ch. IV. — *Détermination de l'intensité de la pesanteur. — Pendule. — Expériences de Borda. — Applications du pendule.* . . 126

Procédés divers de détermination de g. 126
Pendule. 127
Lois expérimentales du pendule. . 131
Vérification expérimentale des lois du pendule. 132
Comparaison du pendule composé et du pendule simple. 133
Formule du pendule composé. — Longueur du pendule composé, longueur du pendule simple synchrone. 135
Cinquième loi du pendule. Loi des intensités. 137
Longueur du pendule simple synchrone : autre formule. 138
Théorème d'Huygens : Réciprocité de l'axe d'oscillation et de l'axe de suspension. — Pendules réversibles. 140
Application du pendule à la mesure de g. 142
Expériences de Borda. 143
Résultats des diverses mesures de g à Paris. 151
Pendule de Ka 153
Variations de g à la surface du globe. 153
Variations de g à l'intérieur du globe. 156
Origine de la pesanteur. — Attraction universelle. 157
Explication de l'attraction solaire. 160
Explication de la pesanteur : elle est un cas particulier de l'attraction universelle. 161
Causes des variations de g à la surface du globe. 163
Diverses applications du pendule composé. 168

Ch. V. — *Mesure des grandeurs mécaniques et physiques. — Système des unités absolues ou système C. G. S. — Instruments de précision.* 170

Définitions générales. 170
Avantages généraux d'un système de mesures rationnelles. 171
Insuffisance du système métrique. Nécessité d'un système de mesures absolues : système de Gauss et système C. G. S. 173
Exposé du système C. G. S. 174
Conversion des mesures rationnelles en mesures absolues : dimensions et équations de dimensions. 180
Dimensions et équations des dimensions des principales unités mécaniques dérivées. 185

Mesure des grandeurs fondamentales. 185

Généralités sur les mesures et les instruments de précision. . . . 185
Règles divisées. Mètre-étalon. . . 186
Vernier. 188
Vis micrométrique. 191
Génération et propriétés de l'hélice. 191
Génération et propriétés de la vis. 192
Construction de la vis ordinaire. . 193
Construction de la vis micrométrique. 193
Sphéromètre. 194
Application de la vis micrométrique : appareil de Borda. 196
Machine à diviser. 197
Cathétomètre. 199

Mesure des masses, des poids et des forces. 201

Définitions et généralités. 201
Levier. 202
Balances. 205
Balance de précision 214
Différentes méthodes de pesée. . . 218

LIVRE III

HYDROSTATIQUE

Ch. Ier. — *Caractères generaux des liquides*. 220
Objet de l'hydrostatique. 220
Caractères physiques des liquides. 220
Compressibilité des liquides. . . . 221
Principe d'égalité de pression ou principe de Pascal. 222
Géneralisation du principe de Pascal 224
Pression en un point. 225
Direction des pressions. . . . 226
Presse hydraulique. 227
Presses de Desgoffe et de Cailletet. 229

Ch. II. — Propriétés des liquides pesants en équilibre. — *Pressions sur les parois des vases. — Pressions sur les corps immergés. — Conditions d'équilibre des liquides pesants*. . . . 230
Existence des pressions dans les liquides pesants en équilibre.. . 230
Théorème fondamental. 232
Démonstration du théorème fondamental. 232
Conditions d'équilibre d'un liquide pesant. 233
Pressions sur les parois des vases. 234
Pressions sur le fond plan et horizontal d'un vase.. 234
Vérification expérimentale. . . . 235
Pressions sur une paroi plane latérale.. 237
Centre de pression. 239
Pressions sur l'ensemble des parois d'un vase.. 242
Paradoxe hydrostatique. 244
Vases à réaction 245
Principe d'Archimède.. 247
Pressions sur les corps immergés. 247
Réciproque du principe d'Archimède 249
Détermination du volume d'un corps 250
Équilibre des corps immergés et des corps flottants. 250
Conditions d'équilibre des corps flottants. — Métacentre. 252
Ludion. 253
Natation. 254
Conditions d'équilibre des liquides pesants. 254
Équilibre d'un liquide dans un seul vase 254
Équilibre d'un seul liquide dans un système de vases communiquants. 255
Équilibre des liquides superposés 256
Équilibre de deux liquides hétérogènes dans deux vases communiquants. 259

Ch. III. — Applications des principes d'hydrostatique. — *Détermination des densités et poids spécifiques. — Aréomètres. — Applications diverses*. 260
I. *Détermination des densités*. . . 260
Définitions générales.. 260
Détermination des densités ou poids spécifiques. 264
Densités des solides. 265
Cas particuliers de la densité des solides. 269
Tableau des densités à 0° de quelques solides usuels. 270
Densités des liquides. 271
Tableau des densités à 0° de quelques liquides usuels.. 274
Aréomètres 275
Différents types d'aréomètres. . . 275
Aréomètres de Baumé.. 275
Aréomètre de Cartier. 277
Alcoomètre centésimal de Gay-Lussac. 277
Extension de la graduation centésimale aux pèse-sels, pèse-lait, pèse-vins, pèse-urine. 279
Graduation par comparaison.. . . 279
Densimètres et volumètres. . . . 281
Utilisation des aréomètres de Baumé comme volumètres et densimètres. 284
II. *Applications diverses*. 285

Niveau d'eau. 285
Niveau à bulle d'air. 286
Cours d'eau. — Jets d'eau. — Puits artésiens. 291

LIVRE IV

PNEUMATIQUE

Ch. I. — Statique des gaz. — *Pression atmosphérique et baromètres*. 295
Caractères physiques des gaz . . 295
Objet de la pneumatique. 299
Hydrostatique des gaz 299
Pression atmosphérique.. 301
Pression atmosphérique : démonstration expérimentale de son existence. 302
Mesure de la pression atmosphérique : expérience de Torricelli. 305
Expériences de Pascal.. 305
Valeur de la pression atmosphérique en kilogrammes. 305
Classification des baromètres. . . 306
Baromètre à cuvette.. 307
Baromètre à niveau invariable.. . 308
Baromètre normal.. 309
Baromètre de Fortin. 310
Baromètres à siphon. 314
Construction des baromètres.. . . 317
Corrections barométriques.. . . . 319
Réduction du baromètre à la latitude de 45° et au niveau de la mer. 323
Pression atmosphérique en unités C. G. S. — Atmosphère C. G. S. . 324
Prévision du temps par le baromètre. 324
Baromètre à cadran.. 325
Mesure des altitudes par le baromètre ou nivellement barométrique. 326
Calcul de la formule barométrique. 328
Baromètres métalliques ou anéroïdes. 329
Ch. II. — Statique des gaz. — *Principe d'Archimède et aérostats*.. 332
Extension du principe d'Archimède au cas des gaz.. 332
Expérience du baroscope.. 333
Conséquences du principe d'Archimède : Poids réels et poids apparents. — Correction des pesées faites dans l'air.. 334
Conséquences du principe d'Archimède : Équilibre des corps immergés dans l'atmosphère. . . . 335
Aérostats : montgolfières et ballons. 336
Principaux organes d'un aérostat ; description. 336
Construction et remplissage des aérostats. 340
Théorie des aérostats. — Force ascensionnelle 343
Manœuvres aéronautiques. 345
Parachute.. 346
Historique de l'invention des aérostats. 348
Ascensions célèbres. 350
Navigation aérienne ou direction des ballons. 355
Ch. III. — Compressibilité des gaz. — *Loi de Mariotte et manomètres*. 360
Loi de Mariotte. 360
Critique de la loi de Mariotte. — Expériences de Despretz. 364
Expériences de Pouillet. 364
Expériences de Dulong et Arago. . 365
Expériences de Regnault.. 366
Expériences postérieures à celles de Regnault.. 370
Expressions analytiques de la loi de Mariotte 371
Manomètres. 372
Définition et classification. 372
Manomètres de Regnault. 373
Manomètres à liquides moins denses que le mercure. 375
Manomètre différentiel de M. Kretz. 375
Manomètre à air libre ordinaire. . 377
Manomètre Desgoffe.. 379
Manomètres à air comprimé. . . 379
Manomètre à sensibilité constante. 383
Manomètres métalliques. — Manomètre de Bourdon. 384
Manomètres de M. Cailletet. . . . 385
Voluménomètre.. 385

Ch. IV. — Expansibilité des gaz. — *Diffusion et dissolution*. . . . 387
Mélange des gaz ou diffusion. . . . 387
Lois du mélange des gaz. 388
Dissolution ou absorption des gaz par les liquides. 390
Étude expérimentale de la solubilité. 391
Application des lois de la dissolution des gaz. 392
Ch. V. — Applications de l'expansibilité des gaz. — *Machines pneumatiques*. 395
Machine pneumatique ordinaire. . 395
Limite du vide. 402
Robinet de Babinet ou robinet à double épuisement. 405
Usages de la machine pneumatique. — Expériences classiques. 405
Machine pneumatique de Bianchi. 406
Machine pneumatique de Deleuil. . 408
Pompe pneumatique de E. Carré. . 410
Machines pneumatiques à mercure. 412
Principe et généralités. 412
Machine d'Alvergniat (modèle primitif). 412
Machine d'Alvergniat (nouveaux modèles). 414
Machine à mercure de Jamin. . . 414
Ch. VI. — Applications de l'élasticité des gaz. — *Pompes de compression. — Trompes soufflantes et aspirantes. — Applications de l'air comprimé*. 418
Machines de compression. . . . 418
Pompe à main. 419
Pompe de Silbermann. 421
Grande pompe de compression. . 421
Pompe Cailletet. 422
Théorie des machines de compression. 423
Limite de la condensation. 424
Trompes aspirantes et soufflantes. 426
Définitions. — Principe. 426
Petite trompe à eau d'Alvergniat. . 427
Trompe portative de M. Lionet. . . 428
Aspirateur de Sprengel : pompe-trompe d'Alvergniat. 428
Aspirateur ordinaire de Sprengel. . 430
Machine soufflante ou trompe à eau. 430
Trompe aspirante et soufflante d'Alvergniat. 430
Applications de l'air comprimé et de l'air raréfié. 432
Généralités et classification. . . . 432
Fusil à vent. 433
Poste ou télégraphe pneumatique. 433
Horloges pneumatiques. 436
Freins automoteurs. — Freins Westinghouse 438
Chemins de fer atmosphériques. . 438
Moteurs à air comprimé. 439
Machines perforatrices. 439
Travaux sous-marins : cloche à plongeur, scaphandre, appareil Triger. 445

LIVRE V

HYDRODYNAMIQUE. — CAPILLARITÉ

Ch. I. — Notions d'hydrodynamique. — *Principe de Torricelli et applications*. 448
Principe de Torricelli : Énoncé et formule. 448
Démonstration du principe. . . . 449
Vérification expérimentale de la formule de Torricelli. 450
Écoulement par les ajutages et tuyaux. 453
Flacon ou vase de Mariotte. . . . 453
Écoulement d'un liquide en contact avec une masse d'air limitée. 455
Pipette. 456
Fontaine intermittente. 457
Ch. II. — Notions d'hydrodynamique (suite). — *Pompes et siphons*. . 458
Classification et définitions préliminaires. 458
Pompes aspirantes. 459
Pompe aspirante et élévatoire. . . 462
Travail nécessaire pour manœuvrer la pompe aspirante. 462

Pompe aspirante à volant. 463
Pompes foulantes.. 464
Pompes aspirantes et foulantes.. . 466
Pompes oscillantes. — Pompe de Bramah.. 466
Pompes à jet continu. 467
Machines élévatoires ou machines d'épuisement. 468
Fontaine de Héron. 469
Machine de Schemnitz.. 470
Siphons.. 471
Théorie complète du siphon.. . . 473
Siphon à écoulement constant.. . 474
Siphon intermittent ou vase de Tantale.. 474
Fontaines intermittentes naturelles.. 475
Ch. III. — *Notions de capillarité.* 476
Phénomènes capillaires : définitions. 476
I. *Phénomènes produits au contact des solides par les liquides qui les mouillent.* 478
Lois de l'ascension des liquides dans les tubes capillaires. . . . 478
Loi de l'ascension des liquides entre deux lames parallèles.. 479
Loi de l'ascension des liquides entre deux lames inclinées. . . 479
Vérification des lois. — Expériences de Gay-Lussac.. 479
Expériences d'Édouard Desains.. . 483
Influence de la température. — Expériences de M. Wolf. 483
Tension superficielle. 484
Origine de la tension superficielle. — Cohésion des liquides. — État de la couche superficielle.. . . 486
Conséquences de la tension superficielle. — Pression capillaire. — Formule de Laplace. 487
Vérification de la formule de Laplace. — Expériences de Plateau. 488
Théorie des phénomènes capillaires.. 490
II. *Phénomènes produits au contact des corps solides par les liquides qui ne les mouillent pas.* 400
Contact des liquides et des solides. — Angle de raccordement.. . . 494
Étude expérimentale de l'angle de raccordement 495
Lois de la dépression des liquides dans les tubes capillaires, et entre les lames parallèles. 496
Vérification des lois de la dépression capillaire. 497
Conséquences relatives à la correction barométrique. — Construction des tables de correction.. . 497
III. *Phénomènes capillaires divers. — Applications.* 498
Longueur de la colonne liquide suspendue dans un tube ouvert. 498
Formation des gouttes à un orifice capillaire. — Loi de Tate. — Théorie du compte-gouttes. . . 499
Exception aux lois de l'équilibre des corps flottants. 500
Mouvements des gouttes dans les tubes capillaires coniques.. . . 500
Mouvements de deux plans parallèles plongeant dans un liquide. 501
Attractions et répulsions des corps flottants. 502
Expérience de M. Lippmann. — Phénomènes électrocapillaires. . 503
Applications de la capillarité aux aréomètres. 504

LIVRE VI

ACOUSTIQUE

Ch. I. — *Production, propagation et réflexion du son.* 506
Objet de l'acoustique. 506
Son et bruit.. 506
Cause du son. 506
Le son ne se propage pas dans le vide. 507
Le son se propage dans tous les corps élastiques.. 508
Vitesse du son dans les gaz. . . . 508
Formules pour calculer la vitesse du son dans les gaz.. 510
Vitesse du son dans les liquides et les solides. 511

Mode de propagation du son dans l'air : Idée synthétique du phénomène.. 511
Propagation du son dans l'air : Analyse du phénomène. 513
Réflexion du son 516
Échos et résonnances. 517
Réfraction du son.. 520
Circonstances qui font varier l'intensité du son.. 521
Renforcement du son par les tuyaux. 522
Speaking-tubes. 523
Porte-voix. 523
Cornet acoustique.. 524
Audiphone. 525
Stéthoscope.. 526

Ch. II. — Hauteur du son. — *Mesure du nombre des vibrations.* 527

Qualités du son musical.. 527
Méthodes diverses pour mesurer le nombre des vibrations. 528
Méthode acoustique. — Sirène de Cagniard de Latour. 528
Sirène de Seebeck.. 531
Soufflerie.. 531
Roue dentée de Savart.. 532
Limite des sons perceptibles. . . 533
Méthode graphique. — Vibroscope de Duhamel.. 534
Phonautographe.. 535
Phonographe. 535

Ch. III. — Hauteur du son. — *Classement des sons musicaux. — Théorie de la gamme.* 537

Classement des sons. — Intervalles musicaux.. 537
Accords : accords consonnants et dissonnants. — Accords parfaits. 539
Harmoniques. 540
Échelle musicale. — Gamme.. . . 540
Intervalles successifs des notes : Tons et demi-tons.. 541
Gamme naturelle. — Transposition musicale. — Dièses et bémols.. 542
Gammes mineures. — Tons relatifs. 544
Gamme tempérée. — Tempérament.. 545
Diapason. 546
Notation des diverses gammes naturelles. — Nombres absolus de vibrations.. 547
Limites de l'échelle musicale. . . 548

Ch. IV. — *Vibrations des cordes.* . 548

Cordes vibrantes. — Définitions. . 548
Sonomètre. 549
Lois des vibrations transversales.. 550
Lois des vibrations transversales. — Vérifications. 551
Nœuds et lignes nodales. — Sons harmoniques des cordes.. . . . 551
Vibrations longitudinales des cordes.. 552

Ch. V. — *Vibrations de l'air dans les tuyaux sonores.* 553

Tuyaux sonores : Définitions.. . . 553
Tuyaux à bouche : Description et jeu. 554
Tuyaux à anche : Description et jeu.. 555
Lois expérimentales des tuyaux sonores.. 556
Nœuds et ventres de vibration. . . 559
Disposition des nœuds et des ventres 561
Formules des tuyaux sonores. . . 562
Interférences sonores. — Principe des interférences. 563
Application du principe des interférences aux ondes sonores. — Théorie des tuyaux sonores. . . 564
Théorie des tuyaux sonores. . . . 565
Battements. 566
Sons résultants. 567

Ch. VI. — *Analyse et synthèse des sons. — Timbre. — Perception des sons.* 568

Analyse des sons. — Méthode de M. Helmholtz : Résonnance et résonnateurs. 568
Résonnateurs et appareil analyseur de Kœnig. 568
Résultats généraux. — Cause du timbre. 569
Synthèse des sons. 572

Perception des sons. 572

Description de l'oreille. 572
Mécanisme de l'audition.. 574

BIBLIOTHÈQUE VANIER
UNIVERSITÉ D'OTTAWA
Échéance

Celui qui rapporte un volume après la dernière date timbrée ci-dessous, devra payer une amende de 10 cents, plus 5 cents pour chaque jour de retard.

VANIER LIBRARY
UNIVERSITY OF OTTAWA
Date due

For failure to return a book on or before the last date stamped below there will be a fine of 10 cents, and an extra charge of 5 cents for each additional day.

33
CK

U D' / OF OTTAWA
COLL ROW MODULE SHELF BOX POS C
333 12 01 06 03 12 4